

Lösungen

12. Náboj Junior

22. November 2024



Ihr Lieben,

in euren Händen haltet ihr Aufgaben und Lösungen des 12. Náboj Junior — ein internationaler Team-Wettbewerb, der 2024 erstmals im deutschsprachigen Raum stattgefunden hat, und zwar bei uns in Wien!

Die Durchführung des Wettbewerbs wurde durch die Mit- und Zusammenarbeit vieler Institute und Personen ermöglicht, denen ich herzlich danken möchte: Fakultät für Mathematik, Fakultät für Physik und Erwin Schrödinger Institut der Universität Wien; Robin Gludovatz und Dmytro Rzhemovskyi für die lokale Organisation; Nicole Pawellek für den Festvortrag; Iryna Karpenko für die Fotografie; Walter Hametner, Norbert Schuch, Julius Stolz und Anton Zand für die Übersetzung der Aufgaben; Iryna Hontsovska, Oleksandr Karpenko, Mariia Mykhalova, Pavlo Shekhet, Yelyzaveta Shevnina, Zhanna Tokarieva und Karyna Turuta für die Mitarbeit an den beiden Austragungsstandorten; den internationalen Organisator:innen Terézia Gurová (Slowakei), Justyna Jaworska (Polen), Tomáš Miškov (Belgien und Niederlande), Azucena Molina-Solís (Spanien), Kateřina Rosická (Tschechien) und Matej Vojvodić (Kroatien)

Náboj Junior fand vor Ort in 60 Städten in der Slowakei, der Tschechischen Republik, Österreich und Polen statt. Gleichzeitig wurde der Wettbewerb in einer Online-Version in Spanien, den Niederlanden, Belgien und Kroatien ausgetragen.

Die Ergebnisse der internationalen Wertung findet ihr auf der Website des Wettbewerbs.

Im Namen des gesamten Teams hoffe ich, dass euch die Teilnahme am Náboj Junior Freude bereitet hat und wir euch nächstes Jahr bei einem Team-Wettbewerb im Projekt Mathematik macht Freude wiedersehen!

Herzliche Grüße

Univ.-Prof. Michael Eichmair, PhD
Organisator NÁBOJ Junior in Österreich

Aufgabe 1 ... Geheimes Tagebuch

Patrick hat sein geheimes Tagebuch ausgeschrieben. Er möchte das Tagebuch in einer Box einschließen, damit es niemand lesen kann. Dafür möchte Patrick ein Schloss benutzen, das er vor ein paar Jahren gekauft hat. Leider hat er den 3-stelligen Zifferncode vergessen, mit dem das Schloss geöffnet werden kann. Patrick kann alle 3 Sekunden einen neuen Code ausprobieren. Wie viele Minuten wird Patrick brauchen, bis er alle möglichen Codes für das Schloss ausprobiert hat?

Ergebnis: 50

Lösung: Zunächst berechnen wir die Anzahl aller möglichen 3-stelligen Zifferncodes. Das sind alle Kombinationen von 000 bis 999, also insgesamt $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Kombinationen. Es dauert 3 Sekunden, eine davon auszuprobieren. Also wird es $3 \cdot 1000 = 3000$ Sekunden dauern, bis Patrick alle 1000 möglichen Codes ausprobiert hat. Das ergibt $\frac{3000}{60} = 50$ Minuten.

Aufgabe 2 ... Bodenreparatur

Anna erneuert den Fußboden ihrer Wohnung. Sie hat dafür Planken aus Eichenholz gekauft, die eine Dichte von 600 kg/m^3 haben. Anna hat die Planken abgemessen und festgestellt, dass eine Planke 0,8 m lang, 12,5 cm breit und 15 mm dick ist. Wie schwer ist eine Planke in Gramm?

Ergebnis: 900

Lösung: Zunächst wandeln wir alle Maßeinheiten in Basiseinheiten um. Wir wissen, dass 12,5 cm gleich 0,125 m ist, 15 mm gleich 0,015 m und 15 mm gleich 0,015 m. Nun können wir das Volumen einer Planke berechnen, indem wir die Maßzahlen multiplizieren. Das ergibt ein Volumen von $0,8 \text{ m} \cdot 0,125 \text{ m} \cdot 0,015 \text{ m} = 0,0015 \text{ m}^3$. Um das Gewicht einer Planke zu ermitteln, multiplizieren wir das Volumen der Planke mit der Dichte des Holzes. Das ergibt eine Masse von $0,0015 \text{ m}^3 \cdot 600 \text{ kg/m}^3 = 0,9 \text{ kg}$. Unsere Antwort sollte das Gewicht in Gramm sein. Die Antwort ist also $0,9 \text{ kg} = 900 \text{ g}$.

Aufgabe 3 ... Zaubertrick Nr. 1

Paul möchte einen Zaubertrick mit seinem Kartenspiel aus 6 Karten vorführen. Die Karten sind mit 1, 2, 3, 4, 5 beziehungsweise mit 6 beschriftet. Der Trick beginnt damit, dass die 6 Karten in einer Reihe auf den Tisch gelegt werden. Damit der Trick funktioniert, muss jedes benachbarte Kartenpaar einen Unterschied von mehr als 2 haben. Wie viele verschiedene Anordnungen kann Paul wählen, um diese Bedingung zu erfüllen?

Ergebnis: 2

Lösung: Für die Karten 3 und 4 gibt es jeweils nur eine andere Karte, deren Zahl sich um mehr als 2 unterscheidet. Für 3 ist es 6 und für 4 ist es 1. Das heißt, dass die Karten 3 und 4 nur am Anfang oder der Ende der Reihe liegen können. Die möglichen Anordnungen müssen also wie folgt aussehen:

3					4
4					3

Außerdem wissen wir, welche Zahlen neben 3 und 4 liegen können. Das ergibt die folgenden Möglichkeiten:

3	6			1	4
4	1			6	3

Es bleiben nur noch die Zahlen 2 und 5 übrig. In beiden Anordnungen gibt es nur eine Möglichkeit, sie richtig zu platzieren. Es gibt also genau zwei Reihen, nämlich 3, 6, 2, 5, 1, 4 und 4, 1, 5, 2, 6, 3, für die der Zaubertrick funktioniert. Die Antwort ist also 2.

3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3

Aufgabe 4 ... Cardio zwischen Birken

Daniela und Janina laufen entlang einer Birkenallee, an der 10 Birken gepflanzt sind. Die Abstände zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Birken entlang der Allee sind immer gleich.

Daniela startet bei der 1. Birke und macht Folgendes: Sie läuft zur zweiten Birke und zurück ersten, dann zur dritten Birke und wieder zurück zur ersten, dann zur vierten und so weiter, bis sie schließlich zur zehnten Birke und dann wieder zurück läuft.

Janina läuft in die entgegengesetzte Richtung: Sie startet bei der zehnten Birke, läuft dann zur neunten Birke und zurück zur zehnten, dann zur achten Birke und wieder zurück zur zehnten und so weiter, bis sie schließlich zur ersten Birke und wieder zurück zur zehnten läuft. Beide Mädchen laufen mit derselben Geschwindigkeit und starten zur gleichen Zeit. Wie oft werden sie sich während dieses Laufs treffen?

Ergebnis: 10

Lösung: Da sie mit derselben Geschwindigkeit laufen, wird Daniela genauso lange brauchen, um zur zweiten Birke zu laufen, wie Janina zur neunten Birke. Das gilt auch für alle weiteren Birken – sie werden gleichzeitig an der dritten und der achten Birke sein, dann gleichzeitig an der vierten und der siebten Birke und so weiter. Sobald Daniela zu einer Birke mit einer höheren Nummer läuft als Janina, treffen sie sich zum ersten Mal. Das passiert, wenn Daniela auf dem Weg zur sechsten Birke und Janina auf dem Weg zur fünften Birke ist. Dann treffen sie sich das erste Mal und dann gleich das zweite Mal auf dem Rückweg von diesen Birken. Von diesem Zeitpunkt an wird Daniela immer zu einer Birke mit einer höheren Nummer laufen als Janina. Sie treffen sich dabei genau zweimal: einmal auf dem Hinweg und einmal auf dem Rückweg. Es gibt fünf solcher Birken (für Daniela die sechste bis zehnte Birke, für Janina die fünfte bis erste). Insgesamt treffen sie sich also $5 \cdot 2 = 10$ -mal.

Aufgabe 5 ... Leidenschaftlicher Rennfahrer

Samuel ist ein leidenschaftlicher Rennfahrer. Weil sein Rennwagen die Nummer 181 trägt, jubelt er jedes Mal, wenn das Auto eine Kilometerzahl anzeigt, die ein Vielfaches von 181 ist. Heute hat Samuel angefangen zu fahren, als das Auto 32 768 Kilometer angezeigt hat, was um 7 Kilometer größer ist als das vorherige Vielfache von 181 (nämlich 32 761). Samuel möchte so fahren, dass das nächste Mal, wenn das Auto eine Kilometerzahl anzeigt, die ein Vielfaches von 181 ist, genau in 2 Stunden passiert. Wie schnell muss Samuel im Durchschnitt in Kilometern pro Stunde fahren, damit ihm das gelingt?

Ergebnis: 87

Lösung: Der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 181 beträgt genau 181. Es wird angegeben, dass das vorherige Vielfache von 181 zu Beginn 7 Kilometer zurückliegt. Das nächste Vielfache von 181 wird also in $181 - 7 = 174$ Kilometern erreicht. Samuel möchte diese Strecke in genau 2 Stunden zurücklegen. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit muss also $v = \frac{174 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 87$ Kilometer pro Stunde betragen.

Aufgabe 6 ... Meta-Lügner

Irfan hat eine Lieblingszahl. Es folgen sechs Aussagen über seine Lieblingszahl, denen er Nummern zugeordnet hat. Drei der Aussagen sind wahr und drei sind falsch.

1. Es ist eine zusammengesetzte Zahl.
2. Es ist eine ungerade Zahl.
4. Sie ist kleiner als 30.

- 8. Es ist eine einstellige Zahl.
- 16. Die Einerstelle ist 9.
- 32. Sie ist durch 5 teilbar.

Irfan verrät außerdem, dass seine Lieblingszahl die Summe der Nummern der drei wahren Aussagen ist. Was ist Irfans Lieblingszahl?

Ergebnis: 35

Lösung: Denken wir über die erste Aussage nach. Angenommen, sie wäre falsch. Das würde bedeuten, dass Irfans Lieblingszahl entweder 1 ist oder eine Primzahl. Die Summe von drei positiven ganzen Zahlen ist aber niemals 1. Deshalb müsste die Lieblingszahl eine Primzahl sein. Allerdings wäre die Zahl auch die Summe von drei der Zahlen 2, 4, 8, 16 und 32. Weil diese Zahlen alle gerade sind, wäre dann auch Irfans Lieblingszahl eine gerade Zahl. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Das kommt aber nicht infrage, weil die Summe der drei Zahlen sicher größer als 2 ist. Das bedeutet, dass die erste Aussage wahr ist.

Die erste Aussage ist die einzige, deren Nummer ungerade ist. Deshalb ist die Summe der wahren Aussagen ebenfalls ungerade. Die zweite Aussage muss also wahr sein. Jetzt müssen wir noch die dritte wahre Aussagen finden. Denken wir über die Aussage mit der Nummer 4 nach. Wäre sie wahr, dann müsste Irfans Lieblingszahl $1 + 2 + 4 = 7$ sein. In diesem Fall wäre jedoch auch die Aussage mit der Nummer 8 wahr, sodass wir vier wahre Aussagen hätten. Das ist aber unmöglich. Deshalb muss die Aussage mit der Nummer 4 falsch sein. Deshalb muss Irfans Lieblingszahl mindestens 30 betragen. Die einzige Möglichkeit, dies zu erfüllen, besteht darin, anzunehmen, dass die Aussage mit der Nummer 32 wahr ist. Damit ist Irfans Lieblingszahl $1 + 2 + 32 = 35$. Es ist leicht zu überprüfen, dass bei der Zahl 35 die wahren Aussagen genau die mit den Nummern 1, 2 und 32 sind. Daher ist 35 tatsächlich Irfans Lieblingszahl.

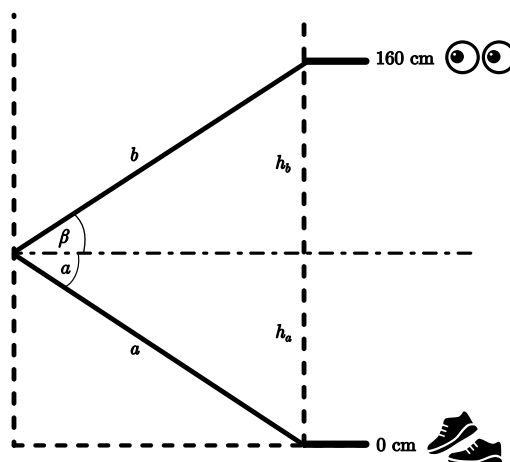
Aufgabe 7 ... Stilvolles Problem

Michael ist sehr stilbewusst. Beim Anprobieren seiner Outfits ist es ihm sehr wichtig, seine Schuhe im Spiegel sehen zu können. Er hat einen neuen rechteckigen Spiegel gekauft und möchte diesen nun an die Wand hängen, sodass er seine Füße darin sehen kann, wenn er 120 cm vom Spiegel entfernt steht. Seine Augen befinden sich 160 cm über dem Boden. Gehe davon aus, dass sich seine Schuhe in einer Höhe von 0 cm befinden. Was ist die maximale Höhe in Zentimetern über dem Boden, in der die untere Kante des Spiegels angebracht werden kann?

Anmerkung: Nimm an, dass der Spiegel keinen Rahmen hat.

Ergebnis: 80

Lösung: Damit Michael seine Füße sehen kann, muss es einen Lichtstrahl geben, der von seinen Schuhen zum Spiegel gelangt und nach der Reflexion auf Augenhöhe, also bei 160 cm, in seine Augen trifft. Da sowohl seine Augen als auch seine Füße den gleichen horizontalen Abstand zum Spiegel haben und der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist, können wir folgende Grafik erstellen:



Da die Winkel α und β identisch sind, sind auch die Strecken a und b gleich lang, und noch wichtiger: Die Höhenunterschiede h_a und h_b des Lichtstrahls sind ebenfalls gleich. Die Reflexion findet also genau in der Mitte zwischen Michaels Füßen und Augen statt. Da seine Augen sich in einer Höhe von 160 cm befinden, findet die Reflexion in einer Höhe von $\frac{160 \text{ cm}}{2} = 80 \text{ cm}$ statt.

Daher liegt die maximale Höhe der unteren Kante des Spiegels bei 80 Zentimetern über dem Boden. Wäre die Kante höher angebracht, könnte der Lichtstrahl nicht in diesem Winkel reflektieren und Michael könnte seine Schuhe nicht im Spiegel sehen.

Aufgabe 8 ... Zaubertrick Nr. 2

Paul führt erneut einen Zaubertrick mit sechs Karten durch, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet sind. Dieses Mal hat er auch eine 2×3 -Tabelle vorbereitet, in die diese Karten perfekt passen. Damit der Trick funktioniert, müssen die Karten so in der Tabelle angeordnet werden, dass die Zahlen in jeder Zeile (von links nach rechts) und in jeder Spalte (von oben nach unten) aufsteigend sind. Eine solche Anordnung ist in der Abbildung zu sehen.

Auf wie viele verschiedene Arten kann Paul die Karten anordnen, um die Bedingung zu erfüllen?

1	2	5
3	4	6

Ergebnis: 5

Lösung: Betrachten wir zunächst die Zahl im Quadrat oben links. Jede Zahl in dieser Tabelle kann von hier aus durch Bewegen nach unten oder nach rechts erreicht werden. Daher müssen alle Zahlen in der Tabelle größer als diese Zahl sein, was zwingt, dass die Zahl im Quadrat oben links eine 1 sein muss. Ebenso muss die Zahl 6 im Quadrat unten rechts stehen.

1		
		6

Als Nächstes sehen wir uns an, wo die Zahl 2 platziert werden kann. Sie muss in einem der beiden angrenzenden Quadrate zur Zahl 1 sein (ansonsten gäbe es ein Quadrat mit einer Zahl zwischen 1 und 2, was unmöglich ist). Somit gibt es nur zwei Möglichkeiten für die Position der Zahl 2:

Fall 1. Die Zahl 2 befindet sich rechts von der Zahl 1. In diesem Fall haben wir drei Möglichkeiten für die Zahl rechts von der Zahl 2 (es kann die 3, 4 oder 5 sein). Für jede Auswahl dieser Position können die verbleibenden Felder auf nur eine Weise ausgefüllt werden.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

Fall 2. Die Zahl 2 befindet sich unter der Zahl 1. Auch hier haben wir wieder drei Möglichkeiten für das Quadrat rechts vom Quadrat mit der Zahl 2. Die verbleibenden Felder können eindeutig gefüllt werden, jedoch ergibt sich nicht in jedem Fall eine gültige Lösung (wenn die Zahl 3 rechts von der Zahl 2 steht, ist die Lösung ungültig, da die zweite Spalte in der oberen Zeile eine größere Zahl als in der unteren hätte).

1	4	5
2	3	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

Es bleibt, die Möglichkeiten beider Fälle zu summieren, also haben wir $3 + 2 = 5$ Möglichkeiten, die Karten gültig in der Tabelle anzuordnen.

Aufgabe 9 ... Fleckenfreie Satelliten

Die NASA hat zwei Satelliten gestartet, Anton und Berta. Aus praktischen Gründen wurden beide direkt über Greenwich gestartet. Sie wurden genau zum gleichen Zeitpunkt gestartet, jedoch in unterschiedlichen Höhen. Das führt dazu, dass, obwohl beide Satelliten einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde folgen, ihre Winkelgeschwindigkeiten unterschiedlich sind. Anton bewegt sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 90° pro Stunde, während Berta mit einer Winkelgeschwindigkeit von 120° pro Stunde unterwegs ist. Nach wie vielen Stunden nach dem Start werden Anton und Berta wieder über demselben Punkt auf der Erde (möglicherweise einem anderen als Greenwich) sein?

Ergebnis: 12

Lösung: Jede Stunde legt Berta $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ mehr zurück als Anton. Das geht jede Stunde so, bis Berta genau 360° mehr zurückgelegt hat als Anton. In diesem Moment hat Berta einen ganzen Kreis mehr zurückgelegt als Anton. Sie befinden sich dann zum ersten Mal wieder genau übereinander. Das geschieht nach genau $\frac{360}{30} = 12$ Stunden.

Aufgabe 10 ... Die Weststraße

Jeder im Wilden Westen liebt die Weststraße, weil sie vollkommen gerade verläuft, ohne Kurven. Ein Junge namens Billy geht diese Straße entlang und macht eine interessante Beobachtung: Wenn er zurückblickt, sieht er, dass die Sonne direkt über der hinter ihm liegenden Straße steht. Wieder nach vorne schauend, sieht er, dass die Straße abrupt endet und zwei Objekte vor ihm stehen, eins neben dem anderen. Da steht ein schmaler Baum mit einer Höhe von 3 m und direkt daneben eine Anzeigetafel mit einer Höhe von 2,4 m und einer Breite von 5 m. Die untere Seite der Anzeigetafel liegt auf dem Boden auf. Billy misst, dass die Länge des Schattens des Baumes 75 cm beträgt. Wie groß ist die Fläche des Schattens, den die Anzeigetafel wirft, in Quadratmetern?

Ergebnis: 3

Lösung: Da die Anzeigetafel direkt zur Sonne ausgerichtet ist, bleibt die Breite ihres Schattens dieselbe wie die ursprüngliche Breite, also 5 m. Die Länge des Schattens ändert sich jedoch. Wir wissen, dass die Höhe des Baumes direkt daneben von 3 m auf 0,75 m verkürzt wird. Das Verhältnis zwischen der Höhe des Baumes und der Länge seines Schattens beträgt $\frac{3}{0,75} = \frac{4}{1}$. Dieses Verhältnis gilt auch für die Anzeigetafel, sodass die Länge ihres Schattens $\frac{2,4 \text{ m}}{4} = 0,6 \text{ m}$ beträgt. Die gesamte Fläche des Schattens ist die Länge mal die Breite, also $0,6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$.

Aufgabe 11 ... Globale Erwärmung

John stellt fest: „Es ist so heiß im Ofen, dass es, wenn ich in den USA wäre, doppelt so heiß wäre.“ Er meint damit, dass die Temperatur im Ofen, gemessen in Fahrenheit, doppelt so hoch ist wie die Temperatur in Celsius. Wie hoch ist die Temperatur im Ofen in Grad Celsius?

Anmerkung: Wenn die Temperatur in Grad Celsius $N^\circ\text{C}$ beträgt, dann lautet die Temperatur in Grad Fahrenheit:

$$\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}.$$

Ergebnis: 160

Lösung: Nennen wir die Temperatur in Grad Celsius $N^\circ\text{C}$. Wir wissen, dass die äquivalente Temperatur in Fahrenheit wie folgt berechnet wird: $\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}$. Wir wissen auch, dass diese Temperatur doppelt

so hoch wie die Celsius-Temperatur sein soll, also $2N^\circ\text{F}$. Daher können wir die Gleichung aufstellen: $((\frac{9}{5} \cdot N) + 32) = 2N$. Wir formen die Gleichung um:

$$2N - \frac{9}{5} \cdot N = 32.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} \cdot N &= 32, \\ N &= 160.\end{aligned}$$

Die Temperatur im Ofen beträgt also 160°C .

Aufgabe 12 ... Langsame Anfänge

Zu seinem sechzehnten Geburtstag hat Michael ein Buch geschenkt bekommen. Es ist schon eine Weile her, dass er zuletzt ein Buch gelesen hat. Er rechnet damit, dass es eine Weile dauern wird, bis er sich in das Buch vertieft hat. Deshalb hat Michael sich einen speziellen Plan zurechtgelegt, um das Buch auszulesen: Am ersten Tag wird er eine Seite lesen, und dann jeden Tag eine Seite mehr als am Tag davor. Das Buch hat 2024 Seiten. Wie viele Tage wird es dauern, bis Michael das ganze Buch gelesen hat?

Ergebnis: 64

Lösung: Nach einem Tag wird Michael 1 Seite gelesen haben, nach zwei Tagen $1 + 2$ Seiten, nach drei Tagen $1 + 2 + 3$ Seiten und so weiter. Nach n Tagen wird er also $1 + 2 + \dots + n$ Seiten gelesen haben. Mithilfe einer Formel auf dem Spickzettel können wir diese Summe als $\frac{n(n+1)}{2}$ schreiben. Die Frage ist, was die kleinste Zahl n ist, sodass $\frac{n(n+1)}{2}$ mindestens 2024 beträgt. Wir müssen also eine Ungleichung lösen:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} &\geq 2024, \\ n(n+1) &\geq 4048.\end{aligned}$$

Wir können abschätzen, dass für $n = 60$ das Produkt $n(n+1)$ ungefähr 3600 ist, also wird das gesuchte n nur wenig größer sein. Tatsächlich finden wir, dass $63 \cdot 64 = 4032 \leq 4048$ und $64 \cdot 65 = 4160 \geq 4048$. Daher wird Michael 64 Tage brauchen, um das Buch auszulesen.

Aufgabe 13 ... Überall Palindrome

Adam mag Palindrome so sehr, dass er angefangen hat, nach Palindromen zu suchen, die als Summe anderer Palindrome entstehen. Für heute hat Adam sich vorgenommen, das größte Palindrom zu finden, das als Summe von drei nicht notwendig unterschiedlichen 2-stelligen Palindromen entsteht. Nach welcher Zahl sucht Adam?

Anmerkung: Ein Palindrom ist eine Zahl, die sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links gleich gelesen wird. Die Zahl 12321 ist zum Beispiel ein 5-stelliges Palindrom.

Ergebnis: 242

Lösung: Betrachten wir zuerst die 2-stelligen Palindrome. Da solche Zahlen sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links gleich gelesen werden, müssen diese Zahlen aus zwei gleichen Ziffern bestehen. Die 2-stelligen Palindrome sind also die Zahlen 11, 22, 33, ..., 99. Es fällt auf, dass alle diese Zahlen durch 11 teilbar sind. Deshalb ist auch jede Zahl, die eine Summe von 2-stelligen Palindromen ist, durch 11 teilbar. Die größte Zahl, die eine Summe von drei 2-stelligen Palindromen ist, lautet $99 + 99 + 99 = 297$. Wir suchen also nach einem durch 11 teilbaren Palindrom, das kleiner als 297 ist. Die ersten Palindrome, die wir prüfen müssen, lauten 292, 282, 272 und so weiter. Die erste solche Zahl, die durch 11 teilbar ist, lautet 242. Jetzt

müssen wir noch prüfen, ob es auch wirklich drei 2-stellige Palindrome gibt, die zusammen 242 ergeben. Die sind schnell gefunden: Es gilt $77 + 77 + 88 = 242$.

Aufgabe 14 ... Das Croissant Dilemma

Lucy liebt es, zum Frühstück Croissants zu essen. Als echte Feinschmeckerin möchte sie aus der Vielfalt an Croissants die qualitativ hochwertigste Sorte auswählen. Sie hat beschlossen, dass die Qualität eines Croissants am besten durch seine durchschnittliche Dichte gemessen wird. Daher führt sie gerade ein Experiment durch, um die durchschnittliche Dichte jeder Croissant-Sorte zu bestimmen. Im Moment experimentiert sie mit einem Schokoladen-Croissant. Sie hat festgestellt, dass das Volumen des gesamten Croissants 100 ml beträgt. Davon sind 15 ml Schokoladenfüllung. Die Dichte dieser Füllung beträgt 1200 kg/m^3 und die Dichte des Croissant-Teigs 800 kg/m^3 . Wie groß ist die durchschnittliche Dichte dieses Schokoladen-Croissants in kg/m^3 ?

Ergebnis: 860

Lösung: Die durchschnittliche Dichte eines Objekts lässt sich berechnen, indem man seine Gesamtmasse durch sein Gesamtvolumen teilt. Wir wissen, dass das Gesamtvolumen $100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3$ beträgt, also müssen wir nur die Gesamtmasse finden. Diese lässt sich als die Summe der Masse der Füllung und der Masse des Teigs berechnen. Für die Massen verwenden wir die Formel $m = \rho \cdot V$, wobei ρ für die Dichte und V für das Volumen steht. Dabei müssen wir insbesondere auf die Einheiten achten. Wir verwenden $15 \text{ ml} = 15 \text{ cm}^3$ für das Volumen der Füllung (V_f) und $100 \text{ ml} - 15 \text{ ml} = 85 \text{ ml} = 85 \text{ cm}^3$ für das Volumen des Teiges (V_t). Daher müssen wir die beiden gegebenen Dichten in die entsprechenden Einheiten umwandeln: $1200 \text{ kg/m}^3 = 1,2 \text{ g/cm}^3$ für die Dichte der Füllung (ρ_f) und $800 \text{ kg/m}^3 = 0,8 \text{ g/cm}^3$ für die Dichte des Teiges (ρ_t). Nun können wir die Gesamtmasse des Croissants berechnen:

$$\begin{aligned} m_{\text{gesamt}} &= m_{\text{Füllung}} + m_{\text{Teig}}, \\ &= \rho_f \cdot V_f + \rho_d \cdot V_d, \\ &= 1,2 \text{ g/cm}^3 \cdot 15 \text{ cm}^3 + 0,8 \text{ g/cm}^3 \cdot 85 \text{ cm}^3, \\ &= 18 \text{ g} + 68 \text{ g}, \\ &= 86 \text{ g}. \end{aligned}$$

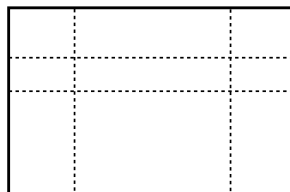
Die durchschnittliche Dichte ergibt sich dann als der Quotient aus der Gesamtmasse und dem Gesamtvolumen:

$$\rho_{\text{average}} = \frac{m_{\text{total}}}{V_{\text{total}}} = \frac{86 \text{ g}}{100 \text{ cm}^3} = 0,86 \text{ g/cm}^3.$$

Da das Ergebnis in kg/m^3 gesucht war, ergibt sich daraus die Antwort 860 kg/m^3 .

Aufgabe 15 ... Das Erbe des Gärtners

Adam ist Gärtner. Er besitzt einen rechteckigen Garten, dessen Umfang 16 m beträgt. Er möchte, dass seine Söhne sich um diesen Garten kümmern. Deshalb hat er den Garten in 9 rechteckige Teile unterteilt, wie in der Abbildung. Die gestrichelten Linien stellen die Grenzen zwischen den einzelnen Teilen dar. Wie groß ist die Summe der Umfänge aller 9 Teile in Metern?

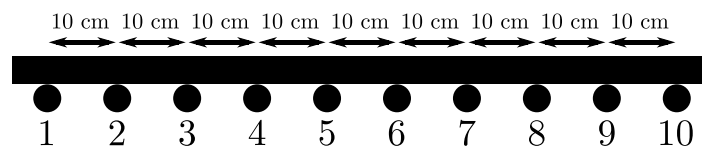


Ergebnis: 48

Lösung: Wir wissen, dass der Umfang des großen Rechtecks 16 m beträgt. Die Summe der Längen aller durchgehenden Linien ist also 16 m. Wenn wir die gestrichelten Linien betrachten, sehen wir, dass wir sie so anordnen können, dass sie das gleiche Rechteck wie das ursprüngliche Rechteck mit den durchgezogenen Linien ergeben. Daher ist die Summe ihrer Längen gleich der Summe der Längen aller durchgehenden Linien, also auch 16 m. Nun stellt sich die Frage, wie oft wir welche Linien verwenden, wenn wir die Umfänge aller dieser 9 Rechtecke zusammenzählen. Jede durchgezogene Linie wird genau einmal verwendet, da jeder Abschnitt jeder durchgezogenen Linie genau zu einem der 9 Umfänge gehört. Die gestrichelten Linien befinden sich jedoch immer zwischen zwei Teilen, sodass jeder Abschnitt jeder gestrichelten Linie genau zu 2 der 9 Umfänge gehört. Also wissen wir, dass jede gestrichelte Linie zweimal und jede durchgezogene Linie einmal verwendet wird. Insgesamt verwenden wir daher den gesamten Umfang des ursprünglichen Rechtecks $2 + 1 = 3$ -mal. Die Antwort lautet also $3 \cdot 16 \text{ m} = 48 \text{ m}$.

Aufgabe 16 ... Können wir es nicht zerstören?

Bob der Baumeister hat ein Regal gebaut. Es besteht aus einem 1 Meter langen homogenen Brett, das von 10 Stützen getragen wird, wobei zwei benachbarte Stützen jeweils 10 Zentimeter voneinander entfernt sind. Außerdem hat Bob die Stützen so wie in der Abbildung zu sehen von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 10 nummeriert. Einige Tage später denkt Bob sich, dass 10 Stützen verschwenderisch sind. Deshalb beschließt er, einige der Stützen zu entfernen, ohne das Brett zu bewegen. Nun fragt er sich: Was ist das kleinste Produkt der Nummern der verbleibenden Stifte, sodass das Brett nicht kippt?



Ergebnis: 6

Lösung: Damit das Brett nicht kippt, muss sein Schwerpunkt zwischen zwei Stützen liegen. Anders ausgedrückt: Es muss eine Stütze links und eine Stütze rechts vom Schwerpunkt des Bretts vorhanden sein. Der Schwerpunkt des Brettes liegt zwischen den Stiften mit den Nummern 5 und 6. Wir benötigen also mindestens eine Stütze mit einer Nummer von höchstens 5 und eine Stütze mit einer Nummer von mindestens 6. Um das Produkt so klein wie möglich zu machen, nehmen wir die Stütze mit der jeweils kleinsten Nummer links beziehungsweise rechts vom Schwerpunkt, also die Stütze mit der Nummer 1 und die Stütze mit der Nummer 6.

Wenn wir nur diese beiden Stützen verwenden, wird der Schwerpunkt zwischen ihnen liegen, sodass das Brett stabil bleibt. Mit zusätzlichen Stützen kann das Produkt nur größer werden. Die Antwort ist also $1 \cdot 6 = 6$.

Aufgabe 17 ... Für Statistiker*innen

Jakob studiert Statistik. Er hat mehrere neue Begriffe gelernt. Er weiß nun, dass in einer gegebenen Datenmenge der Modus die Zahl ist, die am häufigsten in der Datenmenge vorkommt. Der Median ist die Zahl, die in aufsteigend sortierter Reihenfolge in der Mitte der Datenmenge steht. Zum Beispiel ist bei der Datenmenge 2, 7, 20, 6, 2 der Modus 2 und der Median 6.

Jakob hatte eine Datenmenge, die die Zahlen 8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5 und weitere drei (nicht notwendigerweise verschiedene) ganze Zahlen enthielt, die er vergessen hat. Er erinnert sich nur daran, dass der Median 4 war und dass der Modus eindeutig war (es gab nur einen Modus in der gesamten Datenmenge) und ebenfalls 4. Was ist der größtmögliche Wert des arithmetischen Mittels der Zahlen in dieser Datenmenge? Gib deine Antwort als vollständig gekürzten Bruch an.

Ergebnis: 5

Lösung: Wir wissen, dass es einen eindeutigen Modus gab: 4. Daher muss die Anzahl der Zahlen 4 in unserer Datenmenge größer sein als die Anzahl jeder anderen Zahl. Von den bekannten Zahlen kommen 3 und 5 jeweils

zweimal vor. Daher muss 4 mindestens dreimal vorkommen, momentan ist es jedoch nur einmal vertreten. Das bedeutet, dass von den 3 unbekannten Zahlen, die Jakob vergessen hat, mindestens zwei die Zahl 4 sein müssen.

Damit kennen wir die Werte von 10 der 11 Zahlen in der Datenmenge. Nun betrachten wir die zweite Bedingung: Der Median sollte ebenfalls 4 sein. Wenn wir die 10 bekannten Zahlen in aufsteigender Reihenfolge anordnen, erhalten wir: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Wenn wir diesen die elfte Zahl hinzufügen, muss die mittlere Zahl 4 sein. Der Mittelpunkt dieser Datenmenge liegt derzeit zwischen den Zahlen 4 und 5. Wäre die elfte Zahl 5 oder größer, dann wäre die mittlere Zahl 5, was die Bedingung nicht erfüllt. Also muss die elfte Zahl entweder 4 oder kleiner sein. Da wir wollen, dass das arithmetische Mittel möglichst groß ist, wählen wir eine weitere 4. Nun kennen wir alle elf Zahlen der Datenmenge: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Ihr arithmetisches Mittel ist ihre Summe geteilt durch ihre Anzahl, was $\frac{55}{11} = 5$ ergibt.

Aufgabe 18 ... Zusammenziehen

Barbara und Simon wollen sich treffen. Simon ist zuhause und möchte Barbara mit einem Besuch überraschen. Also steigt er in sein Auto und macht sich mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h auf den direkten Weg zu Barbaras Haus. Während der Fahrt ruft ihn Barbara an. Sie möchte wissen, wie es ihm geht. Simon bleibt nichts anderes übrig, als zuzugeben, dass er gerade auf dem Weg zu ihr ist. Barbara ist begeistert und möchte Simon so schnell wie möglich treffen. Also steigt sie zuhause in ihr Auto und fährt ihm entgegen. Sie fährt mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h in dem Moment los, in dem Simon genau die Hälfte der Strecke zu ihrem Haus zurückgelegt hat. Sie treffen sich glücklich genau 1 Stunde, nachdem Simon losgefahren ist. Wie groß ist die Entfernung zwischen den Häusern von Barbara und Simon in Kilometern?

Ergebnis: 48

Lösung: Bezeichnen wir die gesamte Entfernung zwischen den Häusern als s , die von Simon zurückgelegte Strecke als s_{si} und die von Barbara zurückgelegte Strecke als s_{ba} . Es gilt $s = s_{si} + s_{ba}$. Wir können also s ermitteln, indem wir die von Barbara und Simon zurückgelegten Strecken gefunden haben.

Zunächst lässt sich s_{si} leicht mit der Formel $s = v \cdot t$ berechnen, wobei v die Geschwindigkeit und t die Zeit ist. Es gilt $s_{si} = v_{si} \cdot t_{si} = 30 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 30 \text{ km}$.

Jetzt müssen wir noch s_{ba} berechnen. Dazu drücken wir die Zeit t , die Simon benötigt, um die Hälfte von s zurückzulegen, in Abhängigkeit von s aus. Es gilt $t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s}{2 \cdot 30 \text{ km/h}} = \frac{s}{60 \text{ km/h}}$. Daraus können wir auch die Zeit berechnen, die Barbara gefahren ist (t_{ba}): Es ist 1 Stunde minus dieser Zeit. Somit ergibt sich $t_{ba} = 1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}$. Jetzt können wir die von Barbara zurückgelegte Strecke s_{ba} als

$$s_{ba} = v_{ba} \cdot t_{ba} = 90 \text{ km/h} \cdot \left(1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}\right) = 90 \text{ km} - \frac{90 \text{ km/h} \cdot s}{60 \text{ km/h}} = 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s.$$

Da wir den Wert von s_{si} kennen und s_{ba} in Abhängigkeit von s ausgedrückt haben, können wir nun s berechnen:

$$\begin{aligned} s &= s_{si} + s_{ba}, \\ s &= 30 \text{ km} + 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s, \\ \frac{5}{2} s &= 120 \text{ km}, \\ s &= 48 \text{ km}. \end{aligned}$$

Daher beträgt die Entfernung zwischen Barbaras und Simons Haus 48 km.

Aufgabe 19 ... Zweimal zweimal

Tomi ist gelangweilt. Also beginnt er, Zahlen auf eine Tafel zu schreiben. Zuerst schreibt er eine 2, dann zwei 2en, dann drei 2en, dann vier 2en und so weiter, bis er 2024 2en auf die Tafel geschrieben hat. Dann beschließt er, alle Zahlen miteinander zu multiplizieren. Was ist die letzte Ziffer des Produkts, das er erhält?

Ergebnis: 6

Lösung: Da wir uns nur für die letzte Ziffer des gesamten Produkts von $1 + 2 + \dots + 2024 = 2025 \cdot 1012$ 2en interessieren, können wir dieses Problem angehen, indem wir nur die letzte Ziffer der Zwischenergebnisse betrachten.

Zuerst können wir die ersten Zahlen in den Klammern aufschreiben:

$$\begin{aligned} &2, \\ &2 \cdot 2 = 4, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256, \dots \end{aligned}$$

In dieser Zahlenfolge können wir ein wiederkehrendes Muster in der Einerstelle beobachten: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, etc. Wenn wir also die Zahl 2 4-mal, 8-mal, 12-mal, etc. mit sich selbst multiplizieren, erhalten wir eine Zahl, die auf 6 endet. Die Zahl $2025 \cdot 1012$ ist auch durch 4 teilbar. Daraus folgt, dass das Produkt von $2025 \cdot 1012$ 2en mit sich selbst auf 6 endet.

Aufgabe 20 ... Radioverlosung

Ein Radiosender veranstaltet jeden Tag eine Verlosung. Jeder kann eine SMS an eine bestimmte Telefonnummer senden und nimmt damit an der Verlosung des Tages teil. Gestern gab es für jede SMS ein Los für die Verlosung, bei der es einen Gewinner gab. Heute hat der Radiosender einen besonderen Aufruf gemacht: Für jede SMS gibt es 30 Lose. John hat gestern 1 SMS und heute 1 SMS gesendet. Vorausgesetzt, dass die Organisatoren an beiden Tagen die gleiche Anzahl an SMS erhalten haben, wie viel mal so hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von John heute im Vergleich zur gestrigen Wahrscheinlichkeit?

Ergebnis: 1

Lösung: Bei der heutigen Verlosung erhält John 30-mal mehr Tickets. Da jedoch jeder 30-mal mehr Tickets erhält, ist die Gesamtzahl der Tickets ebenfalls 30-mal höher. Obwohl John also 30-mal mehr Tickets in der Verlosung hat, bilden diese den gleichen Anteil an allen Tickets in der Verlosung wie gestern. Die Wahrscheinlichkeit für Johns Gewinn muss daher dieselbe sein wie gestern. Oder anders ausgedrückt: Sie ist 1-mal so hoch.

Aufgabe 21 ... Resistent gegen Widerstand

Matt ist sehr resistent. Er kann auch gut widerstehen, etwas über Elektrizität zu lesen. Unlängst hat er aber gelesen, dass, wenn er einen Draht der Länge ℓ und mit Querschnittsfläche S aus einem Material mit spezifischem Widerstand ρ herstellt, der Widerstand des Drahtes $R = \frac{\rho \ell}{S}$ beträgt. Er möchte das selbst ausprobieren. Deshalb stellt Matt einen Kupferdraht mit dem Widerstand R her. Dann schmilzt er den Draht und formt daraus einen neuen Draht, dessen Querschnittsradius ein Drittel des ursprünglichen Radius beträgt. Der Widerstand des neuen Drahtes beträgt nun $k R$. Ermittle den Wert von k .

Ergebnis: 81

Lösung: Der Radius des neuen Drahtes beträgt ein Drittel des ursprünglichen Radius. Da die Fläche eines Kreises proportional zum Quadrat des Radius ist, muss die Querschnittsfläche S' des neuen Drahtes $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9} S$ betragen. Das Volumen des neuen Drahtes ist dasselbe wie beim alten Draht. Die Verringerung des Querschnitts auf ein Neuntel führt also dazu, dass sich die Länge des Drahtes auf $\ell' = 9\ell$ erhöht. Der

spezifische Widerstand ist eine Materialeigenschaft und bleibt gleich. Nun können wir den Widerstand des neuen Drahtes berechnen:

$$R' = \frac{\rho \ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81 \frac{\rho \ell}{S} = 81R.$$

Daraus ergibt sich, dass der Widerstand des neuen Drahtes 81-mal so groß ist wie der Widerstand des ursprünglichen Drahtes. Also ist $k = 81$.

Aufgabe 22 ... Trikots aus New Jersey

Thomas wäscht die Fußballtrikots des New Jersey-Teams. Sein Team hat 75 Trikots mit 75 aufeinanderfolgenden Nummern darauf. Gestern hängte er sie in aufsteigender Reihenfolge auf eine Leine. Ihm fiel auf, dass die Summe der Nummern der letzten 5 Trikots genau 6-mal größer war als die Summe der Nummern der ersten 5 Trikots. Welche Nummer trug das Trikot, das genau in der Mitte hing?

Ergebnis: 49

Lösung: Bezeichnen wir die Nummer des Trikots in der Mitte mit x . Vor diesem Trikot hängen $\frac{75-1}{2} = 37$ Trikots. Nach diesem Trikot hängen ebenfalls 37 Trikots auf der Leine. Die ersten fünf Trikots haben also die Nummern $x - 37$, $x - 36$, $x - 35$, $x - 34$ und $x - 33$, während die letzten fünf Trikots die Nummern $x + 33$, $x + 34$, $x + 35$, $x + 36$ und $x + 37$ haben. Die Bedingung aus der Aufgabenstellung führt zur Gleichung

$$\begin{aligned}(x + 33) + (x + 34) + (x + 35) + (x + 36) + (x + 37) &= 6((x - 37) + (x - 36) + (x - 35) + (x - 34) + (x - 33)), \\ 5x + 175 &= 6(5x - 175), \\ 5x + 175 &= 30x - 1050, \\ 25x &= 1225, \\ x &= 49.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Nummer auf dem Trikot in der Mitte $x = 49$ war.

Aufgabe 23 ... Gesundes Pulver

Mislav möchte einen gesunden Snack herstellen. Dafür braucht er getrocknete Bananen. Er kauft einen Bund Bananen, die einen Wassergehalt von 75 % haben, und die er jetzt trocknet. Er gibt die Hälfte der Bananen in einen Lufttrockner, der den Wassergehalt auf 25 % reduziert, und die andere Hälfte in einen Gefriertrockner, der den Wassergehalt auf nur 10 % senkt. Dann zermahlt Mislav die getrockneten Bananen und mischt das Pulver. Welcher Anteil des Pulvers besteht aus Wasser? Gib die Antwort als vollständig gekürzten Bruch an.

Ergebnis: $\frac{2}{11}$

Lösung: Sei m die Masse der Bananen, die Mislav kauft. Wir wissen, dass sie $\frac{3}{4}m$ Wasser und $\frac{1}{4}m$ Trockenmasse enthalten. Also enthält jede Hälfte der Bananen $\frac{1}{8}m$ Trockenmasse. Für die im Lufttrockner getrockneten Bananen macht der Trockengehalt 75 % aus, sodass diese Bananen jetzt $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$ wiegen und das Wasser darin ein Gewicht von $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$ hat. Ebenso wiegen die im Gefriertrockner getrockneten Bananen $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$ und das enthaltene Wasser wiegt $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$. Insgesamt beträgt die Masse des Pulvers $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$, wovon $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ aus Wasser besteht. Somit ist der Anteil des Wassers im Pulver

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Aufgabe 24 ... Springen im Aufzug

Karl wiegt 75 kg und kann normalerweise 1 m hoch springen. Eines Tages nimmt er eine Personenwaage in einen Aufzug mit. Er stellt fest, dass die Waage, während der Aufzug sich nach unten in Bewegung setzt, für ihn nur ein Gewicht von 60 kg anzeigt. Was ist die maximale Höhe in Metern, bis zu der Karl springen kann, wenn er springt, während der Aufzug sich in Bewegung setzt?

(Nimm an, dass Karl so springt, dass seine kinetische Energie im Moment des Absprungs im stehenden und im losfahrenden Aufzug die gleiche ist, und dass der Aufzug während des gesamten Sprungs gleich stark beschleunigt.)

Ergebnis: 1,25

Lösung: Wenn Karl beim Springen eine Höhe von $h_0 = 1\text{ m}$ erreicht und $m = 75\text{ kg}$ wiegt, ist seine kinetische Energie beim Absprung $E = mgh_0$. Im nach unten beschleunigenden Aufzug herrscht eine verringerte Fallbeschleunigung g' . Die Gewichtskraft, die Karl auf die Waage ausübt, ist somit nur $F_g = mg'$. Eine Personenwaage misst eigentlich die Gewichtskraft und zeigt dann die Masse m' an, die dieser Kraft bei der normalen Fallbeschleunigung g entspricht. Da sie für Karl $m' = 60\text{ kg}$ anzeigt, gilt also $mg' = m'g$ und somit

$$g' = \frac{m'}{m}g.$$

Im beschleunigenden Aufzug wirkt also effektiv eine Fallbeschleunigung g' . Wenn Karl jetzt mit der gleichen kinetischen Energie E abspringt, wird am höchsten Punkt des Sprungs seine gesamte kinetische Energie in potentielle Energie im Schwerfeld g' umgewandelt, also gilt $E = mg'h$. Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$mgh_0 = mg'h,$$

und somit springt Karl

$$h = \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75\text{ kg}}{60\text{ kg}} \cdot 1\text{ m} = 1,25\text{ m}$$

hoch.

Aufgabe 25 ... Auslöschung der Zahl 3

Für Peter ist die Zahl 3 mit Unglück verbunden (z. B. findet er immer drei Gräten in einem grätenfreien Fischgericht), weshalb er beschlossen hat, die Zahl 3 aus seinem Leben zu tilgen. Er verwendet keine Zahl, die die Ziffer 3 enthält oder durch 3 teilbar ist. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 (einschließlich) kann Peter verwenden?

Ergebnis: 55

Lösung: Zählen wir die Zahlen, die Peter nicht verwendet. Die Vielfachen von 3 zwischen 1 und 100 sind 3, 6, ..., 99, also gibt es $99 : 3 = 33$ davon. Außerdem gibt es 19 Zahlen, die die Ziffer 3 enthalten (10 davon haben die 3 als Einerstelle, 10 als Zehnerstelle, aber die Zahl 33 ist in beiden Gruppen enthalten). Peter verwendet keine der Zahlen aus diesen beiden Gruppen. Einige Zahlen befinden sich jedoch in beiden Gruppen, nämlich die Zahlen 3, 30, 33, 36, 39, 63 und 93, die nur einmal gezählt werden sollen. Daher verwendet Peter insgesamt $33 + 19 - 7 = 45$ Zahlen nicht. Er kann alle anderen Zahlen verwenden, also insgesamt $100 - 45 = 55$ Zahlen.

Aufgabe 26 ... Vorsicht, Rehe!

Theresa fährt in ihrem Auto mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s . Auf einmal sieht sie ein Reh am Straßenrand. Ihre Reaktionszeit, bis sie zu bremsen anfängt, ist 1 s , anschließend wird das Auto mit einer konstanten Kraft abgebremst. Der gesamte Anhalteweg, ab dem Zeitpunkt, an dem Theresa das Reh gesehen hat, ist 33 m . Was wäre der Anhalteweg in Metern gewesen, wenn Theresa ursprünglich mit 35 m/s gefahren wäre?

Ergebnis: 133

Lösung: Wir bezeichnen Theresas Geschwindigkeit mit v . Die erste Sekunde ($t_0 = 1\text{ s}$), nachdem sie das Reh gesehen hat, fährt sie mit der Geschwindigkeit v weiter und legt so den Abstand $s_1 = vt_0$ zurück. Dann bremst sie mit einer konstanten Kraft F . Diese Kraft wirkt über eine Distanz s_2 und verrichtet somit die Arbeit $W = Fs_2$. Diese Arbeit dient dazu, die kinetische Energie des Autos, $E = \frac{1}{2}mv^2$, auf Null zu verringern,

wobei m die Masse des Autos ist. Wir erhalten also $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, d.h. der Abstand, nach dem das Auto vom Beginn des Bremsens an zum Stillstand kommt, ist

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

Der gesamte Anhalteweg ist dann $s = s_1 + s_2$.

Laut Aufgabenstellung war der gesamte Anhalteweg $s = 33$ m, als Theresa mit $v_1 = 15$ m/s gefahren ist. Wir können dann nach $\frac{m}{F}$ auflösen und erhalten

$$s = v_1 t_0 + \frac{mv_1^2}{2F}, \text{ also}$$

$$\frac{m}{F} = \frac{2(s - v_1 t_0)}{v_1^2}.$$

Wenn wir das jetzt in die Formel für den Anhalteweg, $s' = s'_1 + s'_2$, für die Geschwindigkeit $v_2 = 35$ m/s einsetzen, erhalten wir

$$s' = v_2 t_0 + \frac{mv_2^2}{2F} = v_2 t_0 + \frac{(s - v_1 t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} + \frac{(33 \text{ m} - 15 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s}) \cdot (35 \text{ m/s})^2}{(15 \text{ m/s})^2} = 133 \text{ m}.$$

Theresas Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von $v_2 = 35$ m/s wäre also $s' = 133$ m.

Aufgabe 27 ... Tanz auf dem Wasser

Die Organisatoren des jährlichen Aquatechno-Tanzevents wollen eine schwimmende Tanzfläche im See platzieren. Es handelt sich um einen starren Quader mit einer Dicke von 10 cm und einer durchschnittlichen Dichte von $0,6 \text{ g/cm}^3$. Die Tanzfläche soll mit bis zu 4000 kg belastet werden können, ohne zu sinken. Wie groß muss die Tanzfläche in Quadratmetern mindestens sein?

Ergebnis: 100

Lösung: Wir bezeichnen die erforderliche Fläche mit S , sodass das Volumen des Tanzbodens $V = S \cdot 10 \text{ cm}$ beträgt. Wenn die Tanzfläche maximal belastet ist, befindet sie sich auf gleicher Höhe mit dem sie umgebenden Wasser und verdrängt somit genau das Volumen V an Wasser. Das verdrängte Wasser hat die Masse $V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3$, und diese muss gleich der Masse des Tanzbodens plus den darauf befindlichen 4000 kg sein, also $V \cdot 600 \text{ kg/m}^3 + 4000 \text{ kg}$. Für V erhalten wir als Lösung $V = 10 \text{ m}^3$, sodass der Flächeninhalt der Tanzfläche $S = \frac{V}{0,1 \text{ m}} = 100 \text{ m}^2$ sein muss.

Aufgabe 28 ... Zelt

Lucy ist auf einer Wanderung. Sie hat ein Zelt aufgebaut, das die Form eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis BC hat. Um ihre Kleidung zu trocknen, hat Lucy ein Seil aufgehängt, das ein gleichseitiges Dreieck DEF bildet, wobei die Punkte D , E und F auf den Strecken AB , BC und CA liegen. Lucy hat gemessen, dass $\angle ADF = 42^\circ$ und $\angle EFC = 24^\circ$. Wie groß ist der Winkel $\angle EAC$ in Grad?

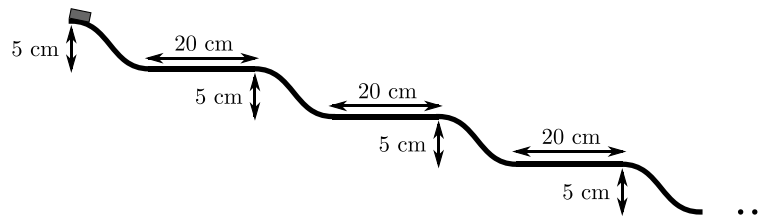
Ergebnis: 12

Lösung: Betrachten wir die Winkel um den Scheitelpunkt F . Wir wissen, dass $\angle EFC = 24^\circ$ und $\angle DFE = 60^\circ$, da das Dreieck DEF gleichseitig ist. Somit ergibt sich $\angle AFD = 180^\circ - \angle EFC - \angle DFE = 180^\circ - 24^\circ - 60^\circ = 96^\circ$. Im Dreieck ADF kennen wir nun zwei Winkel, sodass $\angle DAF = 180^\circ - \angle ADF - \angle DFA = 180^\circ - 42^\circ - 96^\circ = 42^\circ$. Wir sehen, dass $\angle DAF = \angle ADF$, was bedeutet, dass das Dreieck ADF gleichschenkelig ist und $AF = DF$ gilt. Die Strecke DF ist eine Seite des gleichseitigen Dreiecks DEF , woraus folgt, dass $DE = EF = FD$ gilt. Daher wissen wir, dass $AF = EF$ ist, sodass das Dreieck AEF gleichschenkelig mit der Basis AE ist.

Wir wissen bereits, dass $\angle AFE = \angle AFD + \angle DFE = 96^\circ + 60^\circ = 156^\circ$ beträgt. Daher ergibt sich im gleichschenkligen Dreieck AEF , dass $\angle EAC = \angle EAF = \frac{180^\circ - 156^\circ}{2} = 12^\circ$.

Aufgabe 29 ... Hot Wheels

Nina spielt mit einem Hot Wheels-Spielzeugauto. Stell dir vor, dass ein Hot Wheels-Spielzeugauto ein Quader mit der Masse 60 g ist. Nina hat eine Rennstrecke gebaut, die abwechselnd bergab und horizontal verläuft. Bergab überwindet das Auto ohne Reibung jeweils 5 cm an Höhendifferenz, horizontal legt es jeweils 20 cm gebremst mit dem Reibungskoeffizienten 0,4 zurück. Die Rennstrecke beginnt mit einer Gefällestrecke und Nina gibt dem Auto die Anfangsgeschwindigkeit 5 m/s. Auf dem wievielten horizontalen Teilstück kommt der Wagen zum Stehen?



Ergebnis: 42

Lösung: Bergab gewinnt das Auto an Energie, auf den horizontalen Strecken verliert es an Energie. Deshalb bleibt das Auto auf einer der horizontalen Strecken stehen, sobald seine Energie auf 0 sinkt.

Zu Beginn ist die Gesamtenergie des Autos die Summe seiner potentiellen Energie und seiner kinetischen Energie. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die potentielle Energie des Autos zu Beginn 0 J beträgt. Die Gesamtenergie des Autos ist daher seine kinetischen Energie, die $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ beträgt, wobei $m = 60$ g die Masse und $v_0 = 5$ m/s die Anfangsgeschwindigkeit des Autos sind.

Jedes Mal, wenn das Auto eine Strecke bergab fährt, erhöht sich seine Energie durch eine Änderung der potentiellen Energie. Da es um die Höhe $h_0 = 5$ cm nach unten fällt, gewinnt es die Energie $E_{p_0} = mgh_0$. In den horizontalen Teilen wirkt die Reibungskraft $F_t = fmg$, wobei $f = 0,4$ der Reibungskoeffizient ist. Sie wirkt auf der Länge $s = 20$ cm, also verrichtet sie die Arbeit $W = F \cdot s = fmg s$ am Auto. Aus diesem Grund nimmt die Energie des Wagens um W ab.

Nach jedem Streckenabschnitt, bestehend aus einem horizontalen und einem vertikalen Teilstück, nimmt die Energie des Autos um $E_{p_0} - W = mgh_0 - fmg s$ ab. Nach n solchen Streckenabschnitten sinkt die Energie um $n(E_{p_0} - W)$. Wir suchen das kleinste n , sodass $E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0$ gilt. Lösen wir diese Ungleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_0 - n(E_{p_0} - W) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmg s) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}v_0^2 &\leq n(fs - h_0), \\ n &\geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)}, \\ n &\geq \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2(0,4 \cdot 20 \text{ cm} - 5 \text{ cm})} = \frac{25}{0,6} = \frac{250}{6} \doteq 41,67. \end{aligned}$$

Daher bleibt das Spielzeugauto auf dem 42ten horizontalen Teilstück stehen.

Aufgabe 30 ... Älter werden

Samuel wird heute 37 Jahre alt. Er schreibt deshalb eine 2024-stellige Zahl 3737...37 auf, die aus 1012 Ziffern 3 und 1012 Ziffern 7 besteht. Weil er sich gerne an die Zeit erinnert, als er noch 21 war, multipliziert

er die 2024-stellige Zahl mit 21. Aus Langeweile beschließt er, die Summe der Ziffern dieses Produkts zu berechnen. Welches Ergebnis erhält er dabei?

Ergebnis: 12 153

Lösung: Beachte, dass $37 \cdot 21 = 777$. Diese Beobachtung hilft uns bei der Berechnung. Wir ahmen das gewohnte Verfahren der schriftlichen Multiplikation nach. Normalerweise multiplizieren wir in jedem Schritt mit einer einstelligen Zahl. Da wir aber das Produkt $37 \cdot 21 = 777$ kennen, können wir diese Multiplikation in jedem Schritt durchführen. Dadurch ergibt sich die Rechnung wie in der folgenden Abbildung.

$$\begin{array}{r}
 37 \dots 7373737 \\
 \cdot 21 \\
 \hline
 777 \\
 777 \\
 777 \\
 \dots \\
 777 \\
 \hline
 784 \dots 4848477
 \end{array}$$

Die aufeinanderfolgenden Zahlen 777 haben eine Ziffer 7 in einer gemeinsamen Reihenfolge, sodass wir sie wie gewohnt summieren. Auf diese Weise erscheinen die Ziffern 4 und 8 im Ergebnis. Es ist klar, dass das Ergebnis der Multiplikation eine 2025-stellige Zahl ist. Die erste Ziffer des Produkts ist 7, ebenso die beiden letzten. Die übrigen $2025 - 3 = 2022$ Ziffern wechseln zwischen 4 und 8 ab, sodass es $2022 : 2 = 1011$ von jeder gibt. Insgesamt ist die Summe aller Ziffern des Ergebnisses $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Aufgabe 31 ... Akkus aufladen

Majo schreibt die Lösungen für den diesjährigen Náboj Junior in einem Teehaus. Er benutzt dafür einen Laptop mit einer Akkukapazität von 4000 mAh und ein Smartphone mit einer Akkukapazität von 3500 mAh. Allerdings hat er vergessen, sie aufzuladen, sodass beide Geräte nur noch bei 20 % ihrer Kapazität sind. Majo hat nur ein einziges Ladegerät, das die Geräte mit einer Stromstärke von 3,25 A aufladen kann. Majo weiß außerdem, dass der vollständig aufgeladene Akku des Laptops nach 10 Stunden Nutzung leer ist und der vollständig aufgeladene Akku des Smartphones ebenfalls eine Nutzungsdauer von 10 Stunden zulässt. Wie viel Zeit in Stunden ist mindestens nötig, um beide Geräte vollständig aufzuladen, während Majo sie gleichzeitig weiterhin für die Arbeit benutzt?

Ergebnis: 2,4

Lösung: Die Kapazität eines Akkus in mAh beschreibt das Verhältnis zwischen dem Entladestrom des Akkus und der Zeit, wie lange der Akku diesen Strom liefern kann. Wenn eine Batterie mit einer Kapazität von 4000 mAh vollständig aufgeladen ist, kann sie zum Beispiel eine Stromstärke von 4000 mA für eine Stunde liefern oder eine Stromstärke von 1000 mA für vier Stunden.

Da Majo ändern kann, welches Gerät geladen wird, können wir den Laptop und das Smartphone als ein Gerät mit der Akkukapazität $4000 \text{ mAh} + 3500 \text{ mAh} = 7500 \text{ mAh}$ betrachten. Zu Beginn waren beide Akkus auf 20 % ihrer Kapazität, also enthielten sie insgesamt die Ladung $0,2 \cdot 7500 \text{ mAh} = 1500 \text{ mAh}$. Beide Akkus entladen sich so, dass sie nach 10 Stunden leer sind. Sie entladen sich also jede Stunde um $7500 \text{ mAh} : 10 = 750 \text{ mAh}$. Gleichzeitig lädt Majo die Geräteakkus über sein Ladegerät mit einer Stromstärke von $3,25 \text{ A} = 3250 \text{ mA}$, sodass in einer Stunde eine Ladung von 3250 mAh zugeführt wird. Die Ladung der Batterien erhöht sich also um $3250 \text{ mAh} - 750 \text{ mAh} = 2500 \text{ mAh}$ jede Stunde. Majo muss insgesamt eine Ladung von $7500 \text{ mAh} - 1500 \text{ mAh} = 6000 \text{ mAh}$ zuführen, sodass beide Geräte vollständig geladen sind in

$$\frac{6000 \text{ mAh}}{2500 \text{ mAh/h}} = 2,4 \text{ h.}$$

Aufgabe 32 ... Sandburgen bauen ist langweilig

Lexi ist gelangweilt vom Sandburgenbauen, daher spielt sie nun mit einem Eimer in einem See. Der Eimer ist sehr leicht und hat die Form eines Zylinders mit der Grundfläche $S = 400 \text{ cm}^2 = 0,04 \text{ m}^2$ und der Höhe $h = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$. Lexi hat den Eimer vollständig untergetaucht, sodass sich sein oberer Rand 10 cm unter der Wasseroberfläche befindet. Jetzt möchte sie den Eimer langsam nach oben ziehen, bis sein Boden unmittelbar über der Oberfläche des Sees ist. Wie viel Arbeit in Joule muss Lexi dafür aufwenden?

Ergebnis: 18

Lösung: Lexi muss nur deshalb Arbeit aufwenden, weil sie die potentielle Energie des Wassers im Eimer erhöht. Der Eimer ist ein Zylinder mit der Grundfläche $S = 400 \text{ cm}^2 = 0,04 \text{ m}^2$ und der Höhe $h = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$. Die Masse des Wassers im Eimer berechnet sich daher über $m = \rho_{\text{Wasser}} Sh$. Sein Schwerpunkt liegt auf halber Eimerhöhe, also bei $\frac{h}{2}$. Daher ist die Zunahme der potentiellen Energie des Wassers und damit auch die Arbeit, die Lexi aufwenden muss:

$$W = mg \frac{h}{2} = \frac{\rho_{\text{Wasser}} S g h^2}{2} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2}{2} = 18 \text{ J}.$$

Aufgabe 33 ... Über Bruno reden wir nicht

Bruno ist ein außergewöhnlicher Designer, daher ist es schade, dass wir nicht mehr über ihn sprechen. Kürzlich zeichnete er ein neues Logo für seine Firma. Es ist ein sehr spezielles Sechseck $ABCDEF$, wobei $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 19 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$, $DE = 14 \text{ cm}$, $EF = 4 \text{ cm}$ und $FA = 9 \text{ cm}$. Außerdem sind die Längen der Diagonalen AC , CE und EA in Zentimetern alle ganze Zahlen und bilden ein Dreieck. Wie groß ist der maximal mögliche Umfang des Dreiecks ACE in Zentimetern?

Ergebnis: 53

Lösung: Wir wenden die Dreiecksungleichung mehrmals an. Für das Dreieck ABC besagt sie, dass die Länge der Seite AC größer ist als $19 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$, aber kleiner als $19 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 31 \text{ cm}$. Die Länge muss ganzzahlig sein, daher kann die Länge von AC jede ganze Zahl zwischen 8 cm und 30 cm annehmen. Aus demselben Grund (angewendet auf die Dreiecke CDE und EFA) sehen wir, dass die Länge von CE eine ganze Zahl zwischen 13 cm und 15 cm und die Länge von EA eine ganze Zahl zwischen 6 cm und 12 cm ist. Um den maximalen Umfang des Dreiecks ACE zu erhalten, müssen wir die größtmöglichen Längen seiner Seiten wählen. Die Dreiecksungleichung muss jedoch erfüllt sein. Selbst wenn wir die größten möglichen Längen von CE und EA wählen, kann die Länge AC nur kleiner als $15 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 27 \text{ cm}$ sein. Daher wird der größtmögliche Umfang des Dreiecks erreicht, wenn $AC = 26 \text{ cm}$, $CE = 15 \text{ cm}$ und $EA = 12 \text{ cm}$, wobei der Umfang $26 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 53 \text{ cm}$ beträgt.

Aufgabe 34 ... Freude am Verpassen

Matej spielt mit Fakultäten. Die Fakultät einer Zahl erhält man, indem man alle natürlichen Zahlen bis zu dieser Zahl multipliziert. Zum Beispiel ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Matej betrachtete das Produkt $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$, die resultierende Zahl keine Quadratzahl ist. Matej fand heraus, dass er durch das Wegstreichen des Terms $k!$ eine Quadratzahl erhalten würde. Außerdem bemerkte er, dass es nur ein bestimmtes k mit dieser Eigenschaft gibt. Finde den Wert von k .

Ergebnis: 1012

Lösung: Das Produkt zweier Quadratzahlen ist wieder eine Quadratzahl – wenn wir a^2 mit b^2 multiplizieren, erhalten wir $(ab)^2$. Diesen Fakt nutzen wir, um das Problem zu vereinfachen.

Wir betrachten das Produkt $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Wenn wir aufeinanderfolgenden Terme wie folgt paaren $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ und jede Fakultät einer geraden Zahl in der Form $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ schreiben, können wir das Produkt in die Form

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \dots \cdot (2023!)^2)$$

bringen.

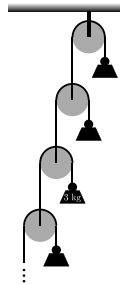
Die zweite Klammer ist ein Produkt von Quadratzahlen, also ist sie ebenfalls eine Quadratzahl. Um das gesamte Produkt zu einer Quadratzahl zu machen, müssen wir die erste Klammer zu einer Quadratzahl machen. Als ein Produkt gerader Zahlen lässt sie sich vereinfachen, indem wir aus jedem Term die Zahl zwei herausheben. Auf diese Weise erhalten wir

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) = 2^{1012}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Die Zahl 2^{1012} ist eine Quadratzahl (der Exponent ist gerade), sodass das einzige Hindernis dafür, dass das gesamte Produkt ein perfektes Quadrat wird, der Term $1012!$ ist. Laut Aufgabenstellung dürfen wir einen Term weglassen, was darauf hindeutet, den Term $1012!$ zu entfernen. Da wir laut Angabe einen eindeutigen Term suchen, haben wir unsere Lösung mit $k = 1012$ schon gefunden.

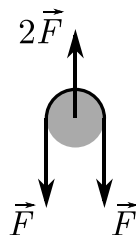
Aufgabe 35 ... Rollen über Rollen

Bob der Baumeister hat ein unendliches Rollensystem konstruiert wie abgebildet. Die Massen der einzelnen Massestücke sind nicht notwendigerweise gleich. Das System ist so aufgebaut, dass es im Gleichgewicht bleibt. Die Masse des dritten Massestücks beträgt 3 kg. Wie hoch ist die Gesamtmasse aller Massestücke in Kilogramm?



Ergebnis: 24

Lösung: Die Kräfte an einer Rolle stellen sich wie in der Abbildung dar.



Die beiden Kräfte, die auf das Seil wirken, sind gleich F , weil die Spannung über das ganze Seil konstant ist (sie ist aber unterschiedlich für verschiedene Seile). Damit die Rolle in Ruhe verharrt, muss gleichzeitig eine Kraft der Größe $2F$ nach oben auf die Rolle einwirken.

Obwohl es so aussieht, als ob wir die Unendlichkeit des Rollensystems in unseren Berechnungen berücksichtigen müssen, zeigt eine einfache Überlegung, dass sie keine Rolle spielt. Da alle Rollen und Seile masselos sind, erhalten wir die Gesamtmasse der Massestücke über die Kraft, die das gesamte System auf die Decke ausübt. Jene ist gleich der Summe aller Gewichte der Massestücke, die wiederum deren Gesamtmasse liefert.

Wir nutzen die Überlegungen über die Kräfte an einer Rolle, um die Kraft auf die Decke zu ermitteln.

Beginnen wir mit der dritten Rolle. Wir kennen die Masse des Massestücks, nämlich 3 kg, so dass wir als Gewicht $3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 30 \text{ N}$ erhalten. Daher muss auch die Spannung des zugehörigen Seils 30 N sein, was bedeutet, dass eine Kraft von $2 \cdot 30 \text{ N} = 60 \text{ N}$ auf die dritte Rolle nach oben ausgeübt wird.

Betrachten wir nun die zweite Rolle. Die Kraft 60 N von Rolle drei führt zu einer Spannung derselben Größe im Seil der zweiten Rolle, was wiederum bedeutet, dass auf die zweite Rolle eine Kraft $2 \cdot 60 \text{ N} = 120 \text{ N}$ nach

oben wirkt. Analog muss auf die erste Rolle eine Kraft von $2 \cdot 120 \text{ N} = 240 \text{ N}$ nach oben ausgeübt werden. Diese Kraft ist aber gleichzeitig jene Kraft, mit der das gesamte Rollensystem nach unten zieht, also die Kraft, die wir gesucht haben.

Folglich übt das gesamte Rollensystem eine Kraft von 240 N auf die Decke aus, sodass die Gesamtmasse aller Massestücke $240 \text{ N} : 10 \text{ N/kg} = 24 \text{ kg}$ sein muss.

Aufgabe 36 ... Wie sich die Ziffern gedreht haben

Mike spielt gerne mit Zahlen. Er nimmt eine dreistellige Zahl, kehrt die Reihenfolge ihrer Ziffern um und zieht diese Zahl von der ursprünglichen Zahl ab. Wenn er zum Beispiel mit der Zahl 123 beginnt, würde er $123 - 321 = -198$ berechnen. Seine Freundin Ann ist begeistert von der Idee und bittet Mike, diese Rechnung für ihre Lieblingszahl durchzuführen. Als die beiden das Ergebnis sehen, fällt ihnen auf, dass nicht nur Anns Lieblingszahl, sondern auch eine zweite dreistellige Zahl - nämlich Anns Lieblingszahl um 31 verringert - zu diesem Ergebnis führt. Wie viele dreistellige Zahlen können Anns Lieblingszahl sein?

Anmerkung: Eine dreistellige Zahl kann nicht die Ziffer 0 als Hunderterziffer haben; die durch Umdrehen der Ziffern entstehende Zahl kann jedoch 0 als Hunderterziffer haben. In diesem Fall ignorieren wir die Nullen am Anfang.

Ergebnis: 216

Lösung: Zuerst betrachten wir die Differenzen, die Mike erhält. Eine dreistellige Zahl kann in der Form $100A + 10B + C$ geschrieben werden, wobei A , B und C ihre Ziffern sind. Nach dem Umdrehen der Ziffern erhält Mike die Zahl $100C + 10B + A$, sodass er die Differenz

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C)$$

berechnet. Wir sehen, dass die Differenz, die Mike erhält, nur von der Differenz zwischen der Hunderter- und der Einerziffer der ursprünglichen Zahl abhängt. Im Fall von Ann's Lieblingszahl arbeitet Mike zuerst mit einer Zahl und dann mit dieser Zahl, vermindert um 31. Er erhält das gleiche Ergebnis, sodass diese beiden Zahlen die gleiche Differenz zwischen der Hunderter- und der Einerziffer aufweisen müssen. Nun müssen wir die Zahlen berechnen, die diese Eigenschaft haben.

Es gibt zwei Fälle, die, basierend auf der Einerziffer von Anns Lieblingszahl, auftreten können. Wenn die Einerziffer 0 wäre, würde die Subtraktion von 31 sie zu 9 ändern. Daher müsste die Hunderterziffer um 9 steigen, was offensichtlich unmöglich ist. Das bedeutet, dass Anns Lieblingszahl keine 0 als Einerziffer hat, sodass nach der Subtraktion von 31 die Einerziffer um 1 abnimmt und damit auch die Hunderterziffer um 1 sinken muss. Dies passiert nur, wenn die zweistellige Zahl, die durch die letzten beiden Ziffern von Anns Lieblingszahl gebildet wird, eine der folgenden ist: 00, 01, ..., 30.

Von dieser Liste müssen wir diejenigen mit 0 als Einerziffer streichen, was uns 27 Möglichkeiten übrig lässt. Als letzten Schritt bestimmen wir die Möglichkeiten für die Hunderterziffer. Sie kann nicht 1 sein, da wir nach der Subtraktion von 31 keine dreistellige Zahl erhalten würden. Aber die Ziffern 2, 3, ..., 9 funktionieren. Durch Kombination der Hunderterziffer mit den Möglichkeiten für die anderen beiden Ziffern erhalten wir $8 \cdot 27 = 216$ Möglichkeiten für Anns Lieblingszahl.

Aufgabe 37 ... Die größte Langeweile aller Zeiten

Joseph ist so gelangweilt, dass er alle positiven ganzen Zahlen von 1 bis 9 876 543 210 (einschließlich), seiner Lieblingszahl, aufgeschrieben hat. Er hat auch die Summe aller Ziffern dieser Zahlen berechnet und als Ergebnis 443 255 601 330 erhalten. Nun möchte er etwas Ähnliches tun. Er vertauscht die Ziffern 5 und 6 in allen Zahlen und berechnet die Summe aller Ziffern der so erhaltenen Zahlen. Welches Ergebnis erhält Joseph auf diese Weise?

Anmerkung: Zum Beispiel würde aus der Zahl 56 die Zahl 65 werden. Aus der Zahl 532 würde die Zahl 632 werden.

Ergebnis: 443 256 101 330

Lösung: Jede Änderung der Ziffer 5 zur Ziffer 6 erhöht Josephs Summe um 1, und ebenso verringert jede Änderung von 6 zu 5 die Summe um 1. Das bedeutet, dass jede Änderung von 5 zu 6 eine Änderung von 6 zu 5 aufhebt, und wir uns daher nur für den Unterschied in der Anzahl der Vorkommen der Ziffern 5 und 6 in den positiven ganzen Zahlen zwischen 1 und 9 876 543 210 interessieren.

Zuerst bemerken wir, dass wir uns nur auf die Ziffern 5 und 6 an den Stellen konzentrieren müssen, an denen diese Ziffern in der Zahl 9 876 543 210 vorkommen. Tatsächlich, wenn es eine Ziffer 5 an einer höheren oder niedrigeren Stelle gibt, können wir diese Ziffer 5 durch die Ziffer 6 (und analog jede Ziffer 6 durch 5) ersetzen und erhalten so eine Zahl die Joseph zuvor aufgeschrieben hat. Daher entsteht so kein Unterschied zwischen der Anzahl der Ziffern 5 und 6.

Nun konzentrieren wir uns nur auf die Ziffern 5 und 6 an den Millionen- und Hunderttausenderstellen. Der einzige Unterschied tritt auf, wenn diesen beiden Ziffern die Dreierkombination 987 vorangeht (andernfalls könnten wir die Argumentation des vorherigen Absatzes anwenden). Unter dieser Bedingung tritt die Ziffer 5 1 000 000-mal an der Millionenstelle und $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$ -mal an der Hunderttausenderstelle auf. Ebenso tritt die Ziffer 6 543 211-mal an der Millionenstelle und $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$ -mal an der Hunderttausenderstelle auf. Somit ist die Anzahl der Vorkommen der Ziffer 5 um $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 600\,000$ größer als die Anzahl der Vorkommen der Ziffer 6.

Daher erhöht die Änderung der Ziffer 5 zur Ziffer 6 die Summe der Ziffern um 500 000, sodass Joseph als Ergebnis

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330$$

erhalten wird.

Aufgabe 38 ... Sprung aus dem Wasser

Ferb ist ein homogenes, festes Prisma, dessen Basis ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 0,9 m, der Höhe 0,6 m und der Dichte 125 kg/m^3 ist. Er wird gerade unter der Wasseroberfläche eines großen Sees so festgehalten, dass Grund- und Deckfläche parallel zur Wasseroberfläche liegen und die Deckfläche sich genau auf Höhe der Wasseroberfläche befindet. Wird Ferb ausgelassen, springt er senkrecht aus dem Wasser. Welche Höhe in Meter wird seine Deckfläche dabei erreichen?

Anmerkung: Nimm an, dass Ferbs Grund- und Deckfläche beim Sprung horizontal bleiben.

Ergebnis: 2,4

Lösung: Wir bezeichnen Ferbs Volumen mit V , seine Höhe mit $h = 0,6\text{ m}$ und seine Dichte mit $\rho_{\text{Ferb}} = 125\text{ kg/m}^3$. Nach dem Sprung füllt sich die von Ferb hinterlassene Lücke im Wasser. Dadurch verliert der See die Energie $E = V\rho_{\text{Wasser}}g\frac{h}{2}$, da die Masse des einfließenden Wassers $V\rho_{\text{water}}$ ist und sein Schwerpunkt in einer Tiefe von $\frac{h}{2}$ liegt (Der See ist groß genug, dass sich die Lage der Wasseroberfläche nicht verändert). Wir benötigen die Höhe H , die Ferb beim Sprung erreicht. Am höchsten Punkt hat er keine kinetische Energie, die gesamte vom Wasser auf Ferb übertragene Energie wird daher in potentielle Energie $E = V\rho_{\text{Ferb}}gH$ umgewandelt. Vergleicht man beide Ausdrücke für die Energie E , erhalten wir

$$V\rho_{\text{Wasser}}g\frac{h}{2} = V\rho_{\text{Ferb}}gH,$$

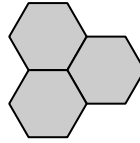
$$H = \frac{\rho_{\text{Wasser}}}{\rho_{\text{Ferb}}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1000\text{ kg/m}^3}{125\text{ kg/m}^3} \cdot \frac{0,6\text{ m}}{2} = 2,4\text{ m}.$$

Ferbs Deckfläche wird also eine Höhe von 2,4 m erreichen.

Aufgabe 39 ... Ausschneiden von Polygonen

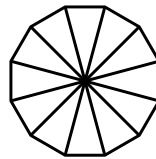
Victor nahm Papier und schnitt drei regelmäßige Polygone aus, die paarweise eine unterschiedliche Anzahl an Seiten und dieselbe Seitenlänge haben. Überraschenderweise konnte er sie so auf den Tisch legen, dass sie alle einen gemeinsamen Eckpunkt und jedes Paar von Polygonen eine gemeinsame Seite hatten. Auf diese Weise erhält Victor ein (unregelmäßiges) n -gon. Welchen größten möglichen Wert kann n annehmen?

Anmerkung: Wenn wir erlauben, dass die Polygone die gleiche Anzahl an Seiten haben, wäre eine mögliche Anordnung, um ein n -gon zu erhalten, in der folgenden Abbildung dargestellt. In diesem Fall hätte Victor $n = 12$.



Ergebnis: 46

Lösung: Jedes regelmäßige m -gon kann wie in der Abbildung in m kongruente gleichschenklige Dreiecke unterteilt werden.



Die gegenüber der Basis liegenden Winkel müssen sich zu 360° summieren. Alle anderen Winkel tragen zur Summe der Winkel des m -gons bei. Da die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, bedeutet dies, dass die Winkelsumme im m -gon $m \cdot 180^\circ - 360^\circ = (m - 2) \cdot 180^\circ$ ist. Jeder Winkel in einem regelmäßigen m -gon hat denselben Wert, daher beträgt die Größe jedes einzelnen $\frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ$.

Wenn wir die Polygone gemäß der Aufgabenstellung anordnen möchten, muss die Summe der Winkel an dem gemeinsamen Eckpunkt 360° betragen. Bezeichnen wir die Anzahl der Ecken der regelmäßigen Polygone mit x , y und z , so muss mit den Informationen aus dem vorherigen Abschnitt gelten:

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180^\circ + \frac{y-2}{y} \cdot 180^\circ + \frac{z-2}{z} \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Wir können die gesamte Gleichung durch 180° teilen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x} + \frac{y-2}{y} + \frac{z-2}{z} &= 2, \\ \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \left(1 - \frac{2}{y}\right) + \left(1 - \frac{2}{z}\right) &= 2, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lassen Sie uns alle Tripel (x, y, z) finden, die diese Gleichung erfüllen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x > y > z$. Wenn $z \geq 6$, dann wäre $y \geq 7$ und $x \geq 8$. Dann gilt jedoch

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Deshalb kann z nicht ≥ 6 sein, sodass z einer der Werte 3, 4 oder 5 sein muss. Behandeln wir jeden Fall einzeln.

Fall $z = 3$. In diesem Fall gilt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Durch Multiplikation der Nenner ergibt sich $6y + 6x = xy$, was sich (nach dem Hinzufügen von 36 auf beiden Seiten) in die Form $(x-6)(y-6) = 36$ schreiben lässt. Da die Zahl 36 als Produkt zweier verschiedener Zahlen in vier Varianten geschrieben werden kann, $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, erhalten wir die vier Lösungen, dass das Paar (x, y) eines der Paare $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$ ist.

Fall $z = 4$. Ähnlich wie im vorherigen Fall gilt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, was nach Multiplikation $4y + 4x = xy$ ergibt. Nach dem Hinzufügen von 16 und dem Faktorisieren erhalten wir die Gleichung $(x - 4)(y - 4) = 16$. Als mögliche Lösungspaare (x, y) erhalten wir $(20, 5)$ und $(12, 6)$.

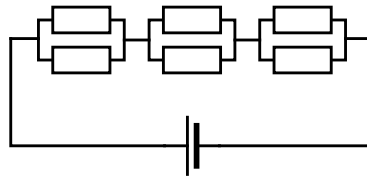
Fall $z = 5$. In diesem Fall haben wir die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}$, was zu $10y + 10x = 3xy$ führt. Multiplizieren wir diese Gleichung mit 3 und addieren 100, so ergibt sich $(3x - 10)(3y - 10) = 100$. Dies führt zu den Lösungen für (x, y) , wobei die Paare $(\frac{110}{3}, \frac{11}{3})$, $(20, 4)$, $(\frac{35}{3}, \frac{14}{3})$, $(10, 5)$ in Betracht kommen. Hierbei interessieren uns jedoch keine Paare mit Brüchen. Außerdem haben wir das Tripel $(20, 5, 4)$ im vorherigen Fall bereits erhalten (und es gehört nicht in diesen Fall). Die einzige weitere Lösung aus diesem Fall, $(x, y) = (10, 5)$, erfüllt die Bedingung $y > z$ nicht. Also gibt es in diesem Fall keine neuen Lösungen.

Die einzigen Tripel (x, y, z) , die die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ und die Ungleichungen $x > y > z$ erfüllen, sind die Tripel $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$ und $(12, 6, 4)$.

Es ist ersichtlich, dass bei Zusammenfügen der Polygone bei jedem Polygon alle Seiten außer zwei Teil des Randes des großen Polygons sind. Dies bedeutet, dass wir $n = (x - 2) + (y - 2) + (z - 2) = (x + y + z) - 6$ erhalten müssen, sodass wir versuchen, die Zahl $x + y + z - 6$ zu maximieren. Unter den gefundenen Tripeln sind die Werte von $x + y + z - 6$ 46, 30, 26, 22, 23 und 16. Daher ist der größtmögliche Wert von n 46.

Aufgabe 40 ... Ein Problem mit Widerstand

Mathias hat einen Stromkreis wie abgebildet aufgebaut. Er verwendete eine Spannungsquelle mit einer Spannung von 3 V und Widerstände mit $2\ \Omega$, $3\ \Omega$, $4\ \Omega$, $5\ \Omega$, $6\ \Omega$ und $7\ \Omega$. Leider hat er die exakte Position der einzelnen Widerstände im Stromkreis vergessen. Er kennt nur die Gesamtstromstärke im Stromkreis von $\frac{273}{580}$ A. Wie groß ist die Stromstärke in Ampere, die durch den Widerstand mit $5\ \Omega$ fließt?



Ergebnis: $\frac{39}{290}$

Lösung: Der Widerstand R_0 zweier Einzelwiderstände R_1 und R_2 in Parallelschaltung wird berechnet durch

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Drei Parallelschaltkreise aus zwei Widerständen sind in Serie geschaltet, sodass der Gesamtwiderstand der Schaltung die Summe von drei Brüchen in obiger Form ist. Der Gesamtwiderstand lässt sich aus der Spannung $U = 3\text{ V}$ der Quelle und der Gesamtstromstärke $I = \frac{273}{580}$ A berechnen. Das Ergebnis ist

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3\text{ V}}{\frac{273}{580}\text{ A}} = \frac{580}{91}\ \Omega.$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$\frac{580}{91}\ \Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

wobei R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 und R_6 die Werte $2\ \Omega, 3\ \Omega, 4\ \Omega, 5\ \Omega, 6\ \Omega$ und $7\ \Omega$ in einer noch unbekannten Reihenfolge annehmen. Konzentrieren wir uns auf die Maßzahlen ohne Einheiten. Um 91 als Nenner zu erhalten, muss das kleinste gemeinsame Vielfache von $R_1 + R_2, R_3 + R_4$ und $R_5 + R_6$ ein Vielfaches von 91

sein. Die Primfaktorzerlegung von 91 ist $91 = 7 \cdot 13$. Mindestens einer der Nenner muss daher durch 13 teilbar sein. Da er gleichzeitig die Summe von zwei Zahlen aus der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist, bleibt $6 + 7$ als einzige Möglichkeit. Das bedeutet, dass einer der drei Parallelschaltkreise aus den beiden Widerständen $6\ \Omega$ und $7\ \Omega$ besteht. Aus demselben Grund muss sich ein Widerstandspaar zu einem Vielfachen von 7 summieren. Das ist nur möglich, wenn wir Paare aus $2\ \Omega$ und $5\ \Omega$ bzw. aus $3\ \Omega$ und $4\ \Omega$ bilden.

Es bleibt also nur mehr, die Stromstärke durch den Widerstand mit $5\ \Omega$ zu berechnen. Er ist parallel geschaltet zum Widerstand mit $2\ \Omega$. Gemeinsam haben sie einen Widerstand von

$$R_{25} = \frac{2\ \Omega \cdot 5\ \Omega}{2\ \Omega + 5\ \Omega} = \frac{10}{7}\ \Omega.$$

Die Stromstärke durch die Parallelschaltung ist die Gesamtstromstärke I , die Spannung, die an beiden Widerständen abfällt daher

$$U_{25} = R_{25}I = \frac{10}{7}\ \Omega \cdot \frac{273}{580}\ \text{A} = \frac{39}{58}\ \text{V}.$$

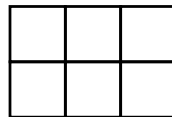
Schließlich erhalten wir für die Stromstärke I' im Widerstand mit $R' = 5\ \Omega$

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\ \text{V}}{5\ \Omega} = \frac{39}{290}\ \text{A}.$$

Aufgabe 41 ... Überall Rechtecke

Majo hat eine $m \times n$ -Tabelle gezeichnet, die in mn Einheitsquadrate unterteilt ist. Er hat gezählt, dass es 141 400 Rechtecke gibt, die durch die Linien der Tabelle gebildet werden. Wie viele Einheitsquadrate enthält die Tabelle?

Anmerkung: Wir betrachten jedes Quadrat als Rechteck. Zum Beispiel gibt es in einer 2×3 -Tabelle unten 18 Rechtecke.



Ergebnis: 700

Lösung: Wir müssen die Anzahl der Rechtecke in Abhängigkeit von m (Anzahl der Zeilen) und n (Anzahl der Spalten) berechnen. Betrachten wir die vertikalen Linien, die von oben nach unten durch die Tabelle verlaufen (es gibt $n + 1$ davon), und ebenso die horizontalen Linien, die von links nach rechts verlaufen (es gibt $m + 1$ davon). Jede Kombination aus zwei solchen vertikalen Linien und zwei horizontalen Linien ergibt genau ein Rechteck. Umgekehrt bestimmt jedes Rechteck genau zwei vertikale und zwei horizontale Linien, die durch die Verlängerung der Seiten entstehen.

Die Anzahl an Viererkombinationen aus zwei vertikalen und zwei horizontalen Linien ist daher gleich der Anzahl an Rechtecken.

Daher müssen wir nur die Anzahl dieser Viererkombinationen berechnen. Für die erste vertikale Linie haben wir $n + 1$ Möglichkeiten und für die zweite n Möglichkeiten. Dabei wird jedoch jedes Linienpaar in zwei unterschiedlichen Reihenfolgen gewählt und somit doppelt gezählt. Daher gibt es $\frac{(n+1)n}{2}$ Arten um vertikale Linien auszuwählen. Ähnlich können die horizontalen Linien auf $\frac{(m+1)m}{2}$ Arten ausgewählt werden. Die Gesamtanzahl der Viererkombinationen von Linien ist somit $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$.

Wir suchen also die Zahlen m und n , sodass

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400,$$

$$(m+1)m(n+1)n = 565\,600$$

gilt.

Wir bemerken, dass die Zahl 565 600 durch die Primzahl 101 teilbar ist (da $565\,600 = 5600 \cdot 101$). Daher muss 101 mindestens einen der Faktoren auf der linken Seite teilen. Eine mögliche Lösung, inspiriert durch die Teilbarkeit von 565 600 durch 100, ist, $m = 100$ (und somit $m + 1 = 101$) zu setzen. Die Gleichung reduziert sich dann zu $(n + 1)n = 56$, was für $n = 7$ gilt.

Es kann überprüft werden, dass andere Multiplikationen mit 101 (wie 808 und höher) keine Lösung liefern, da das Produkt in diesen Fällen größer als 565 600 wird. Dies bedeutet, dass Majo entweder eine 100×7 - oder eine 7×100 -Tabelle gezeichnet hat, die aus $100 \cdot 7 = 700$ Einheitsquadraten besteht.

Aufgabe 42 ... Ein netter Satellit

Drei Satelliten umkreisen die Erde. Ihre Bahnen sind Kreise mit Mittelpunkt im Erdmittelpunkt und nahezu gleichen Radien. Außerdem liegen alle drei Bahnen in derselben Ebene. Die Satelliten verfügen über Antriebe, mit denen sie die gleiche Winkelgeschwindigkeit beibehalten können. Der erste Satellit umkreist die Erde alle 90 Minuten, der zweite alle 30 Minuten und der dritte alle 15 Minuten, wobei alle Satelliten gegen den Uhrzeigersinn kreisen. Beim Start befanden sich alle Satelliten fast am selben Ort. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Satelliten zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt ein spitzwinkliges Dreieck bilden?

Ergebnis: $\frac{7}{30} \doteq 23,3\%$

Lösung: Der erste Satellit umkreist die Erde einmal alle 90 Minuten, was bedeutet, dass er sich um $\frac{360^\circ}{90} = 4^\circ$ pro Minute dreht. Ebenso dreht sich der zweite Satellit um $\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$ pro Minute und der dritte Satellit um $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$ pro Minute.

Anstatt die drei umlaufenden Satelliten zu betrachten, können wir die Situation aus der Perspektive eines der Satelliten betrachten. Der Hauptvorteil hierbei ist, dass ein Satellit als stationär angesehen wird. Zum Beispiel nehmen wir an, dass der erste Satellit stationär ist. In diesem Bezugssystem dreht sich der zweite Satellit um $12^\circ - 4^\circ = 8^\circ$ pro Minute und der dritte Satellit um $24^\circ - 4^\circ = 20^\circ$ pro Minute.

Nun zur Spitzwinkligkeit. Die Satelliten befinden sich auf dem selben Kreis. Wenn zwei von ihnen einen Durchmesser bilden, dann sagt uns der Satz des Thales, dass die Satelliten ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Wir können erkennen, dass dies eine Art Grenzfall zwischen einem spitzwinkligen und einem stumpfwinkligen Dreieck ist:

- Liegt ein Durchmesser des Kreises so, dass alle drei Satelliten auf derselben Seite dieses Durchmessers liegen, dann bilden die Satelliten ein stumpfwinkliges Dreieck.
- Gibt es keinen solchen Durchmesser, dann bilden die Satelliten ein spitzwinkliges Dreieck.

Die Spitzwinkligkeit bzw. Stumpfwinkligkeit kann sich nur ändern, wenn zwei Satelliten einen Durchmesser bilden oder wenn zwei Satelliten denselben Punkt einnehmen. Für das Paar bestehend aus dem ersten und dem zweiten Satelliten geschieht dies alle $\frac{180^\circ}{8^\circ} = 22,5$ Minuten, für das Paar aus dem ersten und dem dritten Satelliten alle $\frac{180^\circ}{20^\circ} = 9$ Minuten und für das Paar aus dem zweiten und dem dritten Satelliten alle $\frac{180^\circ}{20^\circ - 8^\circ} = 15$ Minuten. Vielfache dieser Zeiten sind unsere Schlüsselpunkte (kritischen Punkte):

- Von Minute 0 bis Minute 9 (der erste und der dritte Satellit bilden einen Durchmesser) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.
- Von Minute 9 bis Minute 15 (der zweite und der dritte Satellit bilden einen Durchmesser) – sie bilden ein spitzwinkliges Dreieck.
- Von Minute 15 bis Minute 18 (der erste und der dritte Satellit befinden sich im selben Punkt) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.
- Von Minute 18 bis Minute 22,5 (der erste und der zweite Satellit bilden einen Durchmesser) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.

- Von Minute 22,5 bis Minute 27 (der erste und der dritte Satellit bilden einen Durchmesser) – sie bilden ein spitzwinkliges Dreieck.
- Von Minute 27 bis Minute 30 (der zweite und der dritte Satellit befinden sich im selben Punkt) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.
- Von Minute 30 bis Minute 36 (der erste und der dritte Satellit befinden sich im selben Punkt) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.
- Von Minute 36 bis Minute 45 (der erste und der zweite Satellit befinden sich im selben Punkt und bilden mit dem dritten Satelliten einen Durchmesser) – sie bilden ein stumpfwinkliges Dreieck.

Aufgrund der Konfiguration in Minute 45 erkennen wir, dass von Minute 45 bis Minute 90 dieselben Schritte wie oben in umgekehrter Reihenfolge stattfinden. Dies liegt daran, dass, wenn wir die Bewegungen in der axialen Symmetrie bezüglich des Durchmessers betrachten, der in Minute 45 von den Satelliten gebildet wird, wir die „rückwärtslaufenden“ Bewegungen der Satelliten von Minute 45 bis Minute 0 sehen würden. Daher geschieht nichts grundlegend Neues, und wir können die Wahrscheinlichkeit aus den Bewegungen zwischen Minute 0 und 45 ableiten. Während dieser 45 Minuten bildeten die Satelliten ein spitzwinkliges Dreieck zwischen Minute 9 und Minute 15 sowie zwischen Minute 22,5 und Minute 27. Insgesamt $(15 - 9) + (27 - 22,5) = 10,5$ Minuten. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Satelliten ein spitzwinkliges Dreieck bilden:

$$\frac{10,5}{45} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \doteq 23,3\%.$$

Danksagung

Vorsitz des Aufgabenauswahlkomitees

Marián Poturnay

Aufgabenvorschläge

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Aufgaben und Lösungsformulierung

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Überarbeitung

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dluhošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Übersetzung

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskiy, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisaj, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinator:innen

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Wettbewerbsstandorte

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biala:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkové Timravy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkeru • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernoláková • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu