Solutions

12ème édition de Naboj Junior

22 Novembre 2024

Bonjour,

Vous avez actuellement entre vos mains un livret avec les problèmes et les solutions du concours Naboj Junior 2024. Naboj Junior est une compétition internationale de mathématiques et de physique conçue principalement pour des équipes de 4 élèves de 4ème et 3ème. La compétition dure 120 minutes au cours desquelles les équipes tentent de résoudre autant de problèmes que possible. Les problèmes portent non seulement sur les connaissances en mathématiques et en physique mais aussi sur la capacité à aborder les problèmes de manière innovante et ingénieuse.

La 12ème édition de Naboj Junior a eu lieu le 22 novembre 2024. Naboj Junior s'est déroulé dans 60 villes en Slovaquie, République Tchèque, Pologne et en Autriche. En même temps, la compétition s'est déroulée en ligne en Espagne, aux Pays-Bas, en Belgique et en Croatie.

En France et en Belgique, la compétition est organisée par des étudiants (post)universitaires bénévoles, qui consacrent leur temps en leur énergie pour permettre aux élèves Français et Belges de concourir et de tester leurs connaissances. L'objectif de Naboj Junior est de développer les talents des enfants en mathématiques et en physique tout en démontrant que les sciences naturelles offrent de nombreux défis ainsi que beaucoup d'intérêts à tous et à toutes.

La compétition Naboj Junior a été créée en tant que projet commun de l'association Trojsten (Slovaquie) et de la compétition MFF UK Vyfuk (République Tchèque). Les membres de ces organisations sont des étudiants universitaires de la Faculté de mathématiques, de physique et d'informatique de l'Université Comenius de Bratislava et de la Faculté de mathématiques et de physique de l'Université Charles de Prague, qui s'efforcent de développer les talents des étudiants et d'accroître l'intérêt pour les sciences naturelles.

Nous avons déjà hâte de vous voir participer l'année prochaine,

Juraj pour l'équipe Naboj Junior Française et Belge

Problème 1 ... Journal secret

Pierre vient de terminer d'écrire la première partie de son journal très secret et il veut maintenant le mettre dans une boîte pour que personne ne puisse le lire. Il souhaite utiliser un cadenas qu'il a acheté il y a quelques années, mais il a oublié le code à 3 chiffres qui permet de l'ouvrir. Il peut tester un code toutes les 3 secondes. Combien de minutes faudra-t-il à Pierre pour essayer toutes les combinaisons possibles de ce cadenas ?

Résultat: 50

Solution: Tout d'abord, déterminons le nombre total de combinaisons possibles à 3 chiffres. Il s'agit de toutes les combinaisons allant de 000 à 999, ce qui fait un total de 1000 combinaisons. Essayer une combinaison prend 3 secondes à Pierre, donc essayer les 1000 combinaisons lui prendra $3 \cdot 1000 = 3000$ secondes, soit $\frac{3000}{60} = 50$ minutes.

Problème 2 ... Réparation du sol

Alice répare le sol de son appartement. Pour cela, elle a acheté plusieurs planches en chêne avec une densité de $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Elle a mesuré les dimensions d'une des planches avec différents instruments et a trouvé que la longueur est de 0,8 m, la largeur de 12,5 cm et l'épaisseur de 15 mm. Quel est le poids d'une planche en grammes ?

Résultat: 900

Solution: Nous commençons par convertir toutes les unités en unités de base. Nous savons que 12,5 cm correspond à 0,125 m et que 15 mm correspond à 0,015 m. Nous pouvons maintenant calculer le volume d'une planche en multipliant ses trois dimensions. Cela nous donne un volume de $0{,}8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}125\,\mathrm{m} \cdot 0{,}015\,\mathrm{m} = 0{,}0015\,\mathrm{m^3}$. Pour déterminer le poids de la planche, nous devons multiplier son volume par la densité du bois, ce qui nous donne une masse de $0{,}0015\,\mathrm{m^3} \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$. Notre réponse doit être donnée en grammes, soit $0{,}9\,\mathrm{kg} = 900\,\mathrm{g}$.

Problème 3 ... Tour de magie n° 1

Paul veut réaliser un tour de magie avec son jeu de 6 cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Ce tour commence par disposer les six cartes sur la table en une seule rangée. Pour que le tour fonctionne, il est nécessaire que chaque paire de cartes voisines diffère de plus de 2. Combien de dispositions différentes Paul peut-il organiser pour satisfaire cette condition ?

Résultat: 2

Solution: Remarquons que les cartes 3 et 4 n'ont qu'une seule autre carte avec une valeur qui diffère de plus de 2. Pour la carte 3, c'est la carte 6 et pour la carte 4, c'est la carte 1. En conséquence, les cartes 3 et 4 ne peuvent avoir qu'une seule autre carte à côté d'elles, ce qui est possible uniquement si elles sont placées au début ou à la fin de la séquence entière. Ainsi, les ordres possibles doivent être de la forme suivante :

3					4
4					3

De plus, nous savons quels sont les seuls nombres pouvant se trouver à côté des cartes 3 et 4, nous pouvons donc ajuster les ordres ainsi :

3	6			1	4
4	1			6	3

Il ne reste plus que les cartes 2 et 5. Nous voyons que dans les deux ordres, il n'y a qu'une seule manière de les positionner, nous obtenons donc les séquences 3, 6, 2, 5, 1, 4 et 4, 1, 5, 2, 6, 3 comme les seules 2 dispositions possibles satisfaisant la condition.

3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3

Problème 4 ... Cardio parmi les bouleaux

Daniela et Janet courent le long de l'allée des bouleaux où 10 bouleaux ont été plantés. Les distances entre deux bouleaux voisins est toujours la même. Daniela commence au 1^{er} bouleau et fait ce qui suit : elle court jusqu'au 2^{e} bouleau et revient, puis jusqu'au 3^{e} bouleau et revient au 1^{er} bouleau, puis jusqu'au 4^{e} et revient au 1^{er} bouleau, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle atteigne le 10^{e} bouleau et revienne au 1^{er} bouleau.
Janet fait quelque chose de similaire, mais commence au 10^{e} bouleau, puis court jusqu'au 9^{e} bouleau et revient, jusqu'au 8^{e} bouleau et revient au 10^{e} bouleau... jusqu'à ce qu'elle atteigne le 1^{er} bouleau et revienne au 10^{e} bouleau.
Les deux filles courent à la même vitesse et commencent en même temps. Combien de fois se rencontreront-elles pendant cette course ?

Résultat: 10

Solution: Comme elles courent à la même vitesse, il faudra à Diane le même temps pour atteindre le 2ème bouleau qu'il faudra à Jeanne pour courir jusqu'au 9ème bouleau. Cela s'applique également à tous les bouleaux suivants : elles seront au même moment au 3ème et au 8ème bouleau, au 4ème et au 7ème bouleau, au 5ème et au 6ème bouleau... etc. Cependant, une fois que la situation où Diane court vers un bouleau avec un numéro plus élevé que celui de Jeanne se produit, elles se rencontreront pour la première fois. Ainsi, pendant que Diane se rend au 6ème bouleau et que Jeanne se rend au 5ème bouleau, elles se rencontreront pour la première fois. De plus, elles se rencontreront à nouveau lors de leur retour de ces bouleaux. À partir de ce moment, Diane courra toujours vers un bouleau avec un numéro plus élevé que celui de Jeanne, donc elles se rencontreront de cette manière lors de chaque bouleau suivant, ainsi deux fois pour chaque bouleau suivant qu'elles atteignent. En tout, il y a cinq de ces bouleaux (pour Diane du 6ème au 10ème bouleau, pour Jeanne du 5ème au 1er), donc elles se rencontreront $5 \cdot 2 = 10$ fois.

Problème 5 ... Pilote de course passionné

Sébastien est pilote de course. Comme sa voiture de course porte le numéro 181, il essaie d'assister à tous les moments où la voiture indique qu'elle a parcouru un nombre de kilomètres qui est un multiple de 181. Aujourd'hui, Sébastien a commencé à conduire lorsque la voiture a indiqué qu'elle avait parcouru 32 768 kilomètres, ce qui est supérieur de 7 kilomètres au multiple précédent de 181 (qui est 32 761). Sébastien veut conduire sa voiture de manière à ce que la prochaine fois que la voiture aura parcouru un nombre de kilomètres qui est un multiple de 181, cela se produise exactement dans 2 heures. Quelle doit être la vitesse moyenne de Sébastien en kilomètres par heure pour atteindre cet objectif ?

Résultat: 87

Solution: Nous savons que la différence entre chaque deux multiples consécutifs de n est n. Ainsi, la différence entre deux multiples consécutifs de 181 est 181. Il est indiqué que le multiple précédent de 181 était en retard de 7 kilomètres. Ainsi, le prochain multiple de 181 sera dans $181 - 7 = 174$ kilomètres. Nous savons que Sébastien veut y être dans exactement 2 heures. Sa vitesse moyenne pendant ces deux heures doit donc être $v = \frac{174\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 87$ kilomètres par heure.

Problème 6 ... Mensonge métamorphosé

Matthieu a un nombre préféré. Il a fait six déclarations à propos de ce nombre et a assigné un numéro à chacune des déclarations. Trois d'entre elles sont vraies et trois d'entre elles sont fausses. Les déclarations sont :

1. C'est un nombre composé.

2. C'est un nombre impair.
4. C'est un nombre inférieur à 30.
8. C'est un nombre à un chiffre.
16. Son chiffre des unités est 9.
32. Il est divisible par 5.

Matthieu prétend que son nombre préféré est également la somme des numéros des trois déclarations vraies. Quel est le nombre préféré de Matthieu ?

Résultat: 35

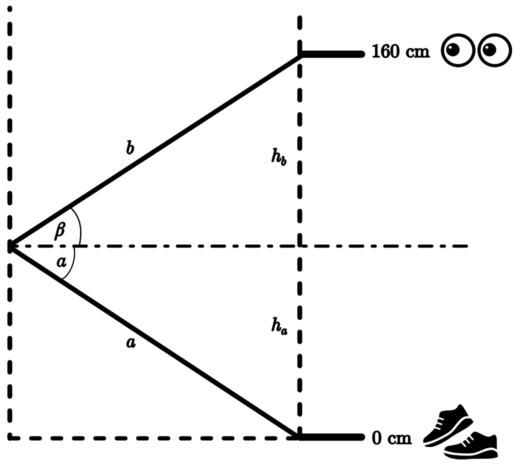
Solution: Nous commençons par examiner la première déclaration. Supposons qu'elle soit fausse. Cela signifierait que le nombre de Matthieu est soit 1, soit un nombre premier. La somme de trois entiers positifs n'est jamais 1, donc cela doit être un nombre premier. Cependant, il doit également être la somme de trois des nombres 2, 4, 8, 16, 32. Tous ces nombres sont pairs, donc la somme de trois d'entre eux est également paire. La somme n'est manifestement pas 2, donc elle est un nombre pair, ce qui ne peut pas être un nombre premier. Nous avons donc une contradiction, ce qui signifie que la première déclaration est vraie.
La première déclaration est la seule dont le numéro est impair. De ce fait, la somme des déclarations vraies sera également impair, donc la deuxième déclaration doit être vraie. Il reste à trouver la troisième déclaration vraie. Regardons la déclaration avec le numéro 4. Si elle était la troisième déclaration vraie, le nombre préféré de Matthieu serait $1 + 2 + 4 = 7$. Mais dans ce cas, la déclaration avec le numéro 8 serait également vraie, donc nous aurions quatre déclarations vraies. C'est impossible, donc la déclaration avec le numéro 4 doit être fausse. Par conséquent, le nombre préféré de Matthieu doit être d'au moins 30. La seule façon de rendre cela vrai est de supposer que la déclaration avec le numéro 32 est vraie. Cela fait que le nombre préféré de Matthieu est $1 + 2 + 32 = 35$.
Il est facile de vérifier que pour le nombre 35, les déclarations vraies sont précisément celles avec les numéros 1, 2, et 32. Ainsi, 35 est effectivement le nombre préféré de Matthieu.

Problème 7 . . . Problème élégant

Michaël est un gars très élégant. Lorsqu'il essaie ses tenues, il est très important pour lui de voir ses chaussures dans le miroir. Il a acheté un nouveau miroir rectangulaire et souhaite maintenant l'accrocher à un mur de manière à voir ses pieds en étant à 120 cm du miroir. Ses yeux sont à une hauteur de 160 cm au-dessus du sol. Considérons que ses chaussures sont à une hauteur de 0 cm. Quelle est la hauteur maximale en centimètres au-dessus du sol à laquelle le bord inférieur du miroir peut être placé ?
Note: Considérer que le miroir n'a pas de cadre.

Résultat: 80

Solution: Nous savons qu'il doit exister un faisceau lumineux qui part des chaussures de Michaël vers le miroir de manière à ce qu'après réflexion, il atteigne les yeux de Michaël à une hauteur de 160 cm. Nous devons réaliser que les yeux et les pieds sont à la même distance horizontale du miroir. De plus, il faut se rappeler que lorsque le faisceau atteint le miroir, son angle d'incidence sera égal à l'angle de réflexion. Nous pouvons donc dessiner cette figure :



Puisque les angles α et β sont les mêmes, les distances a et b le seront également, et, ce qui est encore plus important, les hauteurs que le faisceau va atteindre h_a et h_b seront également identiques. Par conséquent, l'endroit où le faisceau va se réfléchir sur le miroir sera exactement au milieu entre les chaussures de Michaël et ses yeux. Puisque ses yeux sont à une hauteur de 160 cm, la réflexion se produira à une hauteur de $\frac{160\,\text{cm}}{2} = 80\,\text{cm}$.
Ainsi, la hauteur maximale du bord inférieur du miroir est de 80 cm au-dessus du sol. Si elle était plus haute, le faisceau ne pourrait pas se réfléchir à cette hauteur et Michaël ne pourrait pas voir ses chaussures dans le miroir.

Problème 8 ... Tour de magie n° 2

Paul réalise une fois de plus un tour de magie avec six cartes étiquetées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Cette fois, il a également préparé un tableau de 2×3 dans lequel ces cartes s'intègrent parfaitement. Pour que ce tour de magie fonctionne, Paul doit disposer les cartes dans le tableau de telle sorte que les nombres de chaque ligne (de gauche à droite) et de chaque colonne (de haut en bas) soient dans un ordre croissant. Un tel agencement peut être vu dans la figure. Combien de façons différentes Paul peut-il disposer les cartes pour satisfaire cette condition ?

1	2	5
3	4	6

Résultat: 5

Solution: Commençons par examiner le nombre dans le coin supérieur gauche. Chaque nombre dans ce tableau peut être atteint à partir de ce point en se déplaçant vers le bas ou vers la droite. Par conséquent, tous les nombres du tableau doivent être supérieurs à ce nombre. Cela force le nombre dans le coin supérieur gauche à être 1. De même, il doit y avoir le nombre 6 dans le coin inférieur droit.

1		
		6

Ensuite, examinons où le nombre 2 peut être placé. Il doit être dans l'une des cases adjacentes à celle contenant le nombre 1 (sinon, il y aurait une case avec un nombre entre 1 et 2, ce qui est impossible). Nous avons donc seulement deux possibilités pour placer le nombre 2 :

Cas 1. Le nombre 2 est à droite du nombre 1. Dans ce cas, nous avons trois possibilités pour le nombre à droite du nombre 2 (cela peut être 3, 4 ou 5). Pour chaque choix de cette case, nous pouvons placer les cases restantes de manière unique.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

Cas 2. Le nombre 2 est en dessous du nombre 1. Dans ce cas, nous avons encore trois possibilités pour la case à droite de la case avec le nombre 2. Les cases restantes peuvent être remplies de manière unique, mais nous ne trouvons pas une solution valide dans chaque cas (s'il y a le nombre 3 à droite du nombre 2, nous n'obtenons pas une solution valide - la deuxième colonne aura un nombre plus grand dans la rangée supérieure que dans la rangée inférieure).

1	4	5
2	3	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

Il reste à additionner les possibilités des deux cas, donc nous avons $3 + 2 = 5$ possibilités pour placer les cartes dans le tableau de manière valide.

Problème 9 . . . Satellites

NASA a lancé deux satellites, Albert et Béthany. Pour des raisons pratiques, ils ont tous les deux été lancés directement au-dessus de Greenwich. Ils ont été lancés exactement au même moment et dans exactement la même direction, mais à des hauteurs différentes. Cela fait que, bien qu'ils suivent tous les deux une trajectoire circulaire autour de la Terre, leur vitesse angulaire est différente. Albert se déplace avec une vitesse angulaire de 90° par heure, tandis que Béthany se déplace avec une vitesse angulaire de 120° par heure. Après combien d'heures après le lancement Albert et Béthany se retrouveront-ils pour la première fois, à nouveau au-dessus du même point sur Terre (possiblement autre que Greenwich) ?

Résultat: 12

Solution: Chaque heure, Béthany se déplace de $120° - 90° = 30°$ de plus qu'Albert. Cela continuera à se produire chaque heure, jusqu'à ce que Béthany ait parcouru exactement 360° de plus qu'Albert - à ce moment-là, Béthany aura effectué un tour complet de plus qu'Albert et sera donc à nouveau l'un au-dessus de l'autre. Comme Béthany gagne 30° chaque heure, elle gagnera exactement 360° après $\frac{360}{30} = 12$ heures.

Problème 10 . . . La route occidentale

Tout le monde dans le Far West adore la route "Western Road", car elle est parfaitement droite sans aucun tournant. Alors qu'un certain enfant nommé Billy marchait sur cette route, il remarqua un phénomène intéressant : en regardant derrière lui, il voit que le soleil est exactement au-dessus de la route qui s'étend derrière lui. Il regarde devant lui et il remarque que la route se termine brusquement et à la place, deux objets se trouvaient directement devant lui, l'un à côté de l'autre. Il y a un arbre de 3 m de haut et un panneau d'affichage de 2,4 m de haut et 5 m de large, directement en face de lui. Le bas du panneau est posé sur le sol. Billy mesure que la longueur de l'ombre de l'arbre est de 75 cm. Quelle est la superficie de l'ombre projetée par le panneau d'affiche en mètres carrés ?

Résultat: 3

Solution: Puisque le panneau d'affichage est directement tourné vers le soleil, la largeur de son ombre restera la même que la largeur originale, soit 5 m. Cependant, sa hauteur changera. Nous savons que la hauteur de l'arbre juste à côté a changé de 3 m à 0,75 m. Ainsi, le rapport entre la hauteur de l'arbre et la longueur de son ombre est $\frac{3}{0{,}75} = \frac{4}{1}$. Ce rapport sera le même pour le panneau d'affichage, donc la longueur de son ombre est $\frac{2{,}4\,\mathrm{m}}{4} = 0{,}6\,\mathrm{m}$. La superficie totale de l'ombre est sa longueur multipliée par sa largeur, donc $0{,}6\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}^2$.

Problème 11 ... Le réchauffement climatique

Un jour, Jean a dit : "Il fait si chaud dans le cuiseur que, si j'étais aux États-Unis il ferait deux fois plus chaud." Il voulait dire que la température actuelle dans le cuiseur, mesurée en Fahrenheit, serait le double de la température mesurée en Celsius. Quelle était la température dans le cuiseur en degrés Celsius ?

Note: Si la température en degrés Celsius est $N\,°\mathrm{C}$, alors la température en degrés Fahrenheit est

$$\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right)+32\right)\,°\mathrm{F}.$$

Résultat: 160

Solution: Appelons la température en degrés Celsius $N\,°\mathrm{C}$. Nous savons que la température équivalente en Fahrenheit peut être trouvée comme $\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right)+32\right)\,°\mathrm{F}$. Cependant, nous savons que cette température doit être le double de la température en degrés Celsius, donc $2N\,°\mathrm{F}$. Par conséquent, nous pouvons écrire une équation $((\frac{9}{5}\cdot N)+32)=2N$. Nous réarrangeons l'équation comme suit :

$$2N-\frac{9}{5}\cdot N=32.$$

De là

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\cdot N&=32,\\ N&=160.\end{aligned}$$

La température dans le cuiseur était de $160\,°\mathrm{C}$.

Problème 12 ... Débuts lents

Pour son seizième anniversaire, Michel a reçu un livre en cadeau. Cela fait un moment que Michel n'a pas lu de livre, il sait donc qu'il lui faudra un certain temps pour s'y plonger complètement. Par conséquent, il a élaboré un plan spécial pour lire l'ensemble du livre : chaque jour, il lira une page de plus que le jour précédent, en commençant par 1 page le premier jour. Si le livre contient 2024 pages, combien de jours faudra-t-il à Michel pour lire l'ensemble du livre ?

Résultat: 64

Solution: Après un jour, Michel aura lu 1 page, après deux jours $1+2$ pages, après trois jours $1+2+3$ pages et ainsi de suite. Donc, après n jours, il aura lu $1+2+\ldots+n$ pages. En utilisant une formule du cahier de formules, nous pouvons écrire cette somme comme $\frac{n(n+1)}{2}$. La question est de savoir quel est le plus petit nombre n tel que $\frac{n(n+1)}{2}$ soit au moins 2024. Ainsi, nous devons résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2}&\geq 2024,\\ n(n+1)&\geq 4048.\end{aligned}$$

Nous pouvons estimer que pour $n=60$, le produit $n(n+1)$ est à peu près 3600, donc le n que nous recherchons sera un peu plus grand. Et vraiment, nous pouvons constater que $63\cdot 64=4032\leq 4048$ et $64\cdot 65=4160\geq 4048$. Par conséquent, lire l'ensemble du livre prendra 64 jours à Michel.

Problème 13 ... Des palindromes partout

Adam aime les palindromes au point qu'il a commencé à chercher des palindromes qui peuvent être créés comme une somme d'autres palindromes. Aujourd'hui, il veut trouver le plus grand palindrome qui soit la somme de trois palindromes à deux chiffres (pas nécessairement distincts). Quel nombre Adam va-t-il trouver ?

Note: Un palindrome est un nombre qui est le même lorsqu'il est lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, le nombre 12321 *est un palindrome à* 5 *chiffres.*

Résultat: 242

Solution: Commençons par examiner les palindromes à 2 chiffres. Comme ils doivent être les mêmes que l'on les lise de gauche à droite ou de droite à gauche, ces nombres doivent se composer de deux chiffres identiques. Les palindromes à 2 chiffres seront donc les nombres 11, 22, 33, ... jusqu'à 99. Nous pouvons remarquer une caractéristique commune à tous ces nombres : ils sont tous divisibles par 11. Par conséquent, lorsque nous additionnons 3 de ces nombres, leur somme doit également être divisible par 11.
La plus grande somme possible de trois palindromes à 2 chiffres est $99 + 99 + 99 = 297$. Nous devons donc descendre à partir de 297 et trouver le premier palindrome divisible par 11. Les premiers palindromes que nous devons vérifier seront 292, 282, 272, ... simplement des nombres sous la forme $2X2$, où X est un entier. Nous pouvons utiliser une règle de divisibilité par 11, qui stipule que la somme des chiffres des places paires moins la somme des chiffres des places impaires doit être soit 0, soit un multiple de 11. En descendant à partir de 292, le premier tel palindrome est 242, où $4 - (2 + 2) = 0$. Tout ce qu'il reste à faire est de vérifier si nous pouvons réellement trouver 3 palindromes à 2 chiffres à additionner pour obtenir 242 — et en effet, nous pouvons trouver que ce sont $77 + 77 + 88 = 242$.

Problème 14 ... Le dilemme du croissant

Lucie adore prendre des croissants au petit déjeuner. Cependant, en véritable gastronome, parmi tous les parfums possibles, elle veut choisir celui de la plus haute qualité. Elle a décidé que la qualité d'un croissant se mesure mieux par sa densité moyenne, elle effectue donc une expérience où elle veut trouver la densité moyenne de chaque type de croissant. En ce moment, elle expérimente avec des croissants au chocolat. Elle a découvert que le volume total du croissant est de 100 ml, dont 15 ml est la garniture au chocolat. La densité de cette garniture est de $1200\,\mathrm{kg/m^3}$, tandis que la densité de la pâte à croissant est de $800\,\mathrm{kg/m^3}$. Quelle est la densité moyenne de ce croissant au chocolat en $\mathrm{kg/m^3}$?

Résultat: 860

Solution: La densité moyenne d'un objet peut être trouvée simplement comme sa masse totale divisée par son volume total. Nous savons que le volume total est de $100\,\mathrm{ml} = 100\,\mathrm{cm^3}$, donc nous devons juste trouver la masse totale. Cela peut être trouvé comme la somme de la masse de la garniture et de la masse de la pâte. Pour les masses de ces parties, nous utilisons simplement la formule $m = \rho \cdot V$, où ρ est la densité et V est le volume. Cependant, nous devons faire attention aux unités. Utilisons les valeurs de $15\,\mathrm{ml} = 15\,\mathrm{cm^3}$ pour le volume de la garniture (V_f) et $100\,\mathrm{ml} - 15\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{cm^3}$ pour le volume de la pâte (V_d). Par conséquent, nous devons convertir les deux densités données dans les unités correspondantes : $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$ pour la densité de la garniture (ρ_f) et $800\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$ pour la densité de la pâte (ρ_d). Maintenant, nous pouvons trouver la masse totale du croissant comme suit :

$$\begin{aligned} m_{total} &= m_{filling} + m_{dough}, \\ &= \rho_f \cdot V_f + \rho_d \cdot V_d, \\ &= 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 15\,\mathrm{cm^3} + 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 85\,\mathrm{cm^3}, \\ &= 18\,\mathrm{g} + 68\,\mathrm{g}, \\ &= 86\,\mathrm{g}. \end{aligned}$$

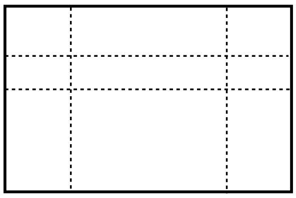
Maintenant, nous pouvons simplement trouver la densité moyenne comme la masse totale divisée par le volume total :

$$\rho_{average} = \frac{m_{total}}{V_{total}} = \frac{86\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{cm^3}} = 0{,}86\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Puisque nous devons donner notre réponse en $\mathrm{kg/m^3}$, notre réponse est $860\,\mathrm{kg/m^3}$.

Problème 15 ... L'héritage du jardinier

Adam est jardinier. Il possède un jardin de forme rectangulaire, avec un périmètre de 16 m. Il veut que ses fils s'occupent de ce jardin, alors il l'a divisé en 9 parties rectangulaires comme sur la figure (les lignes pointillées représentent les frontières entre les différentes parties). Quelle est la somme des périmètres de toutes ces 9 parties en mètres ?

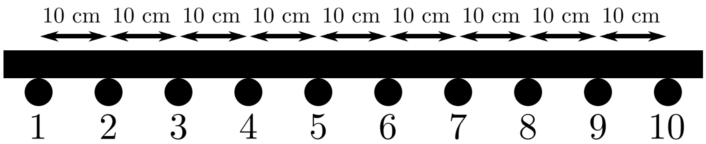


Résultat: 48

Solution: Nous savons que le périmètre du grand rectangle est de 16 m, donc la somme des longueurs de toutes les lignes pleines est de 16 m. En regardant les lignes pointillées, nous pouvons voir qu'elles peuvent être réorganisées pour créer le même rectangle que celui des lignes pleines initiales. Par conséquent, la somme de leurs longueurs est la même que celle de toutes les lignes pleines, donc également 16 m. Maintenant, la question est de savoir combien de fois nous utilisons quelles lignes lorsque nous additionnons tous ces 9 périmètres. Chaque ligne pleine sera utilisée exactement une fois, car chaque segment de chaque ligne pleine appartiendra exactement à un des 9 périmètres. Cependant, les lignes pointillées se trouvent toujours entre deux parties, donc chaque segment de chaque ligne pointillée appartiendra exactement à deux des 9 périmètres. Ainsi, nous savons que chaque ligne pointillée sera utilisée deux fois et chaque ligne pleine une fois. Au total, nous utiliserons donc l'intégralité du périmètre du rectangle initial $2 + 1 = 3$ fois, donc la réponse est $3 \cdot 16\,\text{m} = 48\,\text{m}$.

Problème 16 . . . Peut-on le préserver ?

Bob le bricoleur a construit une étagère. Elle se compose d'une planche homogène d'une longueur de 1 mètre, soutenue par 10 appuis, tous distants de 10 centimètres de leurs voisins. De plus, Bob a numéroté les appuis de 1 à 10 de gauche à droite comme dans la figure. Quelques jours plus tard, Bob se rend compte que 10 appuis étaient un gaspillage de matériel. Il décide donc de retirer certains appuis sans déplacer la planche. Maintenant, il se demande : quel est le produit minimal des numéros des appuis restants pour que la planche ne tombe pas ?



Résultat: 6

Solution: Pour que la planche ne tombe pas, son centre de gravité doit se situer entre deux chevilles. En d'autres termes, il doit y avoir une cheville à gauche du centre de gravité et une cheville à droite. Le centre de gravité de la planche se situe entre les chevilles numéro 5 et 6, donc d'après la phrase précédente, nous savons que nous avons besoin d'au moins une cheville numérotée au plus 5 et une cheville numérotée au moins 6. Pour obtenir le produit le plus petit, nous devons prendre la cheville la plus petite des deux parties. Par conséquent, nous prenons la cheville 1 de la partie au plus 5 et la cheville 6 de la partie au moins 6.
Si nous utilisons seulement ces deux chevilles, le centre de gravité se situera entre elles, donc la planche sera stable. Et puisque la solution prouve essentiellement que le produit ne peut pas être plus petit, nous pouvons dire que le produit minimal des chevilles restantes sera 6.

Problème 17 . . . Pour les statisticiens

Jacob étudie les statistiques. Il a appris plusieurs nouveaux termes. Il a appris que, dans un ensemble de données, la mode est le nombre qui apparaît le plus de fois dans l'ensemble de données. La médiane est le nombre du milieu lorsque l'ensemble de données est ordonné par ordre croissant. Par exemple, pour l'ensemble de données 2, 7, 20, 6, 2, la mode est 2 et la médiane est 6.
Jacob a pris un ensemble de données qui contenait les nombres 8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5 et trois entiers qu'il a oubliés (pas nécessairement distincts). Il se souvient seulement que la médiane était 4 et que la mode était unique et également égale à 4 (il n'y avait qu'une seule possible mode dans l'ensemble de données). Quelle est la plus grande valeur possible de la moyenne arithmétique des nombres dans cet ensemble de données ?Répondez par une fraction sous sa forme la plus réduite.

Résultat: 5

Solution: Nous savons qu'il y avait une mode unique : 4. Par conséquent, le nombre de fois que le nombre 4 apparaît dans notre ensemble de données doit être supérieur à celui de tout autre nombre. D'après les nombres connus, les plus grands sont 3 et 5, tous deux représentés deux fois. Par conséquent, 4 doit être représenté au moins 3 fois, cependant, il n'est représenté qu'une seule fois pour le moment. Ainsi, sur les 3 entiers inconnus, que Jacob a oubliés, au moins deux doivent être 4.
Nous connaissons donc les valeurs de 10 sur les 11 nombres dans l'ensemble de données. Regardons maintenant la deuxième condition : la médiane doit également être 4. Lorsque nous ordonnons les 10 nombres connus par ordre croissant, nous obtenons : 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Lorsque nous ajoutons à cela le onzième nombre, le nombre du milieu doit être 4. Le milieu de cet ensemble de données est actuellement entre les nombres 4 et 5, donc si le onzième nombre était 5 ou plus, le nombre du milieu serait 5, ce qui ne respecte pas la condition. Pour que cela soit respecté, le onzième nombre doit donc être 4 ou moins. Puisque nous voulons que la moyenne arithmétique soit aussi grande que possible, nous choisirons un autre nombre 4. Maintenant, nous connaissons tous les onze nombres de l'ensemble de données : 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Leur moyenne arithmétique est leur somme divisée par leur quantité, ce qui nous donne $\frac{55}{11} = 5$.

Problème 18 ... Se déplacer ensemble

Simon et Barbara veulent se rencontrer. Simon veut surprendre Barbara, alors il monte dans sa voiture et commence à conduire vers la maison de Barbara à une vitesse de $30\,\mathrm{km/h}$. Cependant, alors qu'il conduit, il reçoit un appel téléphonique. C'est Barbara qui veut vérifier où il en est ! Simon n'a d'autre choix que d'admettre qu'il se dirige vers sa maison. Barbara est très excitée et veut le rencontrer dès que possible, alors elle monte dans sa voiture et commence à conduire vers Simon. Elle commence à conduire à une vitesse de $90\,\mathrm{km/h}$ au moment où Simon a parcouru la moitié de la distance jusqu'à la maison de Barbara. Ils se rencontrent joyeusement exactement 1 heure après que Simon a commencé à conduire. Quelle est la distance entre la maison de Barbara et celle de Simon en kilomètres ?

Résultat: 48

Solution: Appelons la distance totale entre les maisons s, la distance parcourue par Simon s_{si} et la distance parcourue par Barbara s_{ba}. Nous pouvons remarquer que $s = s_{si} + s_{ba}$, donc pour trouver s, nous devons simplement trouver les deux distances parcourues par Simon et Barbara. Tout d'abord, nous pouvons facilement déterminer s_{si} en utilisant la formule $v = \frac{s}{t}$, réarrangée sous la forme $s = v \cdot t$, où v est la vitesse et t le temps. Par conséquent, $s_{si} = v_{si} \cdot t_{si} = 30\,\mathrm{km/h} \cdot 1\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{km}$.
Cependant, nous devons encore trouver s_{ba} pour déterminer s. Pour ce faire, nous allons exprimer le temps qu'il a fallu à Simon pour parcourir la moitié de s en fonction de s. D'après $t = \frac{s}{v}$, nous pouvons déterminer que le temps pour parcourir $\frac{s}{2}$ pour Simon qui roule à $30\,\mathrm{km/h}$ sera $t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s}{2 \cdot 30\,\mathrm{km/h}} = \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$. En utilisant cela, nous pouvons également exprimer le temps pendant lequel Barbara a voyagé (t_{ba}) : ce sera 1 heure moins ce temps. Donc, $t_{ba} = 1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$. Maintenant, nous pouvons exprimer la distance parcourue par Barbara s_{ba} comme $s_{ba} = v_{ba} \cdot t_{ba} = 90\,\mathrm{km/h} \cdot (1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}) = 90\,\mathrm{km} - \frac{90\,\mathrm{km/h} \cdot s}{60\,\mathrm{km/h}} = 90\,\mathrm{km} - \frac{3}{2} \cdot s$.
Maintenant que nous connaissons la valeur de s_{si} et que nous avons exprimé s_{ba} en fonction de s, nous

pouvons simplement évaluer le total s comme suit :

$$\begin{aligned}
s &= s_{si} + s_{ba},\\
s &= 30\,\text{km} + 90\,\text{km} - \frac{3}{2} \cdot s,\\
\frac{5}{2}s &= 120\,\text{km},\\
s &= 48\,\text{km}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la distance entre la maison de Barbara et celle de Simon est 48 km.

Problème 19 ... Deux fois deux fois

Tom s'ennuie, alors il commence à écrire des nombres sur un tableau noir. Au début, il écrit 1 nombre deux, puis il écrit 2 nombres deux sur la ligne suivante, puis 3 nombres deux sur une autre ligne, puis 4 nombres deux, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il écrive 2024 nombres deux sur la dernière ligne du tableau noir. Il décide ensuite de multiplier les nombres deux sur le tableau. Quel est le dernier chiffre du produit qu'il obtient ?

Résultat: 6

Solution: Nous devons calculer le dernier chiffre du produit :

$$(2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{2024-times}}).$$

Puisque nous ne nous soucions que du dernier chiffre de toute la multiplication, nous pouvons aborder ce problème en considérant uniquement le produit des derniers chiffres de toutes les parenthèses.
Nous pouvons d'abord commencer par écrire quelques nombres initiaux à l'intérieur des parenthèses :

$$\begin{aligned}
2&,\\
2 \cdot 2 &= 4,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 &= 8,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 16,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 32,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 64,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 128,\\
2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 256, \ldots
\end{aligned}$$

Dans cette séquence de nombres, nous pouvons remarquer que le dernier chiffre suit un motif répétitif : 2, 4, 8, 6. Étant donné qu'il y a un motif dans le dernier chiffre des nombres à l'intérieur des parenthèses, le dernier chiffre du produit proviendra d'une multiplication répétée des nombres dans ce motif : $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \ldots$.
Si nous commençons à écrire uniquement les derniers chiffres des étapes intermédiaires dans cette multiplication, nous obtiendrons la séquence suivante de nombres : 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, 8, 4, 4, 8, 2, ... Ici, nous pouvons de nouveau remarquer qu'il y a un motif répétitif 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, cette fois de longueur 8. Le dernier chiffre de toute la multiplication sera donc l'un des chiffres de ce motif. Comme il y a en tout 2023 multiplications entre les 2024 parenthèses dans notre équation, nous pouvons diviser 2023 par 8, la longueur du motif, et le reste nous dira dans quelle position du motif répétitif nous nous trouverons après avoir multiplié tous les nombres.
2023 : 8 = 252, reste 7, donc le dernier chiffre du produit entier est 6 car c'est le 7ème chiffre dans le motif de 8 chiffres que nous avons identifié plus tôt.

Problème 20 ... Tirage au sort radio

Une chaîne de radio organise un tirage au sort tous les jours. Tout le monde peut envoyer un SMS à un numéro de téléphone spécifique et sera inscrit au tirage au sort de ce jour-là. Hier, chaque SMS donnait 1 ticket pour le tirage au sort avec un gagnant. Aujourd'hui, la radio a fait un appel spécial et chaque SMS donne 30 tickets. John a envoyé 1 SMS hier et 1 SMS aujourd'hui. Étant donné que les organisateurs ont reçu le même nombre de SMS les deux jours, combien de fois la probabilité de John de gagner aujourd'hui est-elle supérieure à celle d'hier ?

Résultat: 1

Solution: Dans le tirage au sort d'aujourd'hui, John reçoit 30 fois plus de tickets. Mais puisque tout le monde a reçu 30 fois plus de tickets, le nombre total de tickets est 30 fois plus élevé également. Ainsi, bien que John ait 30 fois plus de tickets dans le tirage, ceux-ci forment la même fraction de tous les tickets que hier. Donc la probabilité que John gagne doit être la même que celle d'hier. Autrement dit, elle est 1 fois plus grande.

Problème 21 ... Résistivité à résistivité

Matt est très résistant. Il peut également résister à la lecture sur l'électricité. Dernièrement, il a lu que s'il fabrique un fil de longueur ℓ et de section transversale S à partir d'un matériau ayant une résistivité ρ, la résistance du fil est $R = \frac{\rho\ell}{S}$. Il a décidé d'essayer. Il a fabriqué un fil de cuivre avec une résistance R. Puis il a fondu le fil et a utilisé tout le cuivre fondu pour former un fil dont le rayon était un tiers du rayon du fil original. La résistance de ce fil est maintenant kR. Déterminez la valeur de k.

Résultat: 81

Solution: Le rayon du nouveau fil est un tiers du rayon original et comme l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon, la section transversale du nouveau fil doit être $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$. Le volume du fil ne pouvait pas changer, donc la diminution de la section transversale à un neuvième implique que la longueur du fil doit avoir augmenté à $\ell' = 9\ell$. La résistivité est la propriété du matériau, donc elle reste la même. Maintenant, nous pouvons calculer la résistivité du nouveau fil pour être

$$R' = \frac{\rho\ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81\frac{\rho\ell}{S} = 81R.$$

De cela, nous voyons que la résistivité du nouveau fil est 81 fois celle du fil original, donc la valeur de k est 81.

Problème 22 ... Maillots du New Jersey

Thibault lave les maillots de football de l'équipe du New Jersey. Son équipe utilise 75 maillots avec 75 numéros consécutifs. Hier, il les a accrochés sur une corde dans l'ordre croissant. Il a remarqué que la somme des numéros des 5 derniers maillots était exactement 6 fois plus grande que la somme des numéros des 5 premiers maillots. Quel numéro était sur le maillot qui se trouvait exactement au milieu ?

Résultat: 49

Solution: Soit x le numéro du maillot au milieu. Il y a $\frac{75-1}{2} = 37$ maillots avant ce maillot et 37 maillots après ce maillot. Les cinq premiers maillots ont donc les numéros $x - 37$, $x - 36$, $x - 35$, $x - 34$ et $x - 33$, tandis que les cinq derniers maillots ont les numéros $x + 33$, $x + 34$, $x + 35$, $x + 36$ et $x + 37$. La condition dans le problème se traduit par l'équation

$$\begin{aligned}(x+33)+(x+34)+(x+35)+(x+36)+(x+37) &= 6((x-37)+(x-36)+(x-35)+(x-34)+(x-33)),\\ 5x+175 &= 6(5x-175),\\ 5x+175 &= 30x-1050,\\ 25x &= 1225,\\ x &= 49.\end{aligned}$$

Ainsi, le numéro sur le maillot au milieu était $x = 49$.

Problème 23 ... Poudre saine

Michaël prépare une collation saine et a besoin de bananes sèches pour cela. Il a acheté une grappe de bananes qui contiennent naturellement 75 % d'eau et a décidé de les sécher. Il a mis la moitié d'entre elles dans un déshydrateur qui a réduit leur teneur en eau à 25 %, et l'autre moitié dans un déshydrateur par congélation qui a réduit leur teneur en eau à seulement 10 %. Enfin, il a réduit en poudre les deux lots de bananes déshydratées et a mélangé la poudre. Quelle fraction d'eau cette poudre contient-elle ? Répondez par une fraction sous sa forme la plus simple.

Résultat: $\frac{2}{11}$

Solution: Soit m la masse des bananes. Nous savons qu'elles contiennent $\frac{3}{4}m$ d'eau et $\frac{1}{4}m$ de matière sèche. Ainsi, chaque moitié de bananes contient $\frac{1}{8}m$ de matière sèche. Pour les bananes séchées dans le déshydrateur, la partie sèche forme 75 % des bananes, donc ces bananes pèsent maintenant $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$ et l'eau qu'elles contiennent pèse $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$. De même, les bananes du déshydrateur par congélation pèsent $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$ et l'eau pèse $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$.
Au total, la masse de la poudre sera $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$ dont $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ est constituée d'eau. Ainsi, la fraction d'eau dans la poudre est

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Problème 24 ... Saut dans un ascenseur

Karl pèse 75 kg et dans des conditions normales, il est capable de sauter à une hauteur de 1 m. Une fois, il a pris une balance dans un gigantesque ascenseur. Il a découvert qu'au début du mouvement de descente de l'ascenseur, le poids indique qu'il pèse seulement 60 kg. Quelle est la plus grande hauteur au-dessus du niveau de l'ascenseur en mètres à laquelle Karl peut sauter au début du mouvement de cet ascenseur en mouvement ?

Résultat: 1,25

Solution: Lorsqu'il saute, Karl gagne de l'énergie. Pour Karl, qui pèse $m = 75\,\mathrm{kg}$, pour sauter à la hauteur $h_0 = 1\,\mathrm{m}$, il doit gagner de l'énergie $E = mgh_0$. Qu'est-ce qui change dans l'ascenseur en mouvement ? Le poids indique moins car l'accélération gravitationnelle est différente. Soit g' la nouvelle accélération gravitationnelle. Par conséquent, Karl agit sur le poids avec une force $F_g = mg'$. Mais le poids indique un poids $m' = 60\,\mathrm{kg}$, car il "pense" que tout se passe avec une accélération gravitationnelle normale. Ainsi, le fait qu'il indique un poids m' signifie qu'il y a une force $m'g$ agissant sur lui. Mais c'est F_g, ce qui donne

$$mg' = m'g,$$
$$g' = \frac{m'}{m}g.$$

Revenons maintenant au saut. Puisque l'accélération gravitationnelle a changé, Karl sautera à une hauteur h en utilisant l'énergie E. Cela se convertit en énergie potentielle $E = mg'h$. Cela signifie que Karl sautera à la hauteur

$$mgh_0 = mg'h,$$
$$h = \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1{,}25\,\mathrm{m}.$$

Problème 25 ... Extermination du nombre 3

Pour Peter, le nombre 3 est uniquement associé à des malheurs (par exemple, il trouve toujours trois os dans un plat de poisson sans arêtes), il a donc décidé d'effacer le nombre 3 de sa vie. Il n'utilise aucun nombre qui contient le chiffre 3 ou tout nombre qui est divisible par 3. Combien de nombres entre 1 et 100 inclus Peter peut-il utiliser ?

Résultat: 55

Solution: Comptons les nombres que Peter n'utilise pas. Les multiples de 3 entre 1 et 100 sont 3, 6, ..., 99, donc il y en a 99 : 3 = 33. De plus, il y a 19 nombres qui contiennent le chiffre 3 (10 d'entre eux ont 3 comme chiffre des unités, 10 comme chiffre des dizaines, mais le nombre 33 figure dans ces deux groupes). Peter n'utilise aucun des nombres de ces deux groupes. Mais il y a certains nombres qui appartiennent aux deux groupes, à savoir les nombres 3, 30, 33, 36, 39, 63, 93 qui doivent être comptés une seule fois. Par conséquent, Peter n'utilise pas $33 + 19 - 7 = 45$ nombres. Il utilise tous les autres nombres, donc il utilise $100 - 45 = 55$ nombres.

Problème 26 ... Attention aux piétons

Thérèse conduit une voiture à une vitesse de 15 m/s. Elle remarque soudainement un piéton sur le passage piéton. Le temps de réaction de Thérèse est de 1 s après quoi la voiture commence à freiner avec une force constante. La distance de freinage de la voiture était de 33 m. Quelle serait la distance de freinage en mètres, si Thérèse commençait à freiner à une vitesse de 35 m/s ?

Résultat: 133

Solution: Soit v la vitesse de Thérèse. Pendant les $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ suivant la remarque du piéton, Thérèse continue à la vitesse v, donc elle parcourt la distance $s_1 = vt_0$. Ensuite, elle commence à freiner avec une force constante F. Cette force agit sur la distance s_2, donc elle exerce un travail $W = Fs_2$. Ce travail a été effectué pour diminuer l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$ de la voiture où m est la masse de la voiture. Par conséquent, nous obtenons que $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, ce qui signifie que la distance sur laquelle la voiture s'arrête après avoir commencé à freiner est

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

L'énoncé du problème nous dit que lorsque Thérèse conduisait la voiture à la vitesse $v_1 = 15\,\mathrm{m/s}$, sa distance de freinage $s_1 + s_2$ était $s = 33\,\mathrm{m}$. En utilisant cela, nous pouvons exprimer la quantité inconnue $\frac{m}{F}$ comme

$$s = v_1 t_0 + \frac{mv_1^2}{2F},$$
$$\frac{m}{F} = \frac{2(s - v_1 t_0)}{v_1^2}$$

et l'insérer dans la distance de freinage $s' = s_1' + s_2'$ pour la vitesse $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$ afin d'obtenir

$$s' = v_2 t_0 + \frac{mv_2^2}{2F},$$
$$s' = v_2 t_0 + \frac{(s - v_1 t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{(33\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s}) \cdot (35\,\mathrm{m/s})^2}{(15\,\mathrm{m/s})^2} = 133\,\mathrm{m}.$$

Cela signifie que la distance de freinage de Thérèse à partir de la vitesse $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$ serait $s' = 133\,\mathrm{m}$.

Problème 27 ... Danser sur l'eau

Les organisateurs de l'événement annuel Aquatechno Dance Event souhaitent installer un plancher de danse flottant sur le lac. C'est un cuboïde rigide d'une épaisseur de 10 cm et d'une densité moyenne de $0{,}6\,\mathrm{g/cm^3}$. Ils veulent qu'il puisse supporter 4000 kg avant de couler. Quelle est la surface minimale requise de la surface supérieure en mètres carrés ?

Résultat: 100

Solution: Appelons la surface requise S, de sorte que le volume du plancher de danse soit $V = S \cdot 10\,\mathrm{cm}$. Lorsqu'il est complètement chargé, la surface supérieure sera au même niveau que l'eau qui l'entoure, et il déplace un volume V d'eau. L'eau déplacée aura une masse de $V \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, et cela doit être égal à la masse du plancher de danse plus les $4000\,\mathrm{kg}$ placés au-dessus. Cette masse sera $V \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} + 4000\,\mathrm{kg}$. En résolvant pour V, nous obtenons $V = 10\,\mathrm{m^3}$, de sorte que la surface du plancher de danse doit être $S = \frac{V}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{m^2}$.

Problème 28 ... Tente

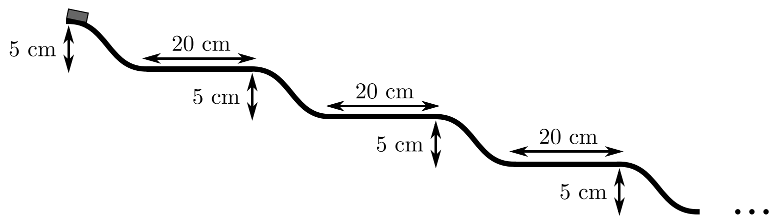
Lucie est en randonnée. Elle a construit une tente, qui est un triangle isocèle ABC de base BC. Pour faire sécher ses vêtements, Lucie a suspendu une corde qui forme un triangle équilatéral DEF, tel que les points D, E et F se trouvent sur les segments AB, BC et CA, respectivement. Lucie a mesuré que $\angle ADF = 42°$ et $\angle EFC = 24°$. Quelle est la mesure de $\angle EAC$ en degrés ?

Résultat: 12

Solution: Considérons les angles autour du sommet F. Nous savons que $\angle EFC = 24°$ et $\angle DFE = 60°$ puisque le triangle DEF est équilatéral. Par conséquent, $\angle AFD = 180° - \angle EFC - \angle DFE = 180° - 24° - 60° = 96°$. Dans le triangle ADF, nous connaissons maintenant deux angles, ce qui donne $\angle DAF = 180° - \angle ADF - \angle DFA = 180° - 42° - 96° = 42°$.
Nous voyons que $\angle DAF = \angle ADF$, ce qui signifie que le triangle ADF est isocèle avec $AF = DF$. Le segment DF est un côté du triangle équilatéral DEF, ce qui signifie que $DE = EF = FD$. De cela, nous savons que $AF = EF$, donc le triangle AEF est isocèle avec la base AE.
Nous savons déjà que $\angle AFE = \angle AFD + \angle DFE = 96° + 60° = 156°$. Par conséquent, à partir du triangle isocèle AEF, nous obtenons $\angle EAC = \angle EAF = \frac{180° - 156°}{2} = 12°$.

Problème 29 ... Voitures Hot Wheels

Nina joue avec une voiture Hot Wheels. Imaginez qu'une voiture Hot Wheels est un cuboïde avec une masse de $60\,\mathrm{g}$. Nina a fabriqué une piste en alternant des parties descendantes et horizontales. Dans les parties descendantes, la voiture descend de $5\,\mathrm{cm}$ sans friction, et dans les parties horizontales, elle se déplace horizontalement de $20\,\mathrm{cm}$ avec un coefficient de friction de 0,4. La piste commence par une partie descendante et Nina donne à la voiture une vitesse initiale de $5\,\mathrm{m/s}$. Quel est le numéro de la partie horizontale sur laquelle la voiture s'arrête ?



Résultat: 42

Solution: Dans les parties descendantes, la voiture augmente son énergie et dans les parties horizontales, elle perd son énergie. Par conséquent, la voiture s'arrête sur l'une des parties horizontales. Cela se produit au moment où son énergie tombe à 0.
Au début, l'énergie totale de la voiture est la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique. Pour simplifier, supposons que l'énergie potentielle de la voiture au début est $0\,\mathrm{J}$. Ainsi, l'énergie de la voiture consiste entièrement en son énergie cinétique, qui est $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, où $m = 60\,\mathrm{g}$ est la masse de la voiture et $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ est la vitesse initiale de la voiture.
Chaque fois que la voiture passe par la partie descendante, son énergie augmente par un changement de l'énergie potentielle. Puisqu'elle descend de la hauteur $h_0 = 5\,\mathrm{cm}$, elle gagne de l'énergie $E_{p_0} = mgh_0$. Dans les parties horizontales, il y a une force de friction $F_t = fmg$, où $f = 0{,}4$ est le coefficient de friction. Elle agit sur la longueur $s = 20\,\mathrm{cm}$, donc elle exerce le travail $W = F \cdot s = fmgs$. Pour cette raison, l'énergie de la voiture diminue de W.

Après chaque paire suivante de parties horizontales et verticales, l'énergie de la voiture diminue de $E_{p_0} - W = mgh_0 - fmgs$. Après n de telles paires de parties horizontales et verticales, l'énergie diminue de $n(E_{p_0} - W)$ et nous voulons trouver le plus petit n tel que $E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0$. En résolvant cette inéquation, nous obtenons

$$E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0,$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmgs) \leq 0,$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 \leq n(fgs - gh_0),$$

$$n \geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)},$$

$$n \geq \frac{(5\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 10\,\mathrm{m^2/s}(0{,}4 \cdot 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm})} = \frac{25}{0{,}6} = \frac{250}{6} \doteq 41{,}67.$$

Ainsi, la voiture s'arrête à la 42e partie horizontale.

Problème 30 ... Vieillissant

Samuel vient d'avoir 37 ans et c'est pourquoi il a écrit un nombre de 2024 chiffres $3737\cdots37$ qui se composait de 1012 chiffres 3 et de 1012 chiffres 7. Il se remémorait les temps où il avait 21 ans et pour cette raison, il a multiplié le nombre de 2024 chiffres par 21. Enfin, il a décidé de calculer la somme des chiffres du produit. Quel est le nombre qu'il a obtenu ?

Résultat: 12 153

Solution: Si nous avons de la chance, nous remarquons que $37 \cdot 21 = 777$. Cela nous permet d'effectuer la multiplication plus facilement. Imaginons la procédure habituelle de multiplication à la main. D'habitude, nous multiplions uniquement des nombres à un chiffre. Mais maintenant, nous savons que le produit $37 \cdot 21 = 777$, donc nous pouvons effectuer cette multiplication à chaque étape. En procédant ainsi, nous obtenons la multiplication comme dans la figure suivante.

$$\begin{array}{r}
37\cdots7373737 \\
\cdot\,21 \\
\hline
777 \\
777 \\
777 \\
\cdots \\
777 \\
\hline
784\cdots4848477
\end{array}$$

Les nombres consécutifs 777 ont un chiffre 7 dans un ordre commun, donc nous les additionnons comme d'habitude. De cette façon, les chiffres 4 et 8 apparaissent dans le résultat. Il est visible que nous avons augmenté le nombre de chiffres de 1, donc le résultat est un nombre à 2025 chiffres. Trois d'entre eux sont le chiffre 7 et les $2025 - 3 = 2022$ alternent entre 4 et 8, donc il y a $2022 : 2 = 1011$ de chacun d'eux. Au total, la somme de tous les chiffres du résultat est $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Problème 31 ... Recharge des batteries

Majo est en train d'écrire les solutions du Náboj Junior de cette année dans un salon de thé. Pour travailler, il utilise un ordinateur portable avec une capacité de batterie de 4000 mAh et un smartphone avec une capacité de batterie de 3500 mAh. Cependant, il a oublié de les recharger, donc ils sont tous les deux à 20 % de leur capacité. Majo n'a qu'un seul chargeur qui peut charger les appareils avec un courant de sortie de 3,25 A.

Majo sait aussi que lorsqu'il utilise son ordinateur portable complètement chargé, il s'épuise en 10 heures, et le smartphone complètement chargé s'épuise également après 10 heures d'utilisation. Quel est le temps minimal en heures, dans lequel Majo peut avoir ses deux appareils complètement chargés tout en les utilisant pour travailler ?

Résultat: 2,4

Solution: La capacité d'une batterie en mAh décrit une relation entre le courant de sortie de la batterie et le temps pendant lequel la batterie peut fournir ce courant. Par exemple, si une batterie avec une capacité de 4000 mAh est complètement chargée, elle peut fournir un courant électrique de 4000 mA pendant une heure ou un courant de 1000 mA pendant quatre heures ou quelque chose de similaire.
Étant donné que Majo peut changer l'appareil en charge, nous pouvons considérer l'ordinateur portable et le smartphone comme un seul appareil avec une capacité de $4000\,\mathrm{mAh} + 3500\,\mathrm{mAh} = 7500\,\mathrm{mAh}$. Au début, ils étaient tous deux à 20 % de leur capacité, donc au total ils contenaient la charge $0{,}2 \cdot 7500\,\mathrm{mAh} = 1500\,\mathrm{mAh}$. Les deux appareils se déchargent de telle manière qu'ils s'épuisent après 10 heures. Donc, ils se déchargent de $7500\,\mathrm{mAh} : 10 = 750\,\mathrm{mAh}$ chaque heure.
En même temps, Majo recharge les appareils avec un chargeur ayant un courant de sortie de $3{,}25\,\mathrm{A} = 3250\,\mathrm{mA}$, donc après une heure, il recharge 3250 mAh. Par conséquent, la charge des batteries augmente de $3250\,\mathrm{mAh} - 750\,\mathrm{mAh} = 2500\,\mathrm{mAh}$ chaque heure. Majo doit augmenter la charge de $7500\,\mathrm{mAh} - 1500\,\mathrm{mAh} = 6000\,\mathrm{mAh}$, donc les appareils seront complètement chargés en

$$\frac{6000\,\mathrm{mAh}}{2500\,\mathrm{mAh/h}} = 2{,}4\,\mathrm{h}.$$

Problème 32 ... C'est ennuyeux de construire des châteaux de sable

Lexi est fatiguée de construire des châteaux de sable, alors elle joue maintenant avec un seau dans un lac. Le seau est très léger et a une forme cylindrique avec une aire de base de $400\,\mathrm{cm}^2$ et une hauteur de 30 cm. Lexi a complètement submergé le seau, de sorte que son sommet était à 10 cm sous la surface de l'eau. Maintenant, elle veut lentement sortir le seau, de sorte que le fond soit juste au-dessus de la surface du lac. Quel est le travail en joules que Lexi doit exercer ?

Résultat: 18

Solution: La seule raison pour laquelle Lexi doit exercer un travail est qu'elle augmente l'énergie potentielle de l'eau dans le seau. Le seau est un cylindre avec une aire de base $S = 400\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2$ et une hauteur $h = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, donc la masse de l'eau qu'il contient est $m = \rho_{\mathrm{eau}} S h$. Le centre de gravité de l'eau dans le seau se situe à la moitié de la hauteur du seau, soit à $\frac{h}{2}$. Par conséquent, l'augmentation de l'énergie potentielle de l'eau, et donc le travail que Lexi doit exercer, est :

$$W = mg\frac{h}{2} = \frac{\rho_{\mathrm{eau}} S g h^2}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot (0{,}3\,\mathrm{m})^2}{2} = 18\,\mathrm{J}.$$

Problème 33 ... Ne parlons pas de Bruno

Bruno est un designer extraordinaire, c'est donc dommage que nous ne parlions pas plus de lui. Récemment, il a dessiné un nouveau logo pour son entreprise. Il s'agit d'un hexagone très spécifique $ABCDEF$, où $AB = 12\,\mathrm{cm}$, $BC = 19\,\mathrm{cm}$, $CD = 2\,\mathrm{cm}$, $DE = 14\,\mathrm{cm}$, $EF = 4\,\mathrm{cm}$ et $FA = 9\,\mathrm{cm}$. De plus, les longueurs en centimètres des diagonales AC, CE et EA sont toutes des entiers et ces diagonales forment un triangle. Quelle est la valeur maximale du périmètre du triangle ACE en centimètres ?

Résultat: 53

Solution: Nous utiliserons plusieurs fois l'inégalité triangulaire. Dans le triangle ABC, elle nous indique que la longueur du côté AC est supérieure à $19\,\mathrm{cm} - 12\,\mathrm{cm} = 7\,\mathrm{cm}$, mais inférieure à $19\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 31\,\mathrm{cm}$. La

longueur doit être un entier, donc la longueur de AC peut être un entier compris entre 8 cm et 30 cm. Pour la même raison (appliquée dans les triangles CDE et EFA), nous obtenons que la longueur de CE est un entier entre 13 cm et 15 cm et que la longueur de EA est un entier entre 6 cm et 12 cm.
Pour obtenir le périmètre maximal du triangle ACE, nous devons choisir les plus grandes longueurs possibles de ses côtés. Cependant, l'inégalité triangulaire doit être respectée. Donc, même si nous choisissons les plus grandes longueurs possibles pour CE et EA, nous pouvons seulement choisir une longueur de AC inférieure à $15\,\text{cm} + 12\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$. Par conséquent, le plus grand périmètre possible du triangle est atteint lorsque $AC = 26\,\text{cm}$, $CE = 15\,\text{cm}$ et $EA = 12\,\text{cm}$, auquel cas le périmètre est $26\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 12\,\text{cm} = 53\,\text{cm}$.

Problème 34 ... La joie de manquer quelque chose

Matej joue avec des factorielles. La factorielle d'un nombre est obtenue en multipliant tous les nombres naturels de 1 jusqu'à ce nombre. Par exemple, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Matej a regardé le produit $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$, qui n'est pas un carré parfait. Matej a découvert que s'il omettait le terme $k!$, il obtiendrait un carré parfait. De plus, il a réalisé qu'il n'existe qu'un seul tel k avec cette propriété. Trouvez la valeur de k.

Résultat: 1012

Solution: Le produit de deux carrés parfaits est encore un carré parfait – si nous multiplions a^2 par b^2, nous obtenons $(ab)^2$. Nous allons essayer d'utiliser cela pour simplifier le problème.
Regardons le produit $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Si nous regroupons les termes consécutifs ainsi $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ et écrivons chaque factorielle de nombre pair sous la forme $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, nous pouvons simplifier le produit sous la forme

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (2023!)^2).$$

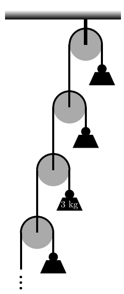
La seconde parenthèse est un produit de carrés parfaits, donc c'est également un carré parfait. Pour que le produit entier soit un carré parfait, il faut que la première parenthèse soit un carré parfait. C'est un produit de nombres pairs, donc nous pouvons la simplifier en extrayant le nombre deux de chaque terme. De cette façon, nous obtenons

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) = 2^{1012}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Le nombre 2^{1012} est un carré parfait (l'exposant est pair), donc la seule obstruction pour que le produit entier soit un carré parfait est le terme $1012!$. Dans l'énoncé du problème, nous sommes autorisés à omettre un terme, ce qui nous indique que nous devrions supprimer le terme $1012!$. Comme l'énoncé du problème affirme que ce terme est unique, nous pouvons conclure que nous recherchons le nombre $k = 1012$.

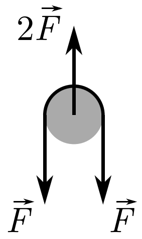
Problème 35 ... Des poulies partout

Bob le bricoleur a construit un système de poulies infini comme dans la figure. Les masses des poids ne sont pas nécessairement les mêmes. Le système est conçu de manière à rester au repos. La masse du troisième poids est de 3 kg. Quelle est la masse totale de tous les poids en kilogrammes ?



Résultat: 24

Solution: La situation autour de chaque poulie est illustrée dans la figure.



Les forces dans la corde sont toutes les mêmes F car la tension dans la corde est uniforme tout au long de la corde (bien entendu, cela diffère pour les différentes cordes). Pour que la poulie reste au repos, il doit également y avoir une force de magnitude $2F$ dirigée vers le haut.
Bien qu'il semble que nous devions résoudre le problème de l'infinité des poulies, cela ne nous dérange pas du tout. En effet, puisque les poulies et les cordes sont sans masse, nous pouvons trouver la somme de tous les poids en regardant la force avec laquelle le système de poulies infini agit sur le plafond. Cela nous indique la somme des forces gravitationnelles agissant sur tous les poids, ce qui nous donne leur poids total.
Nous allons utiliser l'observation du début pour déterminer la force qui agit sur le plafond.
Commençons par regarder la troisième poulie. Nous savons qu'il y a un poids de masse $3\,\mathrm{kg}$, sur lequel agit une force gravitationnelle de magnitude $3\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 30\,\mathrm{N}$. La tension dans la corde correspondante est donc également de $30\,\mathrm{N}$, ce qui signifie qu'il doit y avoir une force de magnitude $2 \cdot 30\,\mathrm{N} = 60\,\mathrm{N}$ agissant sur la troisième poulie en direction vers le haut.
Ensuite, regardons la deuxième poulie. La force de magnitude $60\,\mathrm{N}$ du paragraphe précédent crée une tension de même magnitude dans la corde autour de la deuxième poulie, ce qui signifie qu'il doit y avoir une force de magnitude $2 \cdot 60\,\mathrm{N} = 120\,\mathrm{N}$ agissant sur la deuxième poulie en direction vers le haut. En utilisant le même raisonnement pour la première poulie, il doit y avoir une force de magnitude $2 \cdot 120\,\mathrm{N} = 240\,\mathrm{N}$ agissant sur la première poulie en direction vers le haut. Cependant, cette force est également la magnitude de la force avec laquelle le système de poulies entier agit sur le plafond et que nous voulions déterminer.
Ainsi, le système de poulies entier agit sur le plafond avec une force de $240\,\mathrm{N}$, donc la masse de tous les poids doit être $240\,\mathrm{N} : 10\,\mathrm{N/kg} = 24\,\mathrm{kg}$.

Problème 36 ... Comment les chiffres ont tourné

Michel aime jouer avec les nombres. Il prend un nombre à 3 chiffres, inverse l'ordre de ses chiffres et soustrait ce nombre du nombre original. Par exemple, s'il a commencé avec le nombre 123, il calculerait $123 - 321 = -198$. Un jour, il a montré ce jeu à Anne. Il l'a appliqué au nombre favori d'Anne. Ensuite, il a pris le nombre favori d'Anne auquel il a soustrait 31, qui restait un nombre à 3 chiffres. Étonnamment, il a obtenu la même différence qu'avec le nombre favori d'Anne. Combien de nombres à 3 chiffres peuvent être le nombre favori d'Anne ?

Note: Un nombre à 3 chiffres ne peut pas avoir le chiffre 0 comme chiffre des centaines, mais le nombre obtenu en inversant les chiffres le peut. Dans ce cas, nous ignorons les zéros au début.

Résultat: 216

Solution: Tout d'abord, examinons les différences obtenues par Michel. Un nombre à 3 chiffres peut être écrit sous la forme $100A + 10B + C$, où A, B, et C sont ses chiffres. Après avoir inversé les chiffres, Michel obtient le nombre $100C + 10B + A$, de sorte qu'il obtient la différence

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C).$$

Nous voyons que la différence obtenue par Michel dépend uniquement de la différence entre le chiffre des centaines et le chiffre des unités du nombre original. Dans le problème, Michel travaille avec un nombre, puis

avec ce nombre diminué de 31. Il a obtenu le même résultat, donc ces deux nombres doivent avoir la même différence entre les chiffres des centaines et des unités. Maintenant, nous devons calculer les nombres ayant cette propriété.
Il y a deux cas possibles en fonction du chiffre des unités du nombre favori d'Anne. Si le chiffre des unités était 0, la soustraction de 31 le changerait en 9. Par conséquent, le chiffre des centaines devrait également augmenter de 9, ce qui est clairement impossible. Cela signifie que le nombre favori d'Anne n'a pas 0 comme chiffre des unités, donc après la soustraction de 31, le chiffre des unités diminue de 1 et donc le chiffre des centaines doit également diminuer de 1. Cela se produit uniquement si le nombre à 2 chiffres formé par les deux derniers chiffres du nombre favori d'Anne est l'un des 00, 01, ..., 30.
Dans cette liste, nous devons effacer ceux ayant 0 comme chiffre des unités, ce qui nous laisse 27 possibilités. La dernière chose à faire est de déterminer les possibilités pour le chiffre des centaines. Il ne peut pas être 1, car après avoir soustrait 31, nous n'obtiendrons pas un nombre à 3 chiffres. Mais les chiffres 2, 3, ..., 9 fonctionnent.
En combinant le chiffre des centaines avec les possibilités pour les deux autres chiffres, nous obtenons $8 \cdot 27 = 216$ possibilités pour le nombre favori d'Anne.

Problème 37 ... Le plus grand ennui de tous les temps

Joseph s'ennuie tellement qu'il a écrit tous les entiers positifs de 1 à 9 876 543 210 (inclus), qui est son nombre favori. Il a également calculé la somme de tous les chiffres de ces nombres. Il a obtenu le résultat 443 255 601 330. Maintenant, il veut faire une chose similaire. Mais il a échangé les chiffres 5 et 6 dans tous les nombres et a calculé la somme de tous les chiffres de tous les nombres qu'il a obtenu de cette façon. Quel est le résultat que Joseph obtient ainsi ?

Résultat: 443 256 101 330

Solution: Chaque changement du chiffre 5 en chiffre 6 augmente la somme de Joseph de 1, et de même chaque changement de 6 en 5 diminue la somme de 1. Cela signifie que chaque changement de 5 en 6 annule un changement de 6 en 5, donc nous nous intéressons seulement à la différence dans le nombre d'occurrences des chiffres 5 et 6 dans les entiers positifs entre 1 et 9 876 543 210.
Tout d'abord, remarquez que nous pouvons nous concentrer uniquement sur les chiffres 5 et 6 dans les positions dans lesquelles ces chiffres apparaissent dans le nombre 9 876 543 210. En effet, s'il y a un chiffre 5 dans un ordre supérieur ou inférieur, nous pouvons échanger ce chiffre 5 avec le chiffre 6 (et de même chaque chiffre 6 avec le chiffre 5) pour obtenir un nombre qui a été compté par Joseph. Par conséquent, nous n'obtenons aucune différence entre le nombre de chiffres 5 et 6.
Nous nous concentrons maintenant uniquement sur les chiffres 5 et 6 dans l'ordre des millions et des centaines de milliers. De plus, la seule différence apparaît lorsque ces deux chiffres sont précédés du triple 987 (sinon, nous pourrions appliquer la logique du paragraphe précédent). Dans cette condition, le chiffre 5 apparaît $1\,000\,000$ fois comme chiffre des millions et $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$ fois comme chiffre des centaines de milliers. De même, le chiffre 6 apparaît $543\,211$ fois comme chiffre des millions et $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$ fois comme chiffre des centaines de milliers. Par conséquent, le nombre d'occurrences du chiffre 5 est de $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 500\,000$ supérieur au nombre d'occurrences du chiffre 6.
Ainsi, le changement du chiffre 5 en chiffre 6 augmente la somme des chiffres de 500 000, donc Joseph obtiendra le résultat

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330.$$

Problème 38 ... Saut hors de l'eau

Ferb est un prisme solide homogène dont la base est un hexagone régulier de côté 0,9 m, avec une hauteur de 0,6 m et une densité de $125\,\mathrm{kg/m^3}$. Il est actuellement maintenu sous le niveau de l'eau d'un grand lac, de sorte que les deux bases sont parallèles à la surface de l'eau et que la base supérieure du prisme est précisément au niveau de l'eau. Lorsqu'on le relâche, Ferb sautera au-dessus du lac. Quelle est la hauteur au-dessus du niveau de l'eau que la base supérieure atteindra en mètres ?

Note: Supposez que les bases de Ferb resteront horizontales.

Résultat: 2,4

Solution: Soit V le volume de Ferb, $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$ sa hauteur et $\rho_{Ferb} = 125\,\mathrm{kg/m^3}$ sa densité. Après le saut, le volume original de Ferb se remplit d'eau. De cette manière, le lac perd une énergie $E = V\rho_{eau}g\frac{h}{2}$, puisque la masse de cette eau est $V\rho_{eau}$ et que son centre de gravité se trouve à une profondeur de $\frac{h}{2}$ (le lac est suffisamment grand, donc son niveau de surface restera le même). Nous devons trouver la hauteur H que Ferb atteindra. Au point le plus haut, il n'a plus d'énergie cinétique, donc l'énergie qu'il a reçue de l'eau se convertit en énergie potentielle $E = V\rho_{Ferb}gH$. En comparant les deux expressions pour E, nous trouvons

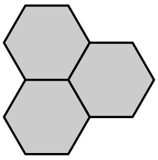
$$V\rho_{eau}g\frac{h}{2} = V\rho_{Ferb}gH,$$
$$H = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{Ferb}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{125\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \frac{0{,}6\,\mathrm{m}}{2} = 2{,}4\,\mathrm{m}.$$

Nous voyons que la base supérieure de Ferb atteindra une hauteur de 2,4 m.

Problème 39 . . . Découper des polygones

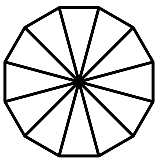
Victor a pris du papier et a découpé trois polygones réguliers ayant tous un nombre de côtés différent et la même longueur de côté. À sa grande surprise, il a pu les disposer sur la table de manière à ce qu'ils partagent tous un sommet et que chaque paire de polygones partage un côté. De cette façon, Victor obtient un n-gone (irrégulier). Quelle est la valeur maximale possible de n ?

Note: Si nous permettions aux polygones d'avoir le même nombre de côtés, l'une des façons possibles d'obtenir un n-gone serait illustrée sur la figure suivante. Dans ce cas, Victor obtiendrait $n = 12$.



Résultat: 46

Solution: Chaque m-gone régulier peut être divisé en m triangles isocèles congruents comme dans la figure.



Leurs angles opposés à la base doivent s'additionner pour donner 360°. Tous les autres angles contribuent à la somme des angles du m-gone. Puisque la somme des angles dans chaque triangle est de 180°, cela signifie que la somme des angles dans un m-gone est $m \cdot 180° - 360° = (m-2) \cdot 180°$. Chaque angle dans un polygone m-gone régulier a la même magnitude, donc la magnitude de chacun d'eux est $\frac{m-2}{m} \cdot 180°$.

Si nous voulons arranger les polygones comme l'exige l'énoncé, la somme des angles au sommet qu'ils ont en commun doit être de 360°. Donc, si nous désignons par x, y, et z les nombres de sommets des polygones réguliers et utilisons les informations du paragraphe précédent, nous devons avoir

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180° + \frac{y-2}{y} \cdot 180° + \frac{z-2}{z} \cdot 180° = 360°.$$

Nous pouvons diviser toute l'équation par 180° et simplifier pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x}+\frac{y-2}{y}+\frac{z-2}{z}&=2,\\ \left(1-\frac{2}{x}\right)+\left(1-\frac{2}{y}\right)+\left(1-\frac{2}{z}\right)&=2,\\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}&=1,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Essayons de trouver tous les triplets (x, y, z) qui satisfont cette équation. Sans perte de généralité, supposons que $x > y > z$. Si $z \geq 6$, alors $y \geq 7$ et $x \geq 8$. Mais alors

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Il est donc impossible d'avoir $z \geq 6$, donc z est l'un des nombres 3, 4 ou 5. Résolvons chaque cas séparément.

Cas $z = 3$. La condition dans ce cas est $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$. En multipliant par les dénominateurs, nous obtenons $6y+6x = xy$, ce qui peut être écrit (après avoir ajouté 36 des deux côtés) sous la forme $(x-6)(y-6) = 36$. Les deux parenthèses doivent être positives. Comme le nombre 36 peut être écrit comme un produit de deux nombres différents de quatre façons $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, nous obtenons quatre solutions, que la paire (x, y) soit l'une des paires $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$.

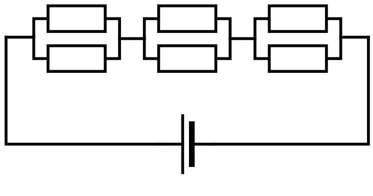
Cas $z = 4$. Nous procédons de manière similaire au cas précédent. Nous avons $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, ce qui, après multiplication, devient $4y + 4x = xy$. Après avoir ajouté 16 et factorisé, nous obtenons l'équation $(x-4)(y-4) = 16$. Ses solutions sont les paires (x, y) parmi les paires $(20, 5)$ et $(12, 6)$.

Cas $z = 5$. Enfin, dans ce cas, nous avons l'équation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$, ce qui devient $10y + 10x = 3xy$. Si nous multiplions cette équation par 3 et ajoutons 100, nous obtenons l'équation $(3x-10)(3y-10) = 100$. Cela conduit aux solutions des paires (x, y), qui sont parmi les paires $\left(\frac{110}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $(20, 4)$, $\left(\frac{35}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $(10, 5)$. Parmi celles-ci, nous ne nous intéressons pas à celles avec des fractions. De plus, nous avons obtenu le triplet $(20, 5, 4)$ dans le cas précédent (et ce n'est pas ce cas). La seule autre solution de ce cas est $(x, y) = (10, 5)$ qui ne satisfait pas la condition $y > z$. Ainsi, nous n'obtenons pas de nouvelles solutions à partir de ce cas.

Les seuls triplets (x, y, z) qui satisfont l'équation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ et les inégalités $x > y > z$ sont les triplets $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$, et $(12, 6, 4)$.
Il peut être vu qu'après avoir mis les polygones ensemble, chaque polygone aura sur son contour tous les côtés sauf deux. Cela signifie que nous devons avoir $n = (x-2) + (y-2) + (z-2) = (x + y + z) - 6$, donc nous cherchons à maximiser le nombre $x + y + z - 6$. Parmi les triplets que nous avons trouvés, les valeurs de $x + y + z - 6$ sont 46, 30, 26, 22, 23, et 16, respectivement. Par conséquent, la valeur maximale possible de n est 46.

Problème 40 ... Problème très résistant

Matej a construit un circuit électrique comme montré sur la figure. Il a utilisé une source de tension de 3 V et des résistances de 2 Ω, 3 Ω, 4 Ω, 5 Ω, 6 Ω et 7 Ω, respectivement. Mais il a oublié la position exacte des résistances dans le circuit. Il sait seulement que le courant traversant tout le circuit est $\frac{273}{580}$ A. Quel est le courant électrique en Ampères qui traverse la résistance de 5 Ω ?



Résultat: $\frac{39}{290}$

Solution: La résistance R_0 de deux résistances en parallèle, avec des résistances R_1 et R_2, est donnée par la relation

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Trois de ces paires en parallèle sont montées en série, donc la résistance totale de toutes les résistances est donnée par une somme de trois fractions de la forme ci-dessus. La résistance totale R peut être calculée à partir de la tension $U = 3\,\mathrm{V}$ de la source et du courant électrique $I = \frac{273}{580}\,\mathrm{A}$ traversant tout le circuit. On a donc

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3\,\mathrm{V}}{\frac{273}{580}\,\mathrm{A}} = \frac{580}{91}\,\Omega.$$

Nous devons donc avoir

$$\frac{580}{91}\,\Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

où R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, et R_6 sont respectivement $2\,\Omega$, $3\,\Omega$, $4\,\Omega$, $5\,\Omega$, $6\,\Omega$ et $7\,\Omega$ dans un certain ordre. Regardez cette équation sans les unités. Pour obtenir le nombre 91 dans le dénominateur, le plus petit commun multiple des dénominateurs $R_1 + R_2$, $R_3 + R_4$, et $R_5 + R_6$ doit être un multiple de 91. La factorisation première de 91 est $91 = 7 \cdot 13$. Ainsi, au moins un des dénominateurs doit être divisible par 13. Comme nous devons le faire sous la forme d'une somme de deux nombres issus de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la seule possibilité est de faire cette somme avec $6 + 7$. Cela signifie qu'une des paires de résistances en parallèle doit être composée des résistances de $6\,\Omega$ et $7\,\Omega$. Par raisonnement similaire, il doit y avoir une paire dont la somme est un multiple de 7. La seule façon de le faire est d'avoir une paire avec $2\,\Omega$ et $5\,\Omega$ et une autre paire avec $3\,\Omega$ et $4\,\Omega$.

Il reste à calculer le courant à travers la résistance de $5\,\Omega$. Elle est en parallèle avec la résistance de $2\,\Omega$, donc la résistance de cette paire est

$$R_{25} = \frac{2\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{10}{7}\,\Omega.$$

Le courant à travers toute cette paire est toujours I, donc la tension sur les deux résistances de la paire est

$$U_{25} = R_{25} I = \frac{10}{7}\,\Omega \cdot \frac{273}{580}\,\mathrm{A} = \frac{39}{58}\,\mathrm{V}.$$

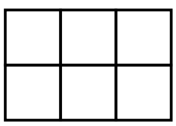
Enfin, le courant électrique I' à travers la résistance de $5\,\Omega$ est

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\,\mathrm{V}}{5\,\Omega} = \frac{39}{290}\,\mathrm{A}.$$

Problème 41 ... Des rectangles partout

Majo a dessiné un tableau de dimensions $m \times n$ divisé en mn carrés unitaires. Il a compté qu'il y a 141 400 rectangles formés par les lignes du tableau. Combien de carrés unitaires le tableau contient-il ?

Note: Nous considérons chaque carré comme un rectangle. Par exemple, il y a 18 *rectangles dans un tableau de* 2×3 *ci-dessous.*



Résultat: 700

Solution: Nous devons calculer le nombre de rectangles en fonction de m (nombre de lignes) et n (nombre de colonnes). Regardons les lignes verticales allant du haut du tableau vers le bas (il y en a $n+1$) et de manière similaire, regardons les lignes horizontales allant du côté gauche au côté droit (il y en a $m+1$). Remarquez que chaque paire de lignes verticales et chaque paire de lignes horizontales détermine précisément un rectangle. En d'autres termes, si nous choisissons un rectangle, il détermine précisément deux lignes verticales et deux lignes horizontales – celles données par l'extension de ses côtés. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les rectangles et les quadruplets de deux lignes verticales et deux lignes horizontales.
Nous devons donc simplement calculer le nombre de tels quadruplets. Pour la première ligne verticale, nous avons $n+1$ choix et pour la deuxième ligne verticale, nous avons les n choix restants. Cependant, de cette manière, nous pouvons choisir une paire de lignes de deux façons différentes. Ainsi, nous pouvons choisir les lignes verticales de $\frac{(n+1)n}{2}$ façons. De même, nous pouvons choisir les lignes horizontales de $\frac{(m+1)m}{2}$ façons. Ainsi, le nombre total de façons de choisir le quadruplet de lignes est $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$. Par conséquent, nous devons trouver les nombres m, n tels que

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400,$$
$$(m+1)m(n+1)n = 565\,600$$

soit vérifié. Nous pouvons remarquer que le nombre 565 600 est divisible par 101 (car $565\,600 = 5600 \cdot 101$) qui est un nombre premier, donc il doit diviser au moins l'un des facteurs du côté gauche. Une option, inspirée par le fait que 565 600 est aussi divisible par 100, consiste à poser l'un des m et n égal à 100. Par exemple, supposons que ce soit m. Le reste de l'équation deviendra $(n+1)n = 56$, ce qui est vérifié pour $n = 7$. Il est facile de vérifier manuellement que pour d'autres multiples de 101 (comme 808 et plus grands), le produit est supérieur à 565 600, car il est certainement plus grand que $800 \cdot 800 = 640\,000$ et donc n'aboutit à aucune autre solution. Cela signifie que Majo a dû dessiner le tableau 100×7 (ou 7×100), qui contient $100 \cdot 7 = 700$ carrés unitaires.

Problème 42 ... Un joli satellite

Trois satellites orbitent autour de la Terre. Leurs trajectoires sont des cercles centrés sur le centre de la Terre et ont des rayons presque identiques. De plus, toutes les trois trajectoires se trouvent dans le même plan. Les satellites ont des propulseurs leur permettant de maintenir la même vitesse angulaire. Le premier satellite orbite autour de la Terre toutes les 90 minutes, le deuxième toutes les 30 minutes et le troisième toutes les 15 minutes, et tous orbitent dans le sens antihoraire. Lors du lancement, tous les satellites étaient presque au même endroit. Quelle est la probabilité qu'à un moment donné choisi au hasard, les satellites forment un triangle acutangle ?

Résultat: $\frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%$

Solution: Le premier satellite orbite autour de la Terre toutes les 90 minutes, donc il effectue une rotation de $\frac{360°}{90} = 4°$ chaque minute. De même, le deuxième satellite effectue une rotation de $\frac{360°}{30} = 12°$ chaque minute et le troisième satellite effectue une rotation de $\frac{360°}{15} = 24°$ chaque minute.
Au lieu d'examiner trois satellites en orbite, nous pouvons observer la situation du point de vue de l'un des satellites. L'avantage principal est que nous considérerons un satellite comme stationnaire. Par exemple, supposons que le premier satellite soit stationnaire. Dans le cadre de référence de ce satellite, le deuxième satellite effectue une rotation de $12° - 4° = 8°$ chaque minute et le troisième satellite effectue une rotation de $24° - 4° = 20°$ chaque minute.
Nous passons maintenant à l'étude de l'acuité. Les satellites se trouvent tous sur le même cercle. Si deux d'entre eux forment un diamètre, le théorème de Thalès nous dit que les satellites forment un triangle rectangle. Nous pouvons voir que ceci est une sorte de limite entre un triangle acutangle ou obtusangle :

— s'il existe un diamètre du cercle tel que les trois satellites se trouvent du même côté de ce diamètre, alors les satellites forment un triangle obtusangle,

— s'il n'y a pas de diamètre comme celui décrit dans le point précédent, alors les satellites forment un triangle acutangle.

L'acuité/obtusité ne peut changer que si deux satellites forment un diamètre ou si deux satellites se trouvent au même endroit. Pour la paire formée par le premier et le deuxième satellite, cela se produit une fois toutes les $\frac{180°}{8°} = 22{,}5$ minutes, pour la paire formée par le premier et le troisième satellite, cela se produit une fois toutes les $\frac{180°}{20°} = 9$ minutes. Enfin, pour la paire formée par le deuxième et le troisième satellite, cela se produit une fois toutes les $\frac{180°}{20°-8°} = 15$ minutes. Les multiples de ces temps seront nos points de rupture :

— De la minute 0 à la minute 9 (le premier et le troisième satellite forment un diamètre) – ils forment un triangle obtusangle.

— De la minute 9 à la minute 15 (le deuxième et le troisième satellite forment un diamètre) – ils forment un triangle acutangle.

— De la minute 15 à la minute 18 (le premier et le troisième satellite sont au même endroit) – ils forment un triangle obtusangle.

— De la minute 18 à la minute 22,5 (le premier et le deuxième satellite forment un diamètre) – ils forment un triangle obtusangle.

— De la minute 22,5 à la minute 27 (le premier et le troisième satellite forment un diamètre) – ils forment un triangle acutangle.

— De la minute 27 à la minute 30 (le deuxième et le troisième satellite sont au même endroit) – ils forment un triangle obtusangle.

— De la minute 30 à la minute 36 (le premier et le troisième satellite sont au même endroit) – ils forment un triangle obtusangle.

— De la minute 36 à la minute 45 (le premier et le deuxième satellite sont au même endroit, ils forment tous les deux un diamètre avec le troisième satellite) – ils forment un triangle obtusangle.

En raison de la configuration à la minute 45, nous pouvons voir que de la minute 45 à la minute 90, les mêmes étapes se produiront mais dans l'ordre inverse. Cela est dû au fait que si nous observions les mouvements dans la symétrie axiale par rapport au diamètre formé par les satellites à la minute 45, nous verrions le mouvement "inverse" des satellites de la minute 45 à la minute 0. Par conséquent, rien de fondamentalement nouveau ne se produira et nous pouvons déduire la probabilité des mouvements entre les minutes 0 et 45. Pendant ces 45 minutes, les satellites ont formé un triangle acutangle entre les minutes 9 et 15 et entre les minutes 22,5 et 27. En tout, $(15 - 9) + (27 - 22{,}5) = 10{,}5$ minutes. Ainsi, la probabilité que les satellites forment un triangle acutangle est

$$\frac{10{,}5}{45} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%.$$

Remerciements

Président du comité de sélection des problèmes

Marián Poturnay

Proposition des problèmes

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Énoncés et solutions des problèmes

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Révisions

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dlugošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Traductions

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskyi, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisaj, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Coordinateur

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Sites de compétition

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkola Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkera • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu