Vzorová řešení

12. ročník Náboje Junior

22. listopadu 2024

Ahoj,

Právě se Vám do rukou dostala brožurka zadání a řešení úloh soutěže Náboj Junior 2024. Náboj Junior je matematicko-fyzikální soutěž pro čtyřčlenné týmy žáků druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Soutěž trvá 120 minut, během kterých se týmy snaží vyřešit co nejvíce úloh zaměřených nejen na znalosti z matematiky a fyziky, ale i na schopnost přistupovat k úlohám inovativně a s důvtipem.

Dne 22. listopadu 2024 proběhl 12. ročník Náboje Junior. V České republice se letos zúčastnilo soutěže 347 týmů. Náboj Junior proběhl v 60 městech v Česku, na Slovensku, v Polsku a v Rakousku. Současně se soutěž konala v online verzi ve Španělsku, Nizozemí, Belgii a v Chorvatsku.

V českým městech je soutěž organizována nadšenými učiteli a studenty středních škol, kteří věnují svůj čas a energii, aby umožnili mladším žákům z regionu zasoutěžit si a prověřit svoje vědomosti. Cílem Náboje Junior je rozvíjet nadání dětí v oblasti matematiky, fyziky a ukázat širokému spektru žáků, že přírodní vědy skrývají mnoho zajímavostí, výzev a příležitostí.

Soutěž Náboj Junior vznikla jako společný projekt občanského sdružení Trojsten a korespondenčního semináře MFF UK Výfuk. Členové organizací jsou vysokoškolští studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislavě a Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze, kteří se snaží o rozvoj nadání studentů a zvýšení zájmu o přírodní vědy.

Těšíme se na Vás příští rok

Korespondenční seminář Výfuk

Příklad 1 ... Tajný deník

Patrik právě dopsal svůj tajný deník a teď by ho rád zamkl do bedny, aby ho nikdo nenašel. Chce použít zámek, který si koupil před několika lety. Bohužel od té doby zapomněl 3-ciferný vstupní kód. Jednu možnost Patrik zvládne vyzkoušet za 3 sekundy. Kolik minut mu bude trvat, než vyzkouší všechny možné kódy pro tento zámek?

Výsledek: 50

Řešení: Začněme určením všech možných trojciferných kódů. To budou všechny kombinace čísel od 000 do 999, což je celkem 1000 kombinací. Vyzkoušet každou z nich trvá Patrikovi 3 sekundy, proto zkouška všech 1000 kombinací bude trvat $3 \cdot 1000 = 3000$ sekund, což je $\frac{3000}{60} = 50$ minut.

Příklad 2 ... Oprava podlahy

Anička opravuje podlahu ve svém bytě. Zakoupila si tedy několik prken z dubového dřeva s hustotou $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Postupně změřila rozměry prkna a zjistila, že má délku $0{,}8\,\mathrm{m}$, šířku $12{,}5\,\mathrm{cm}$ a výšku $15\,\mathrm{mm}$. Jaká je hmotnost jednoho prkna v gramech?

Výsledek: 900

Řešení: Začneme převodem všech hodnot na základní jednotky. Víme, že $12{,}5\,\mathrm{cm}$ je $0{,}125\,\mathrm{m}$ a $15\,\mathrm{mm}$ je $0{,}015\,\mathrm{m}$. Nyní můžeme snadno dostat objem jednoho prkna vynásobením všech jeho rozměrů. Tím získáme objem $0{,}8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}125\,\mathrm{m} \cdot 0{,}015\,\mathrm{m} = 0{,}0015\,\mathrm{m^3}$. Abychom zjistili, kolik prkno váží, musíme vynásobit jeho objem hustotou dřeva, ze kterého je vyrobeno. Tím získáme hmotnost $0{,}0015\,\mathrm{m^3} \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$. Zadání se nás ale ptá na hmotnost v gramech, po převodu tedy dostaneme $0{,}9\,\mathrm{kg} = 900\,\mathrm{g}$.

Příklad 3 ... Kouzelník

Petr by rád provedl kouzelnický trik s balíčkem šesti karet, které mají čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Trik začíná poskládáním všech šesti karet do řady na stůl. Aby však kouzlo fungovalo, musí se každá dvojice sousedních karet lišit o více než 2. Kolika způsoby může Petr karty uspořádat, aby tuto podmínku splnil?

Výsledek: 2

Řešení: Všimněme si, že karty 3 a 4 mají pouze jedinou kartu, která se od nich liší o více než 2. Pro 3 je to 6 a pro 4 zase 1. Tím pádem musí být 3 a 4 na začátku či na konci řady čísel, protože mohou mít pouze jednu sousední kartu. Možné kombinace tedy musí vypadat následovně

3					4
4					3

Dále víme, která čísla musí být vedle 3 a 4, aby byla podmínka splněna. Uspořádání tedy můžeme upravit následovně

3	6			1	4
4	1			6	3

Zbývají nám pouze čísla 2 a 5. Můžeme vidět, že v obou uspořádáních máme pouze jednu možnost, jak doplnit tato čísla. Dostaneme tedy řady 3, 6, 2, 5, 1, 4 a 4, 1, 5, 2, 6, 3 jako jediná dvě možná uspořádání vyhovující zadání.

3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3

Příklad 4 ... Běh mezi břízami

Adam a Petr rádi běhají v ulici, ve které je vysázeno 10 bříz. Vzdálenost mezi každými dvěma sousedními břízami je stejná. Petr začal u první břízy a prováděl následující: běžel ke druhé bříze a zpět, poté ke třetí bříze a zpět k první, následně ke čtvrté bříze a opět zpátky k první a tak dále, dokud nakonec nedoběhl k desáté bříze a zpět k první. Adam běhal podobně, ale začal u desáté břízy, poté běžel k deváté bříze a zpět k desáté, následně k osmé bříze a opět zpátky k desáté a tak dále, dokud nedoběhl k první bříze a zpět k desáté. Oba kluci vyběhli ve stejnou chvíli a běhají stejnou rychlostí. Kolikrát se během tréninku potkají?

Výsledek: 10

Řešení: Protože běhají stejnou rychlostí, bude Petrovi cesta ke druhé bříze trvat stejně dlouho, jako Adamovi dostat se k deváté. To bude platit i pro všechny následující břízy – ve stejnou chvíli budou u třetí a osmé břízy, u čtvrté a sedmé břízy, u páté a šesté břízy atd. Oba kluci se potkají ve chvíli, kdy Petr poběží k bříze s vyšším číslem než Adam. Z toho plyne, že když Petr běží k šesté bříze a Adam k páté, potkají se poprvé. Zároveň se potkají i při zpátečním běhu. Od této chvíle bude Petr vždy běhat k bříze s vyšším číslem než Adam. Tím pádem se na cestě k bříze a zpět potkají vždy dvakrát, což znamená dvě setkání u každé další břízy, ke které poběží. Celkem tedy poběží k pěti břízám s výše popsanými vlastnostmi (pro Petra to budou břízy šestá až desátá, pro Adama pátá až první). Potkají se tedy $5 \cdot 2 = 10$ krát.

Příklad 5 ... Matematik závodníkem

Samuel je automobilový závodník a velmi mu záleží na jeho autě. Jelikož je označeno číslem 181, snaží se zachytit všechny chvíle, kdy tachometr ukáže, že auto ujelo počet kilometrů, který je násobkem čísla 181. Když dnes Samuel začal řídit, na tachometru bylo 32 768 kilometrů, což je o 7 kilometrů více, než činí předchozí násobek čísla 181 (tím je 32 761 kilometrů). Samuel chce jet tak, aby příští okamžik, kdy auto ujede násobek 181 kilometrů, nastal přesně za 2 hodiny. Jakou průměrnou rychlostí v kilometrech za hodinu musí Samuel jet, aby toho dosáhl?

Výsledek: 87

Řešení: Víme, že rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími násobky čísla n je vždy n. Tudíž rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími násobky čísla 181 je 181. Dále víme, že předchozí násobek čísla 181 byl o 7 kilometrů dříve. Další násobek tedy bude za $181 - 7 = 174$ kilometrů. Samuel chce tohoto momentu dosáhnout přesně za 2 hodiny. Jeho průměrná rychlost během těchto dvou hodin tedy musí být $v = \frac{174\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 87$ kilometrů za hodinu.

Příklad 6 ... Meta lhář

Matouš má oblíbené číslo. O tomto čísle napsal šest tvrzení a ke každému z nich přiřadil číslo. Tři z těchto tvrzení jsou pravdivá a tři nepravdivá. Tvrzení zní takto:

1. Jedná se o složené číslo.
2. Jedná se o liché číslo.
4. Jedná se o číslo menší než 30.
8. Jedná se o jednociferné číslo.
16. Jedná se o číslo končící číslicí 9.
32. Jedná se o číslo dělitelné 5.

Matouš tvrdí, že jeho oblíbené číslo se rovná součtu hodnot právě těch tří pravdivých tvrzení. Jak zní Matoušovo oblíbené číslo?

Výsledek: 35

Řešení: Nejprve se podíváme na první tvrzení. Když budeme předpokládat, že toto tvrzení je lež, znamená to, že Matoušovo oblíbené číslo je buď jednička, nebo prvočíslo. Součet tří přirozených čísel nemůže být jedna, musí to tedy být prvočíslo. Nicméně Matoušovo oblíbené číslo je také součtem tří čísel z řady 2, 4, 8, 16, 32.

Všechna tato čísla jsou sudá, tedy i součet tří z nich musí být sudý. Součet těchto tří čísel nemůže být dva, jednalo by se tedy o sudé číslo, které není prvočíslo. Tím dostáváme spor, tedy první tvrzení je pravda.
První tvrzení je jediné tvrzení s lichým číslem. Díky tomu víme, že součet čísel pravdivých tvrzení bude taky lichý, tedy druhé tvrzení musí být pravdivé. Zbývá tedy najít třetí pravdivé tvrzení. Podívejme se na tvrzení s číslem 4. Pokud by toto tvrzení bylo pravdivé, bylo by Matoušovo oblíbené číslo $1+2+4=7$. V tomto případě by ale tvrzení s číslem 8 bylo také pravdivé, což by odporovalo podmínce pouze tří pravdivých tvrzení. Tvrzení s číslem 4 je tedy nepravdivé. Matoušovo oblíbené číslo musí být tedy větší než 30. Jediný způsob, jak toho dosáhnout, je předpokládat, že je pravdivé tvrzení s číslem 32. Matoušovo oblíbené číslo tedy je $1+2+32=35$. Nyní je již jednoduché ověřit, že pro číslo 35 jsou pravdivá právě tvrzení s čísly 1, 2 a 32. Matoušovo oblíbené číslo je tedy skutečně 35.

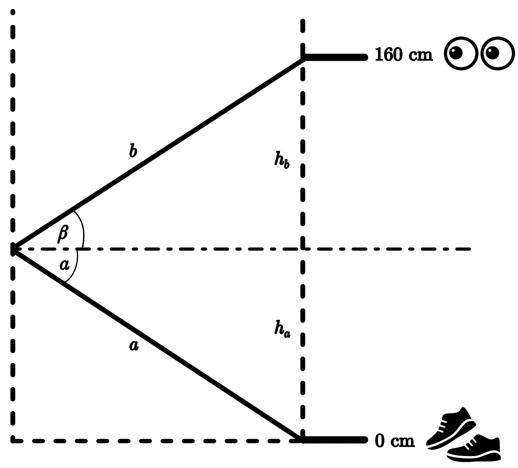
Příklad 7 ... Módní problém

Michal si potrpí na styl a módu. Když si zkouší oblečení, je pro něj důležité, aby se v zrcadle viděl celý včetně bot. Koupil si nové obdélníkové zrcadlo a teď si ho chce zavěsit na zeď tak, si viděl na boty, když stojí ve vzdálenosti 120 cm od zrcadla a oči má ve výšce 160 cm od země. Uvažujte, že se jeho boty nacházejí ve výšce 0 cm. V jaké největší výšce nad zemí v centimetrech může být spodní hrana zrcadla umístěna?

Poznámka: Předpokládejte, že zrcadlo nemá žádný rám.

Výsledek: 80

Řešení: Víme, že musí existovat světelný paprsek, který letí od Michalových bot na zrcadlo tak, že poté, co se odrazí, doletí do Michalových očí ve výšce 160 cm. Musíme brát v potaz, že jeho nohy i oči jsou od zrcadla stejně vzdáleny. Také si musíme vzpomenout, že při odrazu paprsku od zrcadla je úhel odrazu roven úhlu dopadu. Můžeme tedy nakreslit tento obrázek:



Jelikož úhly α a β budou stejně velké, budou i vzdálenosti a a b stejné. Ještě důležitější je, že výšky h_a a h_b, které paprsek vystoupá, budou rovněž stejné. Místo, kde se paprsek odrazí, bude tedy přesně uprostřed mezi jeho botami a očima. Jeho oči jsou ve výšce 160 cm, k odrazu tedy dojde ve výšce $\frac{160\,\text{cm}}{2} = 80\,\text{cm}$.
I maximální výška spodní hrany zrcadla bude tedy 80 centimetrů nad zemí. Kdyby bylo výš, paprsek by se od zrcadla neodrazil a Michal by si na boty neviděl.

Příklad 8 ... Kouzelník podruhé

Petr opět předvádí kouzelnický trik s šesti kartami, které jsou označeny čísly 1,2,3,4,5,a 6. Tentokrát si navíc připravil stolek o rozměrech 2×3 políčka, na který tyto karty přesně pasují. Aby Petrovi trik fungoval, je potřeba, aby byly karty na stolku seřazeny takovým způsobem, že čísla v každém řádku (zleva doprava) a v každém sloupci (shora dolů) byla vzestupně seřazená. Jedno takové uspořádání je vidět v tabulce níže. Kolika způsoby může Petr svoje karty uspořádat podle těchto pravidel?

1	2	5
3	4	6

Výsledek: 5

Řešení:
Nejprve se podívejme na číslo vlevo nahoře. Odtud se můžeme dostat ke každému číslu na stole posunutím dolů či doprava. To znamená, že všechna ostatní čísla musí být větší než toto číslo. Z toho vyplývá, že v levém horním rohu musí být jednoznačně číslo 1. Podobně číslo 6 musí být v políčku vpravo dole.

1		
		6

Dále se zamyslíme, kam může být umístěno číslo 2. Musí to být jedno z políček vedle čísla 1 (jinak by muselo existovat políčko s celým číslem mezi 1 a 2, což je nemožné). Takže máme jen dvě možnosti, kam dát číslo 2:

Případ 1. Číslo 2 je napravo od čísla 1. V tomto případě budeme mít tři možnosti na číslo vpravo od čísla 2 (může to být 3, 4 nebo 5). Pro každou volbu tohoto čísla můžeme spodní řadu seřadit pouze jedním způsobem.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

Případ 2. Číslo 2 je pod číslem 1. V tomto případě máme opět tři možnosti na číslo vpravo od čísla 2. Zbývající pole mohou být vyplněna opět jen jedním způsobem, ale tentokrát nedostaneme vždy validní kombinaci (pokud je číslo 3 vpravo od čísla 2, nedostaneme platné řešení – ve druhém sloupci budeme mít vyšší číslo nahoře ve sloupci než dole).

1	4	5
2	3	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

Zbývá nám tedy sečíst možnosti pro každý z případů, takže dostaneme $3 + 2 = 5$ možností, jak můžeme karty poskládat.

Příklad 9 ... Křemílek a Vochomůrka ve vesmíru

NASA se rozhodla, že na oběžnou dráhu Země vyšle dva satelity. První z nich pojmenovala Křemílek a ten druhý Vochomůrka. Oba tyto satelity startovaly přímo na nultém poledníku v Londýnském Greenwich přímo vzhůru, vylétly však do různých výšek. Oba satelity svou pouť po orbitě začaly ve stejnou chvíli i stejném směru. Díky tomu jak Křemílek, tak Vochomůrka obíhají po kružnici kolem Země každý s jinou úhlovou rychlostí. Křemílek se pohybuje úhlovou rychlostí $90°$ za hodinu a Vochomůrka $120°$ za hodinu. Po kolika hodinách na orbitě se Křemílek a Vochomůrka poprvé znovu potkají přímo nad sebou?

Výsledek: 12

Řešení: Každou hodinu Vochomůrka uletí o $120° - 90° = 30°$ více než Křemílek. Potkají se přesně v momentě, kdy Vochomůrka uletí o $360°$ více než Křemílek, což odpovídá tomu, že uletěl o jeden celý oblet více. Křemílek a Vochomůrka se tedy potkají po $\frac{360}{30} = 12$ hodinách.

Příklad 10 ... Záhadné stíny

Na divokém západě mají perfektní silnice, neboť jsou naprosto rovné bez jakýchkoliv zatáček. Když šel Ludvík po jedné z těchto silnic, objevil zajímavou věc. Když se podíval za sebe, viděl, že slunce je přímo nad silnicí. Potom se otočil i na druhou stranu a podíval se před sebe. Teď však spatřil, že silnice najednou končí. Přímo za koncem silnice se nacházely pouze dvě věci vedle sebe– strom a značka. Strom byl tenký a vysoký 3 m. Přímo vedl něj byla k zemi připevněná značka s výškou 2,4 m a šířkou 5 m. Ludvík změřil, že délka stínu stromu je 75 cm. Jaká bude plocha stínu vrženého značkou v metrech čtverečních?

Výsledek: 3

Řešení: Vzhledem k tomu, že značka je přímo naproti slunci, její stín zůstane stejně široký, tedy bude mít šířku 5 m. Ovšem jeho výška se oproti výšce značky změní. Víme, že strom původně měřil 3 m, jeho stín ale měří pouhých 0,75 m. Tím pádem poměr mezi stínem a původní výškou je $\frac{3}{0{,}75} = \frac{4}{1}$. Stejný poměr platí i u značky, takže délka stínu bude $\frac{2{,}4\,\mathrm{m}}{4} = 0{,}6\,\mathrm{m}$. Plochu celého stínu můžeme spočítat jako součin jeho výšky a šířky, tedy jako $0{,}6\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}^2$.

Příklad 11 ... Globální oteplování

Matěj jednou prohlásil: „Je takové teplo, že kdybych byl v USA, moje trouba na pečení by měla dvojnásobnou teplotu!“ Myslel tím však, že teplota měřená ve stupních Fahrenheita je dvojnásobkem teploty měřené ve stupních Celsia. Jaká byla teplota Matějovy trouby?

Poznámka: Pokud je teplota ve stupních Celsia $N\,^\circ\mathrm{C}$, teplota ve stupních Fahrenheita bude

$$\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right)+32\right)\,^\circ\mathrm{F}.$$

Výsledek: 160

Řešení: Řekněme, že teplota ve stupních Celsia je $N\,^\circ\mathrm{C}$. Z poznámky víme, že odpovídající teplotu ve stupních Fahrenheita zjistíme jako $\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right)+32\right)\,^\circ\mathrm{F}$. Zadání se ale ptá na situaci, kdy bude teplota ve stupních Fahrenheita dvojnásobná, takže $2N\,^\circ\mathrm{F}$. Tím pádem můžeme přepsat rovnici jako

$$2N - \frac{9}{5}\cdot N = 32.$$

Odtud získáme

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\cdot N &= 32,\\ N &= 160.\end{aligned}$$

Teplota trouby byla $160\,^\circ\mathrm{C}$.

Příklad 12 ... Pomalé začátky

Michal ke svým šestnáctým narozeninám dostal jako dárek knížku. Michal ale už dlouho žádnou knihu nečetl, takže je mu jasné, že bude chvíli trvat, než se do děje opravdu začte. Vymyslel si tedy speciální plán na to, jak knihu přečte – každý den přečte o jednu stranu více než den předchozí. První den přečetl jednu stranu. Jak dlouho mu bude trvat knihu přečíst, pokud má 2024 stran?

Výsledek: 64

Řešení: První den přečte Michal 1 stranu, druhý den bude mít přečteno celkem $1 + 2$ strany, třetí den to bude $1 + 2 + 3$ strany a tak dále. Po n dnech tedy bude mít přečteno $1 + 2 + \ldots + n$ stran. Použitím vzorce z tabulky pro součet aritmetické posloupnosti můžeme zapsat tento součet jako $\frac{n(n+1)}{2}$. Zadání se ptá na nejmenší počet dní n, pro který platí, že $\frac{n(n+1)}{2}$ je minimálně 2024. Musíme tedy vyřešit nerovnici

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 2024,$$
$$n(n+1) \geq 4048.$$

Můžeme odhadnout, že pro $n = 60$ je součin $n(n+1)$ přibližně 3600, takže hledané n bude jenom o trochu větší. Zjistíme, že $63 \cdot 64 = 4032 \leq 4048$ a $64 \cdot 65 = 4160 \geq 4048$. Přečtení celé knihy tedy bude Michalovi trvat 64 dní.

Příklad 13 ... Palindromy jsou všude!!!

Viktor miluje palindromy tak moc, že začal hledat takové, které mohou být vytvořeny součtem jiných palindromů. Dnes se Viktor rozhodl, že najde palindrom, který je součtem tří dvouciferných palindromů (tyto palindromy nemusí být rozdílné). Jaké největší číslo může Viktor najít?

Poznámka: Palindrom je číslo, které se čte stejně z obou stran. Například číslo 54345 *je pěticiferný palindrom.*

Výsledek: 242

Řešení: Začněme tím, že si sepíšeme všechna dvouciferná čísla, která jsou palindromy. Vzhledem k tomu, že musí být stejná zprava i zleva, musí obsahovat dvě stejné cifry. Jediné dvouciferné palindromy, které může Viktor najít, budou ve tvaru $11, 22, 33$... až do čísla 99. Můžeme si povšimnout jedné vlastnosti, kterou všechna tato čísla sdílí – jsou dělitelná 11. Takže když sečteme tři taková čísla, výsledné číslo také musí být dělitelné 11.
Největší možný součet tří dvouciferných palindromů je $99 + 99 + 99 = 297$. Takže musíme hledat čísla menší než 297 a najít první palindrom, který bude dělitelný 11. Jako první narazíme na čísla 292, 282, 272 atd., tedy čísla, která mohou být zapsána ve tvaru $2x2$, kde x je číslo mezi 0 a 9. Můžeme použít pravidlo pro dělitelnost 11. To nám říká, že součet cifer na sudé pozici mínus součet cifer na liché pozici musí být roven 0, případně dělitelný 11. První takové číslo od 292, na které můžeme narazit, je 242 a to díky tomu, že $4 - (2 + 2) = 0$. Jediný krok, co nám nyní zbývá, je najít, jaké tři dvojciferné palindromy musely být sečteny, abychom získali právě číslo 242. A skutečně můžeme zjistit, že tato čísla jsou $77 + 77 + 88 = 242$.

Příklad 14 ... Croissantové dilema

Lucka opravdu miluje croissanty a jako správný odborník si vždy chce vybrat ten nejkvalitnější. Proto si vymyslela, že kvalitu croissantů bude měřit podle jejich průměrné hustoty. Rozhodla se provést experiment, ve kterém se bude snažit zjistit průměrnou hustotu různých typů croissantů. Jako první přišel na řadu čokoládový croissant. Lucka zjistila, že objem celého čokoládového croissantu je $100\,\mathrm{ml}$ a že $15\,\mathrm{ml}$ z něj tvoří náplň. Hustota náplně je $1200\,\mathrm{kg/m^3}$ a hustota croissantového těsta je $800\,\mathrm{kg/m^3}$. Jaká je průměrná hustota čokoládového croissantu v $\mathrm{kg/m^3}$?

Výsledek: 860

Řešení: Průměrnou hustotu předmětu můžeme jednoduše zjistit jako jeho celkovou hmotnost dělenou jeho celkovým objemem. Víme, že celkový objem je $100\,\mathrm{ml} = 100\,\mathrm{cm^3}$. Potřebujeme tedy najít pouze hmotnost croissantu. Hmotnost můžeme získat jako součet hmotností těsta a náplně. Tyto hodnoty můžeme zjistit pomocí vzorce $m = \rho \cdot V$, kde ρ je hustota a V objem. Během počítání ale musíme být opatrní při práci s jednotkami. Při použití $15\,\mathrm{ml} = 15\,\mathrm{cm^3}$ pro objem náplně (V_n) a $100\,\mathrm{ml} - 15\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{cm^3}$ pro objem těsta musíme do vzorce dosadit hodnoty hustoty s jednotkou: $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$ pro hustotu náplně (ρ_n)

a $800\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$ pro hustotu těsta (ρ_t). Nyní získáme celkovou hmotnost čokoládového croissantu

$$\begin{aligned} m_\mathrm{celkova} &= m_\mathrm{naplne} + m_\mathrm{testa}, \\ &= \rho_\mathrm{n} \cdot V_\mathrm{n} + \rho_\mathrm{t} \cdot V_\mathrm{t}, \\ &= 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 15\,\mathrm{cm^3} + 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 85\,\mathrm{cm^3}, \\ &= 18\,\mathrm{g} + 68\,\mathrm{g}, \\ &= 86\,\mathrm{g}. \end{aligned}$$

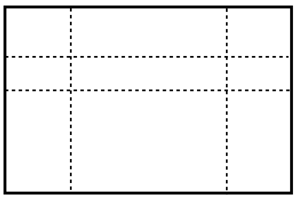
Teď už nám zbývá pouze z celkové hmotnosti zjistit průměrnou hustotu. K tomu můžeme použít výše uvedený vzoreček

$$\rho_\mathrm{prumer} = \frac{m_\mathrm{celkem}}{V_\mathrm{celkem}} = \frac{86\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{cm^3}} = 0{,}86\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá odpověď v $\mathrm{kg/m^3}$, naším řešením je $860\,\mathrm{kg/m^3}$.

Příklad 15 ... Zahradník od rybníčku Brčálníku

Rákosníček se rozhodl, že se stane zahradníkem, neboť vlastní zahradu obdélníkového tvaru, o které ví, že má obvod 16 m. S dalšími pohádkovými kamarády chce na zahradě pracovat zároveň, a tak rozdělil svou zahradu na 9 obdélníkových částí způsobem, jaký je ukázán v přiloženém obrázku (přerušované čáry jsou hranice mezi jednotlivými částmi). Jaký je součet obvodů všech 9 částí v metrech?

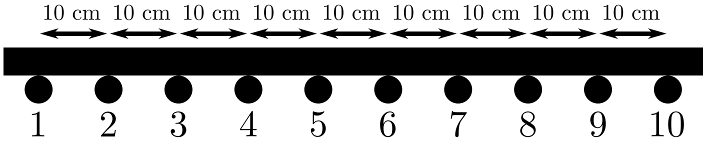


Výsledek: 48

Řešení: Víme, že obvod celé zahrady je 16 m, takže je součet délek všech plných (nepřerušovaných) čar 16 m. Když se podíváme na přerušované čáry, zjistíme, že po přeuspořádání mohou vytvořit obdélník stejný jako ten tvořený plnými čarami. Po dopočítání zjistíme, že součet délek všech přerušovaných čar je také 16 m. V tomto případě započítáváme každou z přerušovaných čar pouze jednou. Reálně je ale každá z nich součástí hrany dvou obdélníků, proto je potřeba délku přerušovaných čar vynásobit dvěma. Každá plná čára ale bude použita pouze jednou. Celkem jsme tedy použili celý obvod původního obdélníku $2 + 1 = 3$ krát, takže odpověď je $3 \cdot 16\,\mathrm{m} = 48\,\mathrm{m}$.

Příklad 16 ... Dokážem to (ne)zničit?

Bořek stavitel si postavil poličku na kytičky skládající se z 1 metr dlouhého prkna. Toto prkno je po celé své délce stejné a je podepřeno 10 hřebíky. Hřebíky jsou od sebe vždy ve vzdálenosti 10 centimetrů. Bořek všechny hřebíky zleva očísloval čísly od 1 do 10. Po pár dnech si ale uvědomil, že tolik hřebíků není potřeba a rozhodl se pár z nich odebrat, a to tak aby polička nespadla ani se nenaklonila na žádnou stranu. Jaký je minimální součin čísel zbylých hřebíků?



Výsledek: 6

Řešení: Aby polička zůstala na zdi, musí její těžiště ležet mezi dvěma zbylými hřebíky. Jinými slovy, pro zachování stability musí být od těžiště jeden hřebík vlevo a současně jeden vpravo. Těžiště poličky leží mezi hřebíky s čísly 5 a 6. Z předchozí úvahy víme, že musíme mít jeden hřebík s číslem mezi 1 a 5 a druhý s číslem 6 až 10. Abychom získali nejnižší součin, vybereme si hřebíky s čísly 1 a 6. Součin čísel tedy bude 6.

Příklad 17 . . . Statistická

Anežka studuje statistiku a naučila se ve škole pár nových výrazů. Na přednášce se dozvěděla, že modus je číslo, které se ve vzorku vyskytuje nejčastěji. Dále se také naučila, že medián je hodnota, která je právě uprostřed vzorku, když jsou data seřazena od nejnižšího k nejvyššímu číslu. Například pro data $2, 7, 20, 6, 2$ je modus 2 a medián 6.
Anežka při počítání domácího úkolu zjistila, že nemůže přečíst část čísel, která si předtím sepsala. Věděla ale, že její data obsahovala čísla $8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5$ a další tři (ne nutně odlišná) celá čísla, která po sobě teď nemohla přečíst. Pamatovala si ale, že medián všech dat byl 4 a modus (vzorek dat měl jediný unikátní modus) byl také 4. Jaká je nejvyšší možná hodnota aritmetického průměru čísel v tomto vzorku dat? Odpovědi odevzdávejte jako zlomek v základním tvaru.

Výsledek: 5

Řešení: Anežka ví, že vzorek dat měl jediný unikátní modus, kterým je číslo 4. To znamená, že se číslo 4 objevilo ve vzorku dat nejčastěji ze všech hodnot. Z čísel, která známe, se nejčastěji vyskytují právě hodnoty 3 a 5. Aby se tedy z čísla 4 mohl stát modus, musí se objevit alespoň třikrát. V původním vzorku dat se ale vyskytuje pouze jednou. Můžeme tedy říci, že alespoň 2 ze 3 neznámých hodnot bude číslo 4.
Po zajištění podmínky s modem známe 10 z 11 čísel ze všech dat. Pro zjištění poslední hodnoty ale potřebujeme počítat i s druhou podmínkou, která nám říká, že také medián by měl být 4. Seřazením všech deseti známých hodnot vzestupně získáme: $3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9$. Když chceme přidat do vzorku jedenácté číslo, medián musí být 4, zatímco aktuálně je medián mezi čísly 4 a 5. Pokud by bylo jedenácté číslo 5 a nebo vyšší, medián by byl 5, což nesplňuje druhou podmínku. Aby byla podmínka splněna, musí být poslední neznámé číslo 4 nebo nižší. Vzhledem k tomu že chceme, aby byl aritmetický průměr co největší, zvolíme číslo 4. Nyní víme, že celý vzorek dat obsahuje čísla: $3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9$. Aritmetický průměr je pouze součet všech čísel ze vzorku vydělený jejich počtem, tedy získáme $\frac{55}{11} = 5$.

Příklad 18 . . . Překvapení

Jeníček a Mařenka by se rádi zase po čase viděli. Jeníček chce Mařenku překvapit, a tak se rozhodne, že ji navštíví. Vydá se tedy na kole směrem k Mařence domů rychlostí 30 km/h. Během cesty mu ale Mařenka zavolá a Jeníčkovi nezbývá nic jiného než přiznat, že jede směrem k ní. Mařenka se na něj samozřejmě velmi těší, a tak mu vyjede naproti autem rychlostí 90 km/h přesně v momentě, když Jeníček ujel polovinu cesty. Šťastně se potkají přímo po 1 hodině od momentu, kdy Jeníček vyrazil. Jaká je vzdálenost mezi jejich domy?

Výsledek: 48

Řešení: Řekněme, že vzdálenost mezi domy je s. Dráhu, kterou Jeníček ujel, budeme značit jako s_J a dráhu, kterou ujela Mařenka, jako s_M. Můžeme si všimnout, že $s = s_\mathrm{J} + s_\mathrm{M}$. Abychom tedy získali celkovou vzdálenost s, musíme sečíst uražené vzdálenosti obou dětí. Nejdříve můžeme jednoduše odvodit s_J použitím vzorečku $v = \frac{s}{t}$, upraveného jako $s = v \cdot t$, kde v je rychlost a t čas. Tím pádem $s_\mathrm{J} = v_\mathrm{J} \cdot t_\mathrm{J} = 30\,\mathrm{km/h} \cdot 1\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{km}$. Stále nám ale zbývá najít s_M pro zjištění celkové dráhy s. Musíme tedy vyjádřit čas, který Jeníček potřeboval, aby dorazil doprostřed cesty. Z $t = \frac{s}{v}$ můžeme určit, že čas, který Jeníček potřeboval na ujetí poloviny trasy, je $\frac{s}{2}$ při rychlosti 30 km/h. Pomocí toho získáme $t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s}{2 \cdot 30\,\mathrm{km/h}} = \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$. Použitím tohoto vzorce můžeme také vyjádřit dobu, po kterou cestovala i Mařenka. Bude to 1 hodina mínus čas, kdy jel pouze Jeníček. Doba pohybu Mařenky je tedy, $t_\mathrm{M} = 1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$. Vyjádřením získáme s_M jako $s_\mathrm{M} = v_\mathrm{M} \cdot t_\mathrm{M} = 90\,\mathrm{km/h} \cdot (1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}) = 90\,\mathrm{km} - \frac{90\,\mathrm{km/h} \cdot s}{60\,\mathrm{km/h}} = 90\,\mathrm{km} - \frac{3}{2} \cdot s$.
Nyní víme hodnotu s_J a také máme vyjádřenou hodnotu s_M. Nyní už nám zbývá pouze vypočítat celkové s jako:

$$
\begin{aligned}
s &= s_\mathrm{J} + s_\mathrm{M},\\
s &= 30\,\mathrm{km} + 90\,\mathrm{km} - \frac{3}{2}\cdot s,\\
\frac{5}{2}s &= 120\,\mathrm{km},\\
s &= 48\,\mathrm{km}.
\end{aligned}
$$

Vzdálenost mezi domy Jeníčka a Mařenky je tedy 48 km.

Příklad 19 ... Dva krát dva krát

Tomi se nudil, a tak začal na tabuli psát čísla. Na začátku napsal jednu dvojku, na další řádek potom dvě dvojky, na další pak tři dvojky, pak čtyři dvojky a tak dále, dokud na tabuli nenapsal 2024 dvojek v jednom řádku. Potom se rozhodl, že všechny dvojky na tabuli vynásobí. Jaká je poslední číslice výsledného součinu?

Výsledek: 6

Řešení: Dle zadání chceme vypočítat poslední cifru součinu

$$(2)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{2024-times}}).$$

Jelikož nás zajímá pouze poslední cifra celého součinu, můžeme se k tomuto problému postavit tak, že se budeme zaobírat pouze násobením posledních číslic mezisoučinů v závorkách.
Můžeme začít tím, že si vypíšeme pár úvodních čísel v závorkách:

$$
\begin{aligned}
2&,\\
2\cdot 2 &= 4,\\
2\cdot 2\cdot 2 &= 8,\\
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 16,\\
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 32,\\
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 64,\\
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 128,\\
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 256,\ldots
\end{aligned}
$$

V této posloupnosti čísel si můžeme všimnout, že se poslední cifry opakují podle vzorce: 2, 4, 8, 6. Vzhledem k tomu, že je v posledních číslicích čísel v závorkách pravidelný vzorec, získáme poslední cifru výsledného součinu opakovaným násobením čísel v tomto vzorci: $2\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot\ldots$.
Když začneme vypisovat pouze poslední číslice průběžných kroků tohoto násobení, dostaneme následující posloupnost čísel: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, 8, 4, 4, 8, 2, ... Zde si opět můžeme všimnout opakujícího se vzorce 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, tentokrát délky 8 číslic. Poslední cifra celého součinu tedy musí být jednou z cifer v tomto vzorci. Protože provádíme celkem 2023 násobení mezi 2024 závorkami v našem výpočtu, můžeme vydělit 2023 číslem 8, délkou vypozorovaného vzorce, a zbytek nám řekne, na kterém místě v tomto vzorci skončíme po vynásobení všech čísel.
Protože $2023 : 8 = 252$, zbytek 7, tím pádem je poslední číslice celého součinu 6, protože ta je sedmou číslicí ve vypozorovaném osm cifer dlouhém vzorci.

Příklad 20 ... Tombola v rádiu

Rádiová stanice pořádá každý den tombolu. Každý může poslat SMS na konkrétní telefonní číslo a dostane se ten den do tomboly. Včera byl za každou SMS jeden los do tomboly s jedním výhercem. Dnes ale rádio nabízí speciální akci, kdy jedna SMS zajistí 30 losů. Honza poslal jednu SMS včera a jednu SMS dnes. Pokud předpokládáme, že organizátoři tomboly dostali včera stejný počet SMS jako dnes, kolikrát vyšší má Honza pravděpodobnost na výhru, než jakou měl včera?

Výsledek: 1

Řešení: V dnešní tombole dostal Honza 30krát více losů. Protože však dostali 30krát více losů všichni, kteří se tomboly zúčastnili, celkové množství losů je také 30krát vyšší. Tím pádem, i když má Honza 30krát více losů, tvoří stejný podíl na všech losech jako včera. Pravděpodobnost výhry je tedy stejná jako včera. Jinými slovy, je 1krát vyšší.

Příklad 21 ... Odpor k odporu

Matouš všemu odporuje, dokonce i čtení o elektřině. Posledně se dočetl, že drát o délce ℓ s průřezem S z materiálu s rezistivitou ρ bude mít odpor roven $R = \frac{\rho\ell}{S}$. Rozhodl se ověřit si to v praxi. Připravil si na to měděný drát s odporem R. Pak drát roztavil a měď použil k vytvoření drátu s třetinovým poloměrem původního drátu. Odpor tohoto drátu je nyní kR. Určete hodnotu k

Výsledek: 81

Řešení: Poloměr drátu je roven jedné třetině originálu, a jelikož průřez drátu je úměrný druhé mocnině poloměru, průřez nového drátu musí být $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$. Objem drátu se nemohl změnit, takže zmenšení průřezu na devítinu způsobí, že drát se prodloužil na $\ell' = 9\ell$. Rezistivita je vlastnost materiálu, takže zůstává stejná. Nyní můžeme spočítat, že odpor drátu je

$$R' = \frac{\rho\ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81\frac{\rho\ell}{S} = 81R.$$

Z toho vidíme, že odpor nového drátu je 81krát větší než odpor starého drátu. Hodnota k je tedy 81.

Příklad 22 ... Dresy z New Jersey

Tomáš pere fotbalové dresy týmu z New Jersey. Jeho tým používá 75 dresů se 75 po sobě jdoucími čísly. Včera je pověsil na šňůru v rostoucím pořadí. Zjistil, že součet čísel posledních pěti dresů byl přesně 6krát větší než součet čísel prvních 5 dresů. Jaké číslo bylo na dresu, který byl přesně uprostřed?

Výsledek: 49

Řešení: Označme číslo dresu uprostřed jako x. Před tímto dresem je $\frac{75-1}{2} = 37$ dresů a 37 dresů je i za ním. Prvních pět dresů má tedy čísla $x-37$, $x-36$, $x-35$, $x-34$ a $x-33$, zatímco posledních pět dresů má čísla $x+33$, $x+34$, $x+35$, $x+36$ a $x+37$. Podmínku v zadání můžeme přepsat do rovnice

$$\begin{aligned}
(x+33)+(x+34)+(x+35)+(x+36)+(x+37) &= 6((x-37)+(x-36)+(x-35)+(x-34)+(x-33)),\\
5x+175 &= 6(5x-175),\\
5x+175 &= 30x-1050,\\
25x &= 1225,\\
x &= 49.
\end{aligned}$$

Číslo na dresu uprostřed tedy bylo $x = 49$.

Příklad 23 ... Zdravý prášek

Mirek si dělá zdravou svačinku a potřebuje sušené banány. Koupil si trs banánů, které obsahují 75 % vody, a rozhodl se je nasušit. Půlku z nich dal do horkovzdušné sušičky, která snížila jejich obsah vody na 25 %, a druhou půlku dal do mrazové sušičky, ve které se obsah vody v banánech snížil dokonce na 10 %. Nakonec rozdrtil obě várky banánů a jejich prášek sesypal dohromady. Jaký podíl vody obsahuje tento prášek? Odpovězte pomocí zlomku v základním tvaru.

Výsledek: $\frac{2}{11}$

Řešení: Hmotnost banánů budeme označovat jako m. Víme, že obsahují $\frac{3}{4}m$ vody a $\frac{1}{4}m$ sušiny. Každá polovina banánů tedy obsahuje $\frac{1}{8}m$ celkové hmotnosti sušiny. U banánů z horkovzdušné sušičky tvoří sušina 75 % hmotnosti, takže tyto banány nyní váží $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$ a voda v nich váží $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$. Banány z sušené mrazem váží $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$ a voda v nich $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$.
Celková hmotnost prášku je $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$, z čehož $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ tvoří voda. Takže podíl vody v prášku je

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Příklad 24 ... Skoky ve výtahu

Marek váží 75 kg a za normálních okolností dokáže vyskočit 1 m vysoko. Jednou si vzal do výtahu váhu. Zjistil, že když se výtah začne pohybovat směrem dolů, váha ukazuje, že má pouze 60 kg. Jak vysoko nad podlahu dokáže Marek vyskočit v takto se pohybujícím výtahu? Odpověď uveďte v metrech.

Výsledek: 1,25

Řešení: Když Marek vyskočí, nabírá potenciální energii. Pokud tedy Marek, který váží $m = 75\,\mathrm{kg}$, vyskočí do výšky $h_0 = 1\,\mathrm{m}$, získá potenciální energii $E = mgh_0$. Co se změní v pohybujícím se výtahu? Váha ukazuje méně, protože se změnilo gravitační zrychlení. Počítejme s tím, že nové gravitační zrychlení je g'. Tím pádem Marek působí na váhu silou $F_\mathrm{g} = mg'$. Ale váha ukazuje hmotnost $m' = 60\,\mathrm{kg}$, protože „si myslí“, že se vše děje za normálního gravitačního zrychlení. Takže fakt, že váha ukazuje hmotnost m' znamená, že na ni působí síla o velikosti $m'g$. To je ale F_g, tím pádem:

$$\begin{aligned} mg' &= m'g, \\ g' &= \frac{m'}{m}g. \end{aligned}$$

Nyní se vraťme ke skoku. Protože se gravitační zrychlení změnilo, vyskočí Marek do výšky h s pomocí energie E. Ta se přemění v potenciální energii $E = mg'h$. To znamená, že Marek vyskočí do výšky

$$\begin{aligned} mgh_0 &= mg'h, \\ h &= \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1{,}25\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Příklad 25 ... Eliminace čísla 3

Petr má číslo 3 spojené s neštěstím (např. pokaždé najde tři kosti v rybě bez kostí), a tak se rozhodl vymazat číslo tři ze svého života. Nepoužívá žádná čísla dělitelná 3 ani žádná čísla, která číslici 3 obsahují. Kolik čísel od 1 do 100 včetně může Petr používat?

Výsledek: 55

Řešení: Spočítejme čísla, která Petr nepoužívá. Násobky 3 mezi 1 a 100 jsou 3, 6, ..., 99, dohromady jich tedy je $99 : 3 = 33$. Kromě toho je 19 čísel, která obsahují číslici 3 (10 na pozici jednotek a 10 na pozici desítek, ale číslo 33 má 3 na obou pozicích). Petr nepoužívá žádné číslo z těchto dvou skupin. Některá čísla jsou ale v obou těchto skupinách, konkrétně čísla 3, 30, 33, 36, 39, 63 a 93. Tato čísla ale chceme započítat pouze jednou. Tím pádem Petr nepoužívá $33 + 19 - 7 = 45$ čísel. Používá pouze ostatní čísla, tedy celkem $100 - 45 = 55$ čísel.

Příklad 26 ... Pozor na chodce

Tereza jede autem rychlostí 15 m/s. Náhle si všimne chodce na přechodu. Terezina reakční doba je 1 s. Po uplynutí této doby začne auto brzdit konstantní silou. Při rychlosti 15 m/s by byla brzdná dráha 33 m. Jaká mohla být brzdná dráha v metrech, kdyby na začátku auto jelo 35 m/s?

Výsledek: 133

Řešení:
Řekněme, že Terezina rychlost je v. První $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ po tom co si všimne chodce, jede i nadále rychlostí v, takže urazí vzdálenost $s_1 = vt_0$. Pak začne brzdit konstantní silou F. Tato síla působí na dráze s_2, takže vykoná práci $W = Fs_2$. Tato práce snižuje kinetickou energii $E = \frac{1}{2}mv^2$ vozidla, kde m je hmotnost auta. Vyjde nám tedy, že $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, což znamená, že vzdálenost potřebná na zastavení po tom co začne brzdit je

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

Úloha říká, že když Tereza jela rychlostí $v_1 = 15\,\mathrm{m/s}$, její brzdná dráha $s_1 + s_2$ byla $s = 33\,\mathrm{m}$. Pomocí tohoto můžeme vyjádřit neznámou hodnotu $\frac{m}{F}$ jako

$$\begin{aligned} s &= v_1 t_0 + \frac{mv_1^2}{2F}, \\ \frac{m}{F} &= \frac{2(s - v_1 t_0)}{v_1^2} \end{aligned}$$

a tu můžeme spojit s brzdnou drahou $s' = s_1' + s_2'$ pro rychlost $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$, aby nám vyšlo

$$\begin{aligned} s' &= v_2 t_0 + \frac{mv_2^2}{2F}, \\ s' &= v_2 t_0 + \frac{(s - v_1 t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{(33\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s}) \cdot (35\,\mathrm{m/s})^2}{(15\,\mathrm{m/s})^2} = 133\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

To znamená, že Terezina brzdná dráha s počáteční rychlostí $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$ by byla $s' = 133\,\mathrm{m}$.

Příklad 27 ... Tanec na vodě

Organizátoři každoročního Aquatechno Dance festivalu chtějí na jezero umístit plovoucí taneční parket. Parket bude pevný kvádr s tloušťkou 10 cm a průměrnou hustotou 0,6 g/cm^3. Chtějí, aby plovoucí parket udržel alespoň 4000 kg, než se potopí. Jaká je minimální plocha tanečního parketu v metrech čtverečních?

Výsledek: 100

Řešení: Označíme požadovanou plochu parketu S. Dostaneme tedy, že objem celého tanečního parketu je $V = S \cdot 10\,\mathrm{cm}$. Když bude parket plně zatížen, bude jeho okraj na úrovni vody kolem něj, takže vytlačuje objem vody V. Vytlačená voda bude mít hmotnost $V \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, která musí být rovná hmotnosti tanečního parketu plus 4000 kg na něm položených. Tato hmotnost bude $V \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} + 4000\,\mathrm{kg}$. Řešením pro V dostaneme $V = 10\,\mathrm{m^3}$, takže plocha tanečního parketu musí být $S = \frac{V}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{m^2}$.

Příklad 28 ... Stan

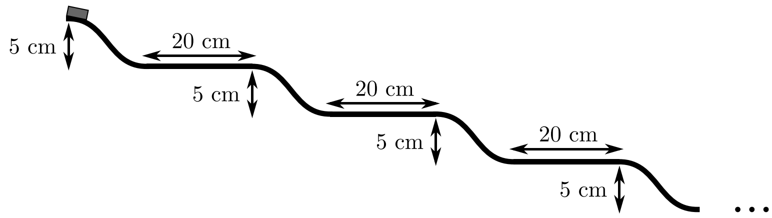
Lucka je na túře. Postavila si stan ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou BC. Aby si usušila oblečení, natáhla Lucka lano, kterým vytvořila rovnostranný trojúhelník DEF tak, že body D, E a F ležely na úsečkách AB, BC a CA v tomto pořadí. Lucka naměřila, že $\angle ADF = 42°$ a $\angle EFC = 24°$. Jaká je velikost úhlu $\angle EAC$ ve stupních?

Výsledek: 12

Řešení: Uvažujme úhly okolo vrcholu F. Víme, že úhel $\angle EFC = 24°$ a $\angle DFE = 60°$ vzhledem k tomu, že trojúhelník DEF je rovnoramenný. Tím pádem můžeme úhel DFA spočítat jako $\angle DFA = 180° - \angle EFC - \angle DFE = 180° - 24° - 60° = 96°$. V trojúhelníků ADF známe dva úhly, takže dostáváme $\angle DAF = 180° - \angle ADF - \angle DFA = 180° - 42° - 96° = 42°$.
Můžeme si všimnout, že $\angle DAF = \angle ADF$. Tím pádem bude i trojúhelník ADF rovnoramenný a v takovém trojúhelníku platí $AF = DF$. Úsečka DF je strana rovnostranného trojúhelníku DEF, což znamená, že $DE = EF = FD$. Z toho víme, že $AF = EF$, takže trojúhelník AEF je rovnoramenný se základnou AE.
Už víme, že $\angle AFE = \angle DFA + \angle DFE = 96° + 60° = 156°$. Z rovnoramenného trojúhelníku AEF tedy získáme $\angle EAC = \angle EAF = \frac{180°-156°}{2} = 12°$.

Příklad 29 . . . Hot Wheels

Nina si hraje s autíčkem Hot Wheels. Autíčko považujme za kvádr s hmotností 60 g. Nina si vytvořila dráhu střídáním rovných a svažujících se segmentů. Na svažujících se částech autíčko klesá vždy 5 cm bez tření, na horizontálních částech pak autíčko jede vždy 20 cm s koeficientem tření 0,4. Trať začíná svažující se částí. Nina urychlí autíčko na počáteční rychlost 5 m/s. Na kolikáté horizontální části dráhy autíčko zastaví?



Výsledek: 42

Řešení: Na klesajících částech dráhy autíčko získává energii, zatímco na rovných úsecích ji ztrácí. Autíčko tedy zastaví na jedné z horizontálních částí a to tehdy, když jeho energie klesne na 0 J.
Na začátku je celková energie auta rovna součtu jeho potenciální a kinetické energie. Pro jednoduchost předpokládejme, že potenciální energie auta na začátku byla 0 J. Celková energie auta se tedy v tomto bodě skládá z jeho kinetické energie, tedy $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, kde $m = 60\,\mathrm{g}$ je hmotnost autíčka a $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ je jeho počáteční rychlost.
Pokaždé, kdy auto projede částí dráhy z kopce, se jeho kinetická energie zvýší o rozdíl potenciální energie. Protože sjede o $h_0 = 5\,\mathrm{cm}$, získá energii $E_{\mathrm{p}_0} = mgh_0$. V horizontálních částech je pak třecí síla $F_t = fmg$, kde $f = 0{,}4$ je koeficient tření. Ta působí na dráze $s = 20\,\mathrm{cm}$, takže vykonává práci $W = F \cdot s = fmgs$. Z toho důvodu klesá celková energie autíčka na tomto segmentu o W.
Za každou překonanou dvojici klesající a horizontální cesty se tedy celková energie sníží o $E_{\mathrm{p}_0} - W = mgh_0 - fmgs$. Po n takových párech rovných a svažujících se segmentů tedy energie klesne o $n(E_{\mathrm{p}_0} - W)$ a nás zajímá takové nejmenší n, při kterém dostaneme $E_0 - n(E_{\mathrm{p}_0} - W) \leq 0$. Řešením této nerovnice získáme

$$
\begin{aligned}
E_0 - n(E_{\mathrm{p}_0} - W) &\leq 0, \\
\frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmgs) &\leq 0, \\
\frac{1}{2}v_0^2 &\leq n(fgs - gh_0), \\
n &\geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)}, \\
n &\geq \frac{(5\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 10\,\mathrm{m^2/s}(0{,}4 \cdot 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm})} = \frac{25}{0{,}6} = \frac{250}{6} \doteq 41{,}67.
\end{aligned}
$$

Auto tedy zastaví na 42. horizontální části dráhy.

Příklad 30 ... Stárnutí

Samuel dnes slaví 37. narozeniny, a tak si napsal 2024-ciferné číslo $3737\cdots37$, které se obsahuje 1012 krát cifru 3 a 1012 krát cifru 7. Zavzpomínal také na časy, kdy mu bylo 21, a rozhodl se vynásobit toto 2024-ciferné číslo číslem 21. Nakonec sečetl všechny cifry nově získaného čísla. Jaké číslo tímto součtem získal?

Výsledek: 12 153

Řešení: Všimněme si, že $37 \cdot 21 = 777$. Tím se nám výrazně zjednodušil další postup. Napodobme obvyklý způsob násobení pod sebou. Standardně násobíme pouze po jedné číslici, tentokrát však použijeme vztah $37 \cdot 21 = 777$ a využijeme ho v každém kroku násobení. Tímto získáme tento výraz

$$
\begin{array}{r}
3\,7\cdots\,7\,3\,7\,3\,7\,3\,7 \\
\cdot\,2\,1 \\
\hline
7\,7\,7 \\
7\,7\,7 \\
7\,7\,7 \\
\cdots \\
7\,7\,7 \\
\hline
7\,8\,4\cdots\,4\,8\,4\,8\,4\,7\,7
\end{array}
$$

Po sobě jdoucí čísla 777 mají vždy jednu cifru 7 ve společném řádu a můžeme je sečíst obvyklým způsobem. Tím nám vyjdou čísla 4 a 8 ve výsledném čísle. Z našeho postupu je také vidět, že jsme zvýšili počet cifer našeho čísla o 1. Výsledek je tedy 2025-ciferné číslo. Poslední dvě a první cifra budou 7 a zbylých $2024 + 1 - 3 = 2022$ střídavě 4 a 8, takže bude $2022 : 2 = 1011$ od každého z nich. Ciferný součet tohoto čísla tedy bude $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Příklad 31 ... Dobíjení baterií

Martin v čajovně píše vzorová řešení letošního Náboje Junior. K práci využívá notebook s kapacitou baterie 4000 mAh a smartphone s kapacitou baterie 3500 mAh. Zapomněl je ale nabít, takže teď jsou obě dvě zařízení nabitá na 20 % jejich kapacity. Martin má jen jednu nabíječku, která může nabíjet zařízení výstupním proudem 3,25 A. Martin také ví, že pokud bude používat plně nabitý notebook, vybije se za 10 hodin. Plně nabitý smartphone se také vybije za 10 hodin používání. Kolik nejméně hodin bude Martinovi trvat plné nabití obou zařízení, pokud bude průběžně stále používat obě k práci?

Výsledek: 2,4

Řešení: Kapacita baterie v mAh popisuje vztah mezi výstupním proudem baterie a časem, po který může baterie tento proud poskytovat. Například pokud je baterie s kapacitou 4000 mAh plně nabitá, může hodinu poskytovat elektrický proud 4000 mA, nebo čtyři hodiny proud 1000 mA apod.
Jelikož může Martin měnit, které zařízení se právě nabíjí, můžeme notebook a smartphone považovat za jedno zařízení s kapacitou $4000\,\mathrm{mAh} + 3500\,\mathrm{mAh} = 7500\,\mathrm{mAh}$. Na začátku byla obě zařízení nabitá na 20 % jejich kapacity, celkem tedy obsahovala náboj $0{,}2 \cdot 7500\,\mathrm{mAh} = 1500\,\mathrm{mAh}$. Obě zařízení se vybíjejí tak, že se vybijí po 10 hodinách. Každou hodinu se tedy vybijí o $7500\,\mathrm{mAh} : 10 = 750\,\mathrm{mAh}$.
Zároveň Martin nabíjí zařízení nabíječkou s výstupním proudem $3{,}25\,\mathrm{A} = 3250\,\mathrm{mA}$, za hodinu jim tak dodá náboj 3250 mAh. Náboj v bateriích se tedy každou hodinu zvýší o $3250\,\mathrm{mAh} - 750\,\mathrm{mAh} = 2500\,\mathrm{mAh}$. Martin musí náboj zvýšit o $7500\,\mathrm{mAh} - 1500\,\mathrm{mAh} = 6000\,\mathrm{mAh}$. Zařízení se tedy plně nabijí za

$$\frac{6000\,\mathrm{mAh}}{2500\,\mathrm{mAh/h}} = 2{,}4\,\mathrm{h}$$

.

Příklad 32 ... Koho baví stavět hrady z písku?

Tadeáš stavěl se svým malým bratrem na pláži hrady z písku. Po chvíli se ale začal nudit, a tak vzal kyblíček, který používal na stavění věží, a ponořil ho do vody. Kyblík je zanedbatelně lehký a má tvar válce s podstavou o ploše $400\,\mathrm{cm}^2$ a výškou $30\,\mathrm{cm}$. Tadeáš ponořil celý kyblíček tak, že jeho horní okraj byl $10\,\mathrm{cm}$ pod hladinou. Teď by rád plný kyblík pomalu z vody vytáhl tak, aby jeho spodní hrana byla přesně na hladině. Jakou práci v joulech musí Tadeáš vykonat na vytažení kyblíčku z vody?

Výsledek: 18

Řešení: Tadeáš bude muset na zvednutí kyblíčku vykonat práci, která odpovídá zvýšení potenciální energie vody. Kyblík je válec s podstavou $S = 400\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2$ a výškou $h = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, takže hmotnost vody v něm bude $m = \rho_{vody} Sh$. Těžiště vody je v polovině výšky válce, tedy $\frac{h}{2}$. Práce, kterou musí Tadeáš vykonat, je tedy stejná jako změna potenciální energie, tedy

$$W = mg\frac{h}{2} = \frac{\rho_{vody} Sgh^2}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot (0{,}3\,\mathrm{m})^2}{2} = 18\,\mathrm{J}.$$

Příklad 33 ... Nezačínej s tím Brunem

Bruno je výjimečný designér, takže je škoda, že o něm nemluvíme více. Nedávno pro svoji firmu nakreslil nové logo. Jde o velmi specifický šestiúhelník $ABCDEF$, kde $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 19\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 2\,\mathrm{cm}$, $|DE| = 14\,\mathrm{cm}$, $|EF| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|FA| = 9\,\mathrm{cm}$. Navíc jsou délky úhlopříček AC, CE a EA v centimetrech vyjádřeny celými čísly a úhlopříčky tvoří trojúhelník. Jaký je největší možný obvod trojúhelníku ACE v centimetrech?

Výsledek: 53

Řešení: Několikrát využijeme trojúhelníkovou nerovnost. Ta nám v trojúhelníku ABC říká, že je délka strany AC větší než $19\,\mathrm{cm} - 12\,\mathrm{cm} = 7\,\mathrm{cm}$, ale menší než $19\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 31\,\mathrm{cm}$. Tato délka musí být celé číslo, délka AC tedy může být jakékoliv celé číslo mezi $8\,\mathrm{cm}$ a $30\,\mathrm{cm}$. Ze stejného důvodu (ale v trojúhelnících CDE a EFA) musí být délka strany CE celé číslo mezi $13\,\mathrm{cm}$ a $15\,\mathrm{cm}$ a délka strany EA celé číslo mezi $6\,\mathrm{cm}$ a $12\,\mathrm{cm}$.
Chceme-li získat největší možný obvod ACE, musíme vybrat největší možné délky jeho stran. Trojúhelníková nerovnost však stále musí být zachována. Proto i když vybereme největší možnou délku stran CE a EA, můžeme vybrat délku AC pouze tak, aby byla menší než $15\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 27\,\mathrm{cm}$. Největšího možného obvodu trojúhelníku tedy dosáhneme, když $|AC| = 26\,\mathrm{cm}$, $|CE| = 15\,\mathrm{cm}$ a $|EA| = 12\,\mathrm{cm}$. V takovém případě je obvod trojúhelníku ACE $26\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 53\,\mathrm{cm}$.

Příklad 34 ... Radost z vynechání

Matěj si hraje s faktoriály. Faktoriál čísla je číslo, které získáme vynásobením všech přirozených čísel až po dané číslo. Například, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Matěj se podíval na součin $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$, který není druhou mocninou žádného celého čísla. Matěj zjistil, že kdyby vynechal člen $k!$, získal by druhou mocninu nějakého celého čísla. Navíc si všiml, že existuje pouze jedno k s touto vlastností. Zjistěte hodnotu k.

Výsledek: 1012

Řešení: Součin dvou druhých mocnin nějakých celých čísel je opět druhou mocninou nějakého celého čísla – vynásobíme-li a^2 s b^2, získáme $(ab)^2$. Pokusíme se toho využít pro zjednodušení úlohy.
Podívejme se na součin $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Seskupíme-li vždy dva po sobě jdoucí členy tímto způsobem $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ a faktoriál každého sudého čísla zapíšeme ve tvaru $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, můžeme zjednodušit celý součin do tvaru

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (2023!)^2).$$

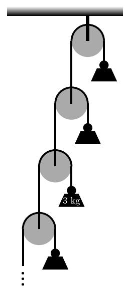
Druhá závorka je součin druhých mocnin celých čísel, je tedy také druhou mocninou celého čísla. Abychom i z celého součinu udělali druhou mocninu nějakého celého čísla, musíme z první závorky udělat druhou mocninu celého čísla. Je to součin sudých čísel, můžeme ji tedy zjednodušit vyjmutím dvojky z každého členu. Dostáváme tak

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) = 2^{1012}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Číslo 2^{1012} je druhou mocninou celého čísla (exponent je sudý), jedinou překážkou k tomu, aby byl celý součin druhou mocninou nějakého celého čísla, je proto člen 1012!. V zadání je povoleno vynechat jeden člen a naše úvaha nám říká, že bychom měli vynechat člen 1012!. Jelikož zadání tvrdí, že existuje jen jeden takový člen, můžeme říct, že hledáme číslo $k = 1012$.

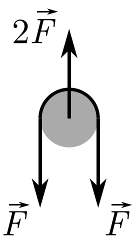
Příklad 35 ... Po kladkách až úplně dolů

Bořek stavitel sestavil nekonečný kladkostroj jako na obrázku. Hmotnosti závaží nejsou nutně stejné. Stroj je sestavený takovým způsobem, že je v klidovém stavu. Hmotnost třetího závaží je 3 kg. Jaká je celková hmotnost všech závaží v kilogramech?



Výsledek: 24

Řešení: Situace u každé kladky je jako na obrázku.



Síly F působící na lano jsou stejně velké, protože napětí je rovnoměrné po celé délce lana (samozřejmě je různé pro různá lana). Aby kladka zůstala nehybná, musí na ni také působit síla o velikosti $2F$ směrem nahoru.
I když to vypadá, že se musíme vypořádat s problémem nekonečného množství kladek, uvidíme, že to nebude vůbec problém. Jelikož jsou lana i kladky nehmotné, nalezneme součet všech hmotností s pomocí síly, kterou náš nekonečný kladkostroj působí na strop. Tím získáme součet gravitačních sil působících na všechna závaží, a tedy i jejich celkovou hmotnost.
Využijeme naše počáteční pozorování, abychom určili sílu působící na strop.
Podívejme se na třetí kladku. Víme, že zde je závaží s hmotností 3 kg, na kterou působí gravitační síla o velikosti $3\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 30\,\mathrm{N}$. Napětí v příslušném laně je tedy též 30 N, což znamená, že směrem vzhůru musí na kladku působit síla o velikosti $2 \cdot 30\,\mathrm{N} = 60\,\mathrm{N}$.
Nyní se můžeme podívat na druhou kladku. Síla o velkosti 60 N z předešlého odstavce vytváří v laně kolem druhé kladky stejné napětí, z čehož vyplývá, že na ni působí síla o velikosti $2 \cdot 60\,\mathrm{N} = 120\,\mathrm{N}$ směrem vzhůru. Obdobně na první kladku musí působit síla o velikosti $2 \cdot 120\,\mathrm{N} = 240\,\mathrm{N}$ směrem vzhůru. Toto je ale také síla, kterou celý kladkostroj působí na strop a kterou jsme chtěli určit.
Celkově tedy celý kladkostroj působí na strop silou 240 N, takže hmotnost všech závaží musí být $240\,\mathrm{N} : 10\,\mathrm{N/kg} = 24\,\mathrm{kg}$.

Příklad 36 ... Jak se cifry obrátily

Alice si ráda hraje s čísly. Vezme trojciferné číslo, obrátí pořadí jeho číslic a odečte toto číslo od původního. Například kdyby začala s číslem 123, získala by $123 - 321 = -198$. Jednou to ukázala Adamovi. Předvedla to na jeho oblíbeném čísle, které bylo také trojciferné. Pak vzala číslo o 31 menší než toto číslo, které bylo také trojciferné. Překvapivě jí vyšel stejný rozdíl jako s Adamovým oblíbeným číslem. Kolik trojciferných čísel může být Adamovým oblíbeným číslem?

Poznámka: Trojciferné číslo nemůže mít číslici nula na místě stovek, toto však neplatí pro číslo získané jeho obrácením. V takovém případě nuly na začátku ignorujeme.

Výsledek: 216

Řešení: Jako první se podívejme na Aliciny rozdíly. Trojciferné číslo můžeme zapsat ve tvaru $100A+10B+C$, kde A, B a C jsou jeho číslice. Po obrácení Alice získá číslo $100C + 10B + A$, takže jí vyjde rozdíl

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C).$$

Vidíme, že rozdíl, který Alice získá, záleží jen na rozdílu číslic na místě stovek a jednotek původního čísla. V úloze pracuje Alice s nějakým číslem, a pak s tímto číslem zmenšeným o 31. Vyšel jí stejný výsledek, takže tato čísla musí mít stejný rozdíl číslic na místě jednotek a stovek. Nyní musíme nalézt čísla s touto vlastností. Jsou dva případy, ke kterým může dojít na základě číslice na místě jednotek v Adamově oblíbeném čísle. Kdyby na místě jednotek byla 0, odečtení 31 by ho změnilo na 9. Tudíž by se číslice na místě stovek také musela zvýšit o 9, což zjevně není možné. To znamená, že Adamovo oblíbené číslo nemá 0 na místě jednotek, po odečtení 31 se tedy jednotky sníží o 1, a tak musí o 1 klesnout i číslice na místě stovek. K tomuto dochází, pouze když poslední dvě cifry čísla tvoří jedno z čísel 00, 01, …, 30.
Z této řady musíme vyřadit možnosti, kde je na místě jednotek 0, což nás nechává s 27 možnostmi. Jako poslední musíme určit možné číslice na místě stovek. Nemůže to být 1, protože po odečtení 31 bychom nezískali trojciferné číslo. Číslice 2, 3, …, 9 fungují.
Když vynásobíme počet možností pro číslici na místě stovek s počtem možností pro poslední dvojčíslí, získáme $8 \cdot 27 = 216$ možností pro Adamovo oblíbené číslo.

Příklad 37 ... Největší nuda na světě

Pepa se nudil tak moc, že si napsal všechna kladná čísla od 1 do 9 876 543 210 (včetně), což je jeho nejoblíbenější číslo. Také spočítal součet všech číslic těchto čísel a vyšla mu hodnota 443 255 601 330. Nyní chce udělat něco podobného. Prohodil všechny cifry 5 a 6 a spočítal ciferný součet v číslech, která získal tímto způsobem. Jaká je hodnota tohoto součtu?

Výsledek: 443 256 101 330

Řešení: Každá změna číslice 5 na 6 zvětší Pepův součet o 1. Podobně každá změna 6 na 5 ho o 1 sníží. To znamená, že každá změna 5 na 6 vyruší změnu 6 na 5. Tím pádem nás zajímá pouze rozdíl počtu cifer 5 a 6 v celých číslech od 1 do 9 876 543 210.
Všimněme si, že se na číslice 5 a 6 můžeme zaměřit podle řádů, ve kterých se vyskytují v čísle 9 876 543 210. Když je cifra 5 v jiném řádu, můžeme ji prohodit s cifrou 6 (obdobně můžeme prohazovat cifry 6 za cifry 5) a získáme tak číslo, které Pepa počítal. Nedostaneme tedy žádný rozdíl v počtu cifer 5 a 6.
Nyní se zaměříme na řády statisíců a milionů. Uvědomme si, že k nenulovému rozdílu dojde pouze ve chvíli, kdy je před těmito dvěma ciframi trojčíslí 987 (jinak můžeme postupovat jako v předchozím odstavci). S touto podmínkou se cifra 5 objevuje 1 000 000krát v řádu milionů a $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$krát v řádu stovek tisíců. Číslici 6 najdeme 543 211krát v řádu milionů a $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$krát v řádu statisíců. Počet cifer 5 je tedy o $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 500\,000$ větší než počet cifer 6.
Dostáváme tedy, že prohození číslic 5 a 6 zvýší ciferný součet výsledných čísel o 500 000, takže Pepa dostane výsledek

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330.$$

Příklad 38 ... Výskok z vody

Ferb je pevný homogenní hranol, jehož základny mají tvar pravidelného šestiúhelníku se stranami délky 0,9 m, s výškou 0,6 m s hustotou 125 kg/m^3. Právě je uvězněn pod hladinou velkého jezera tak, že jsou obě jeho základny rovnoběžně s hladinou vody a horní základna je přesně na úrovni hladiny. Když bude vypuštěn, vyskočí nad vodu. Kolik metrů nad hladinou se nejvýše ocitne jeho horní základna?

Poznámka: Uvažujte, že Ferbovy základny zůstanou vodorovné.

Výsledek: 2,4

Řešení: Nechť V je Ferbův objem, $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$ jeho výška a $\rho_{\mathrm{Ferb}} = 125\,\mathrm{kg/m^3}$ jeho hustota. Když vyskočí, zaplní se prostor, kde se původně nacházel, vodou. Tím jezero ztratí energii $E = V\rho_{\mathrm{voda}} g\frac{h}{2}$, protože hmotnost této vody bude $V\rho_{\mathrm{voda}}$ a její těžiště bude ležet v hloubce $\frac{h}{2}$ (jezero je tak veliké, že se úroveň hladiny nezmění). Chceme získat výšku H, které Ferb dosáhne. V nejvyšším bodě nemá žádnou kinetickou energii, poněvadž se energie, kterou získal z vody, přeměnila v potenciální energii $E = V\rho_{\mathrm{Ferb}} gH$. Porovnáme tedy oba výrazy, abychom získali H.

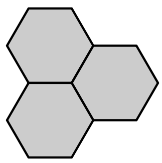
$$V\rho_{\mathrm{voda}} g\frac{h}{2} = V\rho_{\mathrm{Ferb}} gH,$$
$$H = \frac{\rho_{\mathrm{voda}}}{\rho_{\mathrm{Ferb}}}\cdot\frac{h}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{125\,\mathrm{kg/m^3}}\cdot\frac{0{,}6\,\mathrm{m}}{2} = 2{,}4\,\mathrm{m}.$$

Ferbova horní základna tedy dosáhne výšky 2,4 m.

Příklad 39 ... Vystřižené n-úhelníky

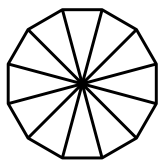
Viktor vzal papír a vystřihl z něj tři pravidelné rovnostranné mnohoúhelníky, přičemž žádné dva neměly stejný počet stran, ale všechny měli stejnou délku stran. Překvapivě se mu povedlo je dát na stůl tak, že všechny měly společný vrchol a každý pár sdílel jednu stranu. Tímto způsobem dostal Viktor nový (nepravidelný) n-úhelník. Jaké je největší možné n?

Poznámka: Kdybychom povolili více mnohoúhelníků se stejným počtem stran. Jeden z možných způsobů, jak získat takový n-úhelník, je na obrázku níže. Takto by Viktorovi vyšlo $n = 12$.



Výsledek: 46

Řešení: Každý pravidelný m-úhelník lze rozdělit na m shodných rovnoramenných trojúhelníků jako na obrázku.



Úhly naproti základnám se musí sečíst do 360°. Všechny ostatní úhly se podílí na součtu úhlů v m-úhelníku. Jelikož je součet úhlů v každém trojúhelníku roven 180°, musí být součet úhlů v m-úhelníku $m\cdot 180° - 360° = (m-2)\cdot 180°$. Každý úhel v rovnostranném m-úhelníku má stejnou velikost, tudíž velikost každého z nich je $\frac{m-2}{m}\cdot 180°$.

Chceme-li seskupit mnohoúhelníky podle zadání, musí být součet úhlů v jejich společném vrcholu roven 360°. Když označíme počty stran jednotlivých mnohoúhelníků jako x, y, a z a použijeme informace z předchozího odstavce, vyjde nám

$$\frac{x-2}{x}\cdot 180° + \frac{y-2}{y}\cdot 180° + \frac{z-2}{z}\cdot 180° = 360°.$$

Celou rovnici můžeme vydělit 180° a zjednodušit. Vyjde nám

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x}+\frac{y-2}{y}+\frac{z-2}{z}&=2,\\ \left(1-\frac{2}{x}\right)+\left(1-\frac{2}{y}\right)+\left(1-\frac{2}{z}\right)&=2,\\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}&=1,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Zkusme najít všechny trojice (x, y, z), pro které tato rovnice platí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat že $x > y > z$. Jestliže $z \geq 6$, pak $y \geq 7$ a $x \geq 8$. Ale pak

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Nemůžeme tedy mít $z \geq 6$, takže z je jedna z hodnot 3, 4 nebo 5. Každý případ řešíme odděleně.

Pro $z = 3$. Podmínka se v tomto případě upraví na $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$. Po vynásobení jmenovateli nám vyjde $6y+6x = xy$, což se dá přepsat (po přičtení 36 k oběma stranám) do tvaru $(x-6)(y-6) = 36$. Hodnoty obou závorek musí být kladné. Jelikož lze číslo 36 vyjádřit jako součin dvou kladných čísel těmito čtyřmi způsoby: $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, dostáváme čtyři řešení, kdy pár (x, y) je jedna ze dvojic $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$.

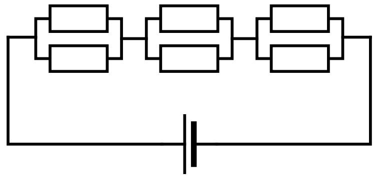
Pro $z = 4$. Postupujeme obdobně jako v předešlém případě. Máme $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, z čehož po vynásobení jmenovateli dostaneme $4y+4x = xy$. Po přičtení 16 a a rozkladu na součin nám vyjde $(x-4)(y-4) = 16$. Řešením (x, y) této rovnice budou dvojice $(20, 5)$ a $(12, 6)$.

Pro $z = 5$. Nakonec máme rovnici $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$, ze které úpravami dostaneme $10y + 10x = 3xy$. Pokud tuto rovnici vynásobíme 3 a přičteme 100, dostaneme rovnici $(3x-10)(3y-10) = 100$. Tímto se dopracujeme k řešením pro páry (x, y), která jsou $\left(\frac{110}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $(20, 4)$, $\left(\frac{35}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $(10, 5)$. O řešení ve tvaru zlomků nemáme zájem. Dále jsme obdrželi trojici $(20, 5, 4)$, která už se objevila v jednom z předešlých případů. Jediné nové řešení je $(x, y) = (10, 5)$, pro které ale neplatí podmínka $y > z$. Takže z tohoto případu nemáme žádná nová řešení.

Jediné trojice (x, y, z), pro které platí podmínka $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ nerovnosti $x > y > z$, jsou trojice $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$, a $(12, 6, 4)$.
Můžeme vidět, že po uložení mnohoúhelníků na stůl, bude mít každý mnohoúhelník na okraji všechny svoje strany kromě dvou, kterými se původní mnohoúhelníky dotýkají. Protože $n = (x-2)+(y-2)+(z-2) = (x+y+z)-6$, hledáme maximální hodnotu výrazu $x+y+z-6$. Pro nalezené trojice bude výraz $x+y+z-6$ nabývat hodnot 46, 30, 26, 22, 23 a 16. Největší možná hodnota n je tedy 46.

Příklad 40 . . . Odporný problém

Matěj postavil elektrický obvod jako na obrázku. Použil zdroj s elektrickým napětím 3 V a rezistory s odpory 2 Ω, 3 Ω, 4 Ω, 5 Ω, 6 Ω a 7 Ω. Zapomněl však přesná umístění rezistorů v obvodu. Ví jen to, že celým obvodem prochází elektrický proud $\frac{273}{580}$ A. Jaký elektrický proud v ampérech prochází rezistorem s odporem 5 Ω?



Výsledek: $\frac{39}{290}$

Řešení: Elektrický odpor R_0 dvou paralelně zapojených rezistorů s odpory R_1 a R_2 je dán vztahem

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

V obvodu jsou sériově zapojené tři takové paralelní dvojice, celkový odpor všech rezistorů je tedy dán součtem tří zlomků výše uvedeného tvaru. Celkový odpor R můžeme spočítat z elektrického napětí $U = 3\,\mathrm{V}$ zdroje a elektrického proudu $I = \frac{273}{580}\,\mathrm{A}$ procházejícího celým obvodem, tedy

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3\,\mathrm{V}}{\frac{273}{580}\,\mathrm{A}} = \frac{580}{91}\,\Omega.$$

Potřebujeme proto, aby platilo

$$\frac{580}{91}\,\Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

kde R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, a R_6 jsou $2\,\Omega$, $3\,\Omega$, $4\,\Omega$, $5\,\Omega$, $6\,\Omega$ a $7\,\Omega$ v nějakém pořadí. Podívejme se na tuto rovnost bez jednotek. Abychom ve jmenovateli dostali číslo 91, nejmenší společný násobek jmenovatelů $R_1 + R_2$, $R_3 + R_4$ a $R_5 + R_6$ musí být násobkem 91. Rozklad čísla 91 na prvočísla je $91 = 7 \cdot 13$. Alespoň jeden ze jmenovatelů tedy musí být dělitelný 13. Jelikož to musí být součet dvou čísel z množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, jediný způsob, jak ho dosáhnout, je sečíst $6 + 7$. To znamená, že jedna z dvojic paralelně zapojených rezistorů musí být dvojice $6\,\Omega$ a $7\,\Omega$. Ze stejného důvodu musí být v obvodu dvojice, u které je součet odporů jednotlivých rezistorů roven 7. Jediný možný způsob je vytvořit dvojici $2\,\Omega$ a $5\,\Omega$ a dvojici $3\,\Omega$ a $4\,\Omega$.

Zbývá spočítat elektrický proud procházející rezistorem s odporem $5\,\Omega$. Je ve dvojici s rezistorem s odporem $2\,\Omega$, odpor této dvojice je tedy

$$R_{25} = \frac{2\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{10}{7}\,\Omega.$$

Elektrický proud procházející celou touto částí je stále I, napětí na obou rezistorech v této dvojici je tedy

$$U_{25} = R_{25} I = \frac{10}{7}\,\Omega \cdot \frac{273}{580}\,\mathrm{A} = \frac{39}{58}\,\mathrm{V}.$$

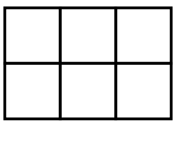
Nakonec spočítáme, že elektrický proud I' procházející rezistorem s odporem $R' = 5\,\Omega$ je

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\,\mathrm{V}}{5\,\Omega} = \frac{39}{290}\,\mathrm{A}.$$

Příklad 41 ... Všude samé obdélníky

Martin nakreslil tabulku $m \times n$ rozdělenou na mn jednotkových čtverců. Spočítal, že hranice těchto čtverců v ní tvoří 141 400 obdélníků. Kolik jednotkových čtverců je v tabulce?

Poznámka: Každý čtverec považujeme za obdélník. Kupříkladu v tabulce 2×3 níže je 18 obdélníků.



Výsledek: 700

Řešení: Chceme spočítat počet obdélníků v tabulce s m řádky a n sloupci. Podívejme se na svislé linky směřující shora dolů (celkem jich je $n + 1$) a na vodorovné linky jdoucí zleva doprava (těch je celkem $m + 1$).

Všimněme si, že každé dvě svislé a dvě vodorovné linky přesně definují právě jeden obdélník. To funguje i obráceně, každý obdélník přesně určuje dvě horizontální linky a dvě vertikální – ty, které získáme protažením jeho stran. Tím pádem je počet obdélníků a počet čtveřic dvou vertikálních a dvou horizontálních linií v poměru jedna ku jedné.
Stačí nám tedy spočítat počet těchto čtveřic. Pro první svislou linku máme $n+1$ možností a pro druhou zbylých n možností. Tímto postupem ale dostaneme každou dvojici dvakrát, jelikož nám nezáleží na jejich pořadí. Svislé linie můžeme tedy vybrat $\frac{(n+1)n}{2}$ způsoby. Obdobně přijdeme na to, že vodorovné linky můžeme vybrat $\frac{(m+1)m}{2}$ způsoby. Celkový počet hledaných čtveřic je tedy $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$. Nyní hledáme čísla m a n taková, aby platily následující rovnosti.

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400,$$
$$(m+1)m(n+1)n = 565\,600$$

Všimněme si, že číslo $565\,600$ je dělitelné 101 (protože $565\,600 = 5600 \cdot 101$). Číslo 101 je prvočíslo, tudíž musí dělit jeden z činitelů na levé straně. Jedna možnost, inspirovaná faktem, že $565\,600$ je také dělitelné 100, je položit m nebo n rovno 100. Nechť je to m. Zbytek rovnice bude $(n+1)n = 56$, z čehož získáme $n = 7$. Můžeme rychle ručně ověřit, že žádné jiné násobky 101 (pro 808 a větší čísla máme součin větší než $565\,600$, protože je určitě větší než $800 \cdot 800 = 640\,000$) jakožto jeden z činitelů nevedou k jinému výsledku. To znamená, že Martin musel nakreslit tabulku 100×7 (7×100), která sestává z $100 \cdot 7 = 700$ jednotkových čtverců.

Příklad 42 . . . Ostroúhlé družice

Tři družice oblétají Zemi. Jejich trajektorie jsou kružnice se středem ve středu Země a skoro stejnými poloměry. Navíc všechny tři trajektorie leží ve stejné rovině. Družice mají motory, které jim umožňují udržovat stále stejnou úhlovou rychlost. První družice oběhne kolem Země za 90 minut, druhá za 30 minut a třetí za 15 minut a všechny obíhají proti směru hodinových ručiček. Těsně po vypuštění byly všechny tři satelity téměř v tom samém místě. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodný okamžik tvoří družice ostroúhlý trojúhelník?

Výsledek: $\frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%$

Řešení: První družice oběhne kolem Země jednou za 90 minut, tedy urazí $\frac{360°}{90} = 4°$ každou minutu. Podobně druhá družice urazí $\frac{360°}{30} = 12°$ každou minutu a třetí družice urazí $\frac{360°}{15} = 24°$ každou minutu.
Místo sledování pohybu tří družic se můžeme na situaci podívat ze vztažné soustavy spojené s jednou z družic. Hlavní výhoda tohoto přístupu je, že v této soustavě můžeme jednu z družic považovat za nehybnou. Například si řekneme, že první družice je nehybná. V soustavě spojené s touto družicí druhá družice urazí $12° - 4° = 8°$ za minutu a třetí družice urazí $24° - 4° = 20°$ za minutu.
Nyní se můžeme podívat na podmínku ostroúhlosti. Družice jsou na stejné kružnici, takže ve chvíli, kdy libovolné dvě z nich vytvoří nějaký průměr této kružnice, říká nám Thaletova věta, že družice tvoří pravoúhlý trojúhelník. Tato situace je tedy jakousi hranicí mezi ostroúhlým a tupoúhlým trojúhelníkem.

- pokud existuje takový průměr kružnice, že všechny tři družice leží na jedné straně od tohoto průměru, tvoří družice tupoúhlý trojúhelník,
- pokud neexistuje žádný takový průměr, jaký byl popsaný v předešlém bodě, tvoří družice ostroúhlý trojúhelník.

Ostroúhlý trojúhelník se může změnit na tupoúhlý nebo naopak pouze tehdy, když dvě družice leží na jednom průměru nebo když se dvě družice nachází ve stejném bodě. Pro dvojici první a druhé družice se toto stane jednou za $\frac{180°}{8°} = 22{,}5$ minut, pro dvojici první a třetí družice toto nastane jednou za $\frac{180°}{20°} = 9$ minut a nakonec pro dvojici druhé a třetí družice tato situace nastane jednou za $\frac{180°}{20°-8°} = 15$ minut. V časech, které jsou násobky těchto hodnot tedy můžou nastat změny.

- Od minuty 0 do minuty 9 (kdy první a třetí družice tvoří průměr) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.

- Od minuty 9 do minuty 15 (kdy druhá a třetí družice tvoří průměr) – družice tvoří ostroúhlý trojúhelník.
- Od minuty 15 do minuty 18 (kdy jsou první a třetí družice na stejném místě) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.
- Od minuty 18 do minuty 22,5 (kdy první a druhá družice tvoří průměr) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.
- Od minuty 22,5 do minuty 27 (kdy první a třetí družice tvoří průměr) – družice tvoří ostroúhlý trojúhelník.
- Od minuty 27 do minuty 30 (kdy jsou druhá a třetí družice na stejném místě) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.
- Od minuty 30 do minuty 36 (kdy jsou první a třetí družice na stejném místě) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.
- Od minuty 36 do minuty 45 (kdy jsou první a druhá družice na stejném místě a zároveň tvoří průměr se třetí družicí) – družice tvoří tupoúhlý trojúhelník.

Díky rozmístění družic v minutě 45 můžeme říct, že mezi minutami 45 a 90 se budou opakovat výše popsané kroky, jen v opačném pořadí. To je díky tomu, že kdybychom se na pohyb podívali zrcadlově obráceně s osou v průměru tvořeném družicemi v čase 45 minut, viděli bychom pohyb pozpátku od minuty 45 do minuty 0. V principu se tedy v druhé půlce nestane nic nového, a tak můžeme vypočítat pravděpodobnosti konfigurací družic z rozepsané situace mezi minutami 0 a 45. Během těchto 45 minut tvořili družice ostroúhlý trojúhelník mezi minutami 9 a 15 a mezi minutami 22,5 a 27, což je dohromady celkem $(15-9)+(27-22{,}5)=10{,}5$ minut. Pravděpodobnost, že družice tvoří ostroúhlý trojúhelník, je tedy

$$\frac{10{,}5}{45}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}\doteq 23{,}3\,\%.$$

Poděkování

Odborný garant soutěže

Marián Poturnay

Návrhy úloh

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Zadání a řešení úloh

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Korektury

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dlugošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Překlady

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskyi, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisaj, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinátoři

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Organizační místa

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkola Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkera • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu