

Rješenja

12. Náboj Junior

22. studenog 2024.



Dragi čitatelju,

trenutno držiš knjižicu problema i rješenja zadataka koji su se pojavili na natjecanju Náboj Junior 2024. Náboj Junior je međunarodno natjecanje iz matematike i fizike osmišljeno za timove sastavljene od četiri učenika viših razreda osnovne škole. Natjecanje traje 120 minuta, tijekom kojih natjecatelji timski pokušavaju riješiti što više zadataka. Zadaci ne provjeravaju samo “nabubano” znanje matematike i fizike, već zahtijevaju kreativnost i razmišljanje izvan okvira.

Ovogodišnje, 12. izdanje natjecanja Náboj Junior održano je 22. studenog 2024., a na njemu je sudjelovalo čak 112 timova iz Hrvatske! Náboj Junior se istovremeno odvijao uživo u 60 gradova širom Austrije, Češke, Poljske i Slovačke, te online u Belgiji, Hrvatskoj, Nizozemskoj i Španjolskoj.

Natjecanje u Hrvatskoj organizira udruga Mladi nadareni matematičari “Marin Getaldić”, čiji su volonteri darovali svoje vrijeme i energiju kako bi učenici iz Hrvatske mogli sudjelovati i odmjeriti snage s vršnjacima iz drugih država. Cilj natjecanja je razviti talent za matematiku i fiziku te pokazati kako prirodne znanosti mogu biti zanimljive, izazovne, ali i zabavne svim učenicima.

Natjecanje Náboj Junior stvoreno je kao zajednički projekt slovačke udruge Trojsten i čeških organizatora dopisnog seminara i natjecanja MFF UK Výfuk. Članovi organizacije su uglavnom studenti Fakulteta matematike, fizike i informatike Sveučilišta Komenskog u Bratislavi i Fakulteta za matematiku i fiziku Karlovog sveučilišta u Pragu, koji teže razviti talent i potaknuti zanimanje učenika za prirodne znanosti.

Udruga Mladi nadareni matematičari “Marin Getaldić” organizira ovo natjecanje u Hrvatskoj od 2022. godine. Mentori Udruge su volonteri, bivši vrhunski natjecatelji, a danas većinom studenti zagrebačkog PMF-a i FER-a, kao i nekih od najboljih svjetskih sveučilišta, poput Cambridgea, MIT-a i ETH-a. Kroz brojne projekte populariziramo matematiku kao znanost, nudimo kvalitetne i besplatne pripreme za natjecanja, provodimo mnoga međunarodna natjecanja u Hrvatskoj, organiziramo matematičke konferencije, ljetne kampove i zimske škole, te pružamo priliku učenicima da razvijaju svoje matematičko znanje izvan školskih okvira. Više o našim aktivnostima možete pronaći na našoj web stranici <https://mnm.hr/mnm.hr>.

U nadi da ćeš se priključiti natjecanju dogodine,
mentori Udruge

Zadatak 1 ... Tajni dnevnik

Patrik je upravo završio pisanje prvog dijela svog vrlo tajnog dnevnika i sad ga želi zaključati u kutiju tako da ga nitko ne može pročitati. Želi iskoristiti lokot koji je kupio prije nekoliko godina, ali zaboravio je troznamenastu lozinku koja otvara lokot. Patrik može isprobati jednu moguću lozinku svake 3 sekunde. Koliko minuta će mu trebati da isproba sve moguće lozinke?

Rezultat: 50

Rješenje:

Najprije odredimo broj svih mogućih lozinki, a to će biti sve kombinacije od 000 do 999, što je ukupno 1000 kombinacija. Patriku trebaju 3 sekunde za svaku, dakle za isprobati 1000 trebat će mu $3 \cdot 1000 = 3000$ sekundi, odnosno $\frac{3000}{60} = 50$ minuta.

Zadatak 2 ... Popravak poda

Ana popravlja pod u svom stanu. U tu je svrhu kupila nekoliko dasaka od hrastovine gustoće 600 kg/m^3 . Izmjerila je dimenzije jedne daske, duljina je 0,8 m, širina 12,5 cm i debljina 15 mm. Kolika je masa jedne daske u gramima?

Rezultat: 900

Rješenje:

Počinjemo pretvaranjem svega u osnovne jedinice. Znamo da je 12,5 cm 0,125 m i 15 mm 0,015 m. Sada možemo lako pronaći volumen jedne daske množenjem sve tri njezine dimenzije. To nam daje volumen $0,8 \text{ m} \cdot 0,125 \text{ m} \cdot 0,015 \text{ m} = 0,0015 \text{ m}^3$. Da bismo odredili težinu daske, trebamo pomnožiti volumen daske s gustoćom drva što nam daje masu $0,0015 \text{ m}^3 \cdot 600 \text{ kg/m}^3 = 0,9 \text{ kg}$. Naš odgovor bi trebao biti u gramima, što je $0,9 \text{ kg} = 900 \text{ g}$.

Zadatak 3 ... Prvi magični trik kojeg svi trebaju znati

Ivan želi izvesti mađioničarski trik sa svojim špilom od 6 karata s oznakama 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Trik započinje stavljanjem svih šest karata na stol u jedan red. Da bi trik uspio, potrebno je da se svaki par susjednih karata razlikuje za više od 2. U koliko različitih redosljedova Ivan može poredati karte da zadovolji ovaj uvjet?

Rezultat: 2

Rješenje:

Primjetimo da za karte 3 i 4 postoji samo po jedna karta koja se od njih razlikuje za više od 2. Za 3 je to 6, a za 4 je to 1. Zbog toga, 3 i 4 smiju imati samo jednu kartu kraj sebe, što je jedino moguće ako ih stavimo na početak i kraj. Mogući redosljedovi stoga izgledaju ovako:

| | | | | | |
|---|--|--|--|--|---|
| 3 | | | | | 4 |
| 4 | | | | | 3 |

Nadalje, znamo jedine brojeve koji se mogu pojaviti kraj 3 i 4 pa možemo prilagoditi redosljede:

| | | | | | |
|---|---|--|--|---|---|
| 3 | 6 | | | 1 | 4 |
| 4 | 1 | | | 6 | 3 |

Preostaju nam samo brojevi 2 i 5. Vidimo da u oba poretka postoji samo jedan način na koji ih možemo poredati. Stoga su 3, 6, 2, 5, 1, 4 i 4, 1, 5, 2, 6, 3 jedini redosljedovi koji zadovoljavaju uvjet, tj. postoje 2 takva redosljedova.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |

Zadatak 4 . . . Kardio kroz breze

Danijela i Jana trče kroz drvored breza u kojemu je posađeno 10 breza. Razmaci između svake dvije uzastopne breze u ovom drvoredu su isti. Danijela kreće od prve breze i radi sljedeće: trči do druge breze i natrag, zatim do treće breze i natrag do prve breze, potom do četvrte breze i natrag do prve i tako dalje dok na kraju ne otrči do desete breze i natrag do prve.

Jana radi nešto slično, ali počinje od desete breze, zatim trči do devete breze i natrag, pa do osme breze i natrag do desete. . . dok ne otrči do prve breze i opet natrag do desete.

Objе djevojke trče istom brzinom i kreću u istom trenutku. Koliko će se puta mimoići tijekom ovog kardia?

Rezultat: 10

Rješenje:

Budući da trče istom brzinom, Danijeli će trebati isto vrijeme da dođe do druge breze kao Jani da dotrči do devete breze. Ovo će također vrijediti za sve breze nadalje – bit će u istom trenutku na trećoj i osmoj brezi, na četvrtoj i sedmoj brezi, na petoj i šestoj brezi itd. Međutim, kada Danijela trči do breze s većim brojem od Jane, susrest će se prvi put. Dakle, dok Danijela bude na putu do šeste breze, a Jana na putu do pete breze, oni će se prvi put sresti. Štoviše, ponovno će se sresti na povratku od ovih breza. Od sada pa nadalje, Danijela će uvijek trčati do breze s većim brojem od Jane, stoga će se mimoići na putu do svake sljedeće breze i na putu natrag, dakle dva puta za svaku sljedeću brezu do koje će otići. Ukupno je pet takvih breza (za Danijelu šesta do deseta breza, za Janu peta do prva), pa će se mimoići $5 \cdot 2 = 10$ puta.

Zadatak 5 . . . Strastveni vozač trkaćeg automobila

Samuel je vozač trkaćeg automobila. Budući da njegov trkaći automobil nosi broj 181, on pokušava svjedočiti svim trenucima kada automobil pokazuje da je prešao broj kilometara koji je višekratnik broja 181. Danas, kada je Samuel počeo voziti, automobil je pokazivao da je prešao 32 768 kilometara, što je za 7 kilometara više od prethodnog višekratnika broja 181 (koji je 32 761). Samuel želi voziti automobil tako da sljedeći put kada automobil prijede broj kilometara koji je višekratnik broja 181, to bude točno za 2 sata. Kolika mora biti Samuelova prosječna brzina u kilometrima na sat kako bi to postigao?

Rezultat: 87

Rješenje: Znamo da je razlika između svaka dva uzastopna višekratnika broja n jednaka n . Tako je razlika između dva uzastopna višekratnika broja 181 jednaka 181. Navedeno je da je prethodni višekratnik broja 181 bio 7 kilometara unatrag. Dakle, sljedeći višekratnik broja 181 bit će za $181 - 7 = 174$ kilometara. Znamo da Samuel želi stići tamo za točno 2 sata. Njegova prosječna brzina tijekom ta dva sata mora stoga biti $v = \frac{174 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 87$ kilometara na sat.

Zadatak 6 . . . Laži i obmane

Matej ima omiljeni broj kojeg njegovi prijatelji pokušavaju otkriti. Zato im je rekao šest izjava o tom broju i svakoj pridodijelio broj. Kasnije se pokazalo da su samo tri bile istinite, dok su druge tri bile samo laži i obmane. Izjave su bile:

1. To je složen broj.
2. To je neparan broj.
4. Manji je od 30.
8. To je jednoznamenasti broj.
16. Znamenka jedinica tog broja je 9.
32. Broj je djeljiv s 5.

Nasreću, pokazalo se da je Matejev omiljeni broj upravo zbroj brojeva uz tri istinite izjave. Koji je Matejev omiljeni broj?

Rezultat: 35

Rješenje: Krenimo od prve izjave. Pretpostavimo da je laž - tada je broj koji je Matej zamislio ili 1 ili prost. Zbroj tri pozitivna cijela broja nikad nije 1 pa mora biti prost. Međutim, to je također zbroj tri od brojeva 2, 4, 8, 16, 32. Kako su svi parni, a tako je i zbroj bilo koja tri od njih. Zbroj očito nije 2, a kako je paran broj on ne može biti prost. Na ovaj smo način dobili kontradikciju, što znači da je prva tvrdnja sigurno istinita. Prva tvrdnja je jedina čiji je pripadan broj neparan. Zbog toga će zbroj istinitih tvrdnji također biti neparan, pa druga tvrdnja mora biti istinita. Ostaje pronaći treću istinitu tvrdnju.

Pogledajmo tvrdnju s brojem 4. Da je ona treća istinita tvrdnja, Matejev omiljeni broj bio bi $1 + 2 + 4 = 7$. No, u tom slučaju, tvrdnja s brojem 8 bi također bila istinita pa bismo imali četiri istinite tvrdnje. To je nemoguće, stoga tvrdnja s brojem 4 mora biti lažna. Zbog toga Matejev omiljeni broj mora biti najmanje 30. Jedini način da to bude istina je pretpostaviti da je tvrdnja s brojem 32 istinita. Dakle, glavni kandidat za Matejev omiljeni broj je $1 + 2 + 32 = 35$.

Lako je provjeriti da su za broj 35 istinite tvrdnje upravo one s brojevima 1, 2 i 32, a ostale laž. Stoga je 35 zaista Matejev omiljeni broj.

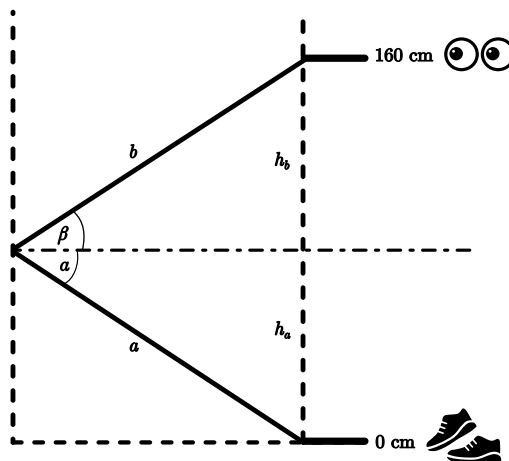
Zadatak 7 ... Zadatak sa stilom

Mihael je jako modno osvještana osoba. Kada isprobava svoje kombinacije, jako mu je bitno da u ogledalu može vidjeti svoje cipele. Mihael je kupio novo pravokutno ogledalo i sada ga želi objesiti na zid tako da vidi svoja stopala u njemu kad stoji 120 cm udaljen od ogledala. Njegove oči su na visini 160 cm iznad poda. Pretpostavite da su njegove cipele na visini 0 cm. Koja je najveća visina iznad poda u centimetrima na kojoj se može nalaziti donji rub ogledala?

Napomena: Pretpostavite da ogledalo nema okvir.

Rezultat: 80

Rješenje: Znamo da mora postojati zraka svjetlosti koja putuje od Mihaelovih cipela do ogledala takva da nakon refleksije od ogledala putuje u Mihaelove oči na visini 160 cm. Primjetimo da su njegove oči i njegova stopala na jednakoj horizontalnoj udaljenosti od ogledala. Također, prisjetimo se da kad zraka dođe do ogledala, njen upadni kut bit će jednak njenom kutu refleksije. Zato možemo nacrtati slijedeću skicu:



S obzirom na to da su kutovi α i β jednaki, udaljenosti a i b će također biti jednake, i važnije, visine koje će zraka preći h_a i h_b će biti jednake. Dakle, mjesto na kojem će se zraka reflektirati od ogledala će biti točno na sredini između Mihaelovih očiju i stopala. Kako su njegove oči na visini 160 cm, refleksija će se dogoditi na visini $\frac{160 \text{ cm}}{2} = 80 \text{ cm}$.

Zato je i maksimalna visina donjeg ruba ogledala na visini 80 centimetara iznad poda. Kad bi bila na većoj visini, zraka se ne bi mogla odbiti na toj visini i Mihael ne bi mogao vidjeti svoje cipele u ogledalu.

Zadatak 8 ... Drugi magični trik kojeg svi trebaju znati

Ivan ponovno izvodi trik sa šest karata s oznakama 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ovaj put je također pripremio tablicu veličine 2×3 u koju ove karte savršeno pristaju. Da bi ovaj trik uspio, Ivan mora složiti karte u tablicu na takav način da su brojevi u svakom retku (s lijeva na desno) i u svakom stupcu (od gore prema dolje) poredani uzlazno. Jedan takav raspored može se vidjeti na slici. Na koliko različitih načina Ivan može složiti karte da je zadovoljen ovaj uvjet?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 3 | 4 | 6 |

Rezultat: 5

Rješenje:

Promotrimo broj u gornjem lijevom kvadratu. Svaki broj u ovoj tablici može se dosegnuti pomicanjem od tog kvadrata prema dolje ili udesno. Stoga svi brojevi u tablici moraju biti veći od ovog broja. To prisiljava broj u gornjem lijevom kvadratu da bude 1. Slično, u donjem desnom kvadratu mora biti broj 6.

| | | |
|---|--|---|
| 1 | | |
| | | 6 |

Zatim, pogledajmo gdje se može postaviti broj 2. Mora biti u jednom od kvadrata uz kvadrat s brojem 1 (u suprotnom bi postojao kvadrat s brojem između 1 i 2, što je nemoguće). Dakle, imamo samo dvije mogućnosti za postavljanje broja 2:

Slučaj 1. Broj 2 je desno od broja 1. U ovom slučaju imamo tri mogućnosti za broj desno od broja 2 (to mogu biti 3, 4 ili 5). Za svaki odabir broja u ovom kvadratu, preostale kvadrate možemo popuniti samo na jedan način.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 3 | 4 | 6 |

Slučaj 2. Broj 2 je ispod broja 1. U ovom slučaju ponovno imamo tri mogućnosti za kvadrat desno od kvadrata s brojem 2. Preostali kvadrati se mogu popuniti jednoznačno, no ne dobivamo uvijek valjano rješenje (ako je broj 3 desno od broja 2, ne dobivamo valjano rješenje – drugi stupac imat će veći broj u gornjem redu nego u donjem).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 6 |

Preostaje zbrojiti mogućnosti iz oba slučaja, pa imamo $3 + 2 = 5$ mogućnosti za postavljanje karata u tablicu na valjan način.

Zadatak 9 ... Beprijekorni sateliti

NASA je lansirala dva satelita, Alfreda i Bornu. Iz praktičnih razloga, oba su lansirana točno iznad Greenwicha. Lansirani su u istom trenutku i u istom smjeru, ali na različitim visinama. To uzrokuje da, iako oba satelita

idu po kružnoj putanji oko Zemlje, njihove kutne brzine se razlikuju. Alfred se kreće s kutnom brzinom 90° po satu, a Borna se kreće s kutnom brzinom 120° po satu. Koliko sati nakon lansiranja će Alfred i Borna po prvi puta ponovno biti na istom mjestu iznad Zemlje (moguće različitom od Greenwicha)?

Rezultat: 12

Rješenje: Svaki sat, Borna se pomakne $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ više nego Alfred. To se nastavlja događati sve dok Borna ne prijeđe točno 360° više nego Alfred – u tom trenutku Borna je prešao jedan puni krug više nego Alfred i stoga će se ponovno nalaziti jedan iznad drugoga. Kako Borna prijeđe 30° više od Alfreda svaki sat, prijeći će 360° više nego Alfred nakon $\frac{360}{30} = 12$ sati.

Zadatak 10 ... Zapadna cesta

Svatko na Divljem zapadu voli Zapadnu cestu jer je potpuno ravna, bez ikakvih zavoja. Jedan je klinac imenom Billy hodajući niz Zapadnu cestu primjetio zanimljiv fenomen: kad je pogledao iza sebe, shvatio je da je sunce točno iznad ceste koja se prostirala za njim. Kad je ponovno pogledao prema naprijed, vidio je da cesta naglo završava i umjesto nje, dva objekta neposredno ispred sebe, jedan zdesna drugom. Bilo je to usko stablo visine 3 m i oglasna ploča okrenuta prema njemu, visine 2,4 m i širine 5 m. Ploča je dodirivala tlo. Billy je izmjerio duljinu sjene koju je bacalo drvo, 75 cm. Koliko iznosi površina sjene koju baca oglasna ploča izražena u metrima kvadratnim?

Rezultat: 3

Rješenje:

Budući da je oglasna ploča okrenuta izravno prema suncu, širina sjene bit će jednaka širini ploče, 5 m. Ipak, visina će biti drugačija. Znamo da se visina stabla koje stoji neposredno pokraj ploče promijenila s 3 m na 0,75 m, dakle omjer visine stabla i duljine njegove sjene je $\frac{3}{0,75} = \frac{4}{1}$. Ovaj će omjer biti jednak i za oglasnu ploču, dakle duljina sjene ploče bit će $\frac{2,4 \text{ m}}{4} = 0,6 \text{ m}$. Ukupna površina sjene je duljina sjene puta širina sjene, dakle $0,6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$.

Zadatak 11 ... Globalno zatopljenje

Jednog dana Ivan reče: "Toliko je vruće u kuhu da bi, kad bih bio u SAD-u, bilo dvostruko vrućije!" Mislio je reći da je trenutna temperatura u kuhu izražena u stupnjevima Fahrenheita dvostruko veća nego kad bi bila izražena u stupnjevima Celzijevim. Kolika je temperatura u kuhu u stupnjevima Celzijevim?

Napomena: Ako je temperatura u stupnjevima Celzijevim $N^\circ\text{C}$, onda je temperatura u stupnjevima Fahrenheita

$$\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}.$$

Rezultat: 160

Rješenje:

Neka je temperatura izražena u stupnjevima Celzijevim $N^\circ\text{C}$. Znamo da je ekvivalentna temperatura u stupnjevima Fahrenheita $\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}$. Međutim, ta temperatura mora po iznosu biti dvostruka temperaturi u stupnjevima Celzijevim, dakle $2N^\circ\text{F}$. Možemo ovo zapisati kao jednadžbu: $\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) = 2N$ i preurediti je:

$$2N - \frac{9}{5} \cdot N = 32.$$

Odavde imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \cdot N &= 32, \\ N &= 160. \end{aligned}$$

Temperatura u kuhalu iznosi 160°C .

Zadatak 12 ... Spori počeci

Za svoj šesnaesti rođendan, Miho je dobio knjigu na poklon. Prošlo je neko vrijeme otkako je Miho zadnji put pročitao knjigu, pa zna da će mu trebati neko vrijeme da se potpuno udubi u nju. Stoga je smislio poseban plan kako da pročita cijelu knjigu: svaki dan će pročitati jednu stranicu više nego prethodni, počevši s 1 stranicom prvi dan. Ako knjiga ima 2024 stranice, koliko će dana trebati Mihi da pročita cijelu knjigu?

Rezultat: 64

Rješenje: Nakon jednog dana, Miho će pročitati 1 stranicu, nakon dva dana $1 + 2$ stranice, nakon tri dana $1 + 2 + 3$ stranice i tako dalje. Dakle, nakon n dana pročitat će $1 + 2 + \dots + n$ stranica. Koristeći formulu iz podsjetnika, možemo ovu sumu zapisati kao $\frac{n(n+1)}{2}$. Pitanje je koji je najmanji broj n takav da je $\frac{n(n+1)}{2}$ barem 2024. Dakle, trebamo riješiti nejednadžbu:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} &\geq 2024, \\ n(n+1) &\geq 4048.\end{aligned}$$

Možemo procijeniti da za $n = 60$ umnožak $n(n+1)$ iznosi otprilike 3600, pa će traženi n biti nešto veći. Doista, možemo pronaći da $63 \cdot 64 = 4032 \leq 4048$ i $64 \cdot 65 = 4160 \geq 4048$. Dakle, Mihi će trebati 64 dana da pročita cijelu knjigu.

Zadatak 13 ... Bilo kuda palindromi posvuda

Neven voli palindrome toliko da je počeo tražiti palindrome koji se mogu zapisati kao zbroj drugih palindroma. Danas je odlučio potražiti najveći palindrom koji se može zapisati kao zbroj tri (ne nužno različita) dvoznamenkasta palindroma. Koji će broj Neven pronaći?

Napomena: Palindrom je broj čiji je poredak znamenaka isti slijeva i zdesna. Npr. broj 12321 je peteroznamenkasti palindrom.

Rezultat: 242

Rješenje:

Počnimo promatrajući dvoznamenkaste palindrome. Budući da znamenke moraju biti jednake zdesna i slijeva, ovi će se palindrom sastojati samo od dvije jednake znamenke. Dvoznamenkasti palindromi su 11, 22, 33... pa sve do 99. Primjetimo jedno zajedničko svojstvo ovih brojeva – svi su djeljivi s 11. Dakle, ako zbrojimo neka tri i njihov će zbroj biti djeljiv s 11.

Najveći mogući zbroj tri dvoznamenkasta palindroma je $99 + 99 + 99 = 297$. Stoga ostaje pronaći prvi palindrom manji od 297 koji je djeljiv s 11. Provjeravamo redom 292, 282, 272... odnosno brojeve oblika $2x2$ gdje je x prirodan broj. Možemo iskoristiti pravilo djeljivosti s 11 koje govori da zbroj znamenaka na parnim pozicijama umanjen za zbroj znamenaka na neparnim pozicijama mora biti 0 ili djeljiv s 11. Spuštajući se od 297, prvi takav je 242. Ostaje samo provjeriti može li se zapisati kao zbroj tri dvoznamenkasta palindroma, a to uistinu vrijedi jer imamo $77 + 77 + 88 = 242$.

Zadatak 14 ... Kroasan dilema

Lucija voli jesti kroasane za doručak. Međutim, kao prava gastronomka, od svih mogućih okusa želi odabrati onaj najviše kvalitete. Odlučila je da je kvalitetu kroasana najbolje mjeriti po njegovoj prosječnoj gustoći, pa trenutno provodi eksperiment u kojem želi saznati prosječnu gustoću svake vrste kroasana. Sada eksperimentira s čokoladnim kroasanom. Izmjerila je da je volumen cijelog kroasana 100 ml, od čega je 15 ml čokoladno punjenje. Gustoća tog punjenja je 1200 kg/m^3 , a gustoća tijesta je 800 kg/m^3 . Kolika je prosječna gustoća tog čokoladnog kroasana u kg/m^3 ?

Rezultat: 860

Rješenje: Prosječnu gustoću tijela računamo tako da njegovu ukupnu masu podijelimo s ukupnim volumenom tijela. Znamo da je ukupni volumen kroasana $100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3$, pa nam treba još samo ukupna masa. Nju možemo izračunati kao masu punjenja zbrojenu s masom tijesta. Da izračunamo te mase, jednostavno koristimo formulu $m = \rho \cdot V$, gdje je ρ gustoća i V volumen. No, moramo biti oprezni s mjernim jedinicama. Koristit ćemo vrijednosti $15 \text{ ml} = 15 \text{ cm}^3$ za volumen punjenja (V_p) i $100 \text{ ml} - 15 \text{ ml} = 85 \text{ ml} = 85 \text{ cm}^3$ za volumen tijesta (V_t). Zato moramo pretvoriti zadane gustoće u odgovarajuće mjerne jedinice: $1200 \text{ kg/m}^3 = 1,2 \text{ g/cm}^3$ za gustoću punjenja (ρ_p) i $800 \text{ kg/m}^3 = 0,8 \text{ g/cm}^3$ za gustoću tijesta (ρ_t). Sada možemo izraziti ukupnu masu kao:

$$\begin{aligned} m_{\text{ukupno}} &= m_{\text{punjenje}} + m_{\text{tijesto}}, \\ &= \rho_p \cdot V_p + \rho_t \cdot V_t, \\ &= 1,2 \text{ g/cm}^3 \cdot 15 \text{ cm}^3 + 0,8 \text{ g/cm}^3 \cdot 85 \text{ cm}^3, \\ &= 18 \text{ g} + 68 \text{ g}, \\ &= 86 \text{ g}. \end{aligned}$$

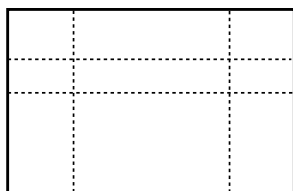
Sada prosječnu gustoću možemo jednostavno izračunati kao ukupnu masu podijeljenu s ukupnim volumenom:

$$\rho_{\text{prosjecno}} = \frac{m_{\text{ukupno}}}{V_{\text{ukupno}}} = \frac{86 \text{ g}}{100 \text{ cm}^3} = 0,86 \text{ g/cm}^3.$$

S obzirom na to da se odgovor traži u kg/m^3 , naš odgovor je 860 kg/m^3 .

Zadatak 15 ... Vrtlarova ostavština

Adam je vrtlar. Posjeduje vrt pravokutnog oblika za koji zna da ima opseg od 16 m. Želi da se njegovi sinovi brinu o ovom vrtu, pa ga je podijelio na 9 pravokutnih dijelova kao na slici (isprekidane linije predstavljaju granice između pojedinih dijelova). Koliki je zbroj opsega svih 9 dijelova u metrima?



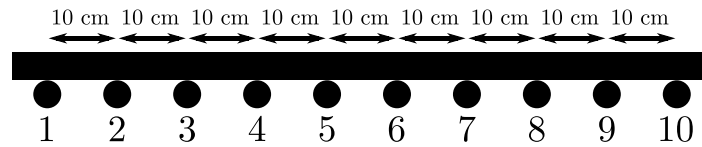
Rezultat: 48

Rješenje: Znamo da je opseg velikog pravokutnika 16 m, stoga je zbroj duljina svih punih linija 16 m. Kada pogledamo isprekidane linije, možemo vidjeti da ih možemo prerasporediti kako bismo stvorili isti pravokutnik kao i onaj s punim linijama. Dakle, zbroj njihovih duljina jednak je zbroju duljina svih punih linija, što znači također 16 m. Sada se postavlja pitanje, koliko puta koristimo koje linije kada zbrajamo opsege svih 9 dijelova. Svaka puna linija bit će korištena točno jednom jer će svaki segment svake pune linije pripadati točno jednom od 9 opsega. Međutim, isprekidane linije uvijek su između dva dijela, pa će svaki segment svake isprekidane linije pripadati točno 2 od 9 opsega. Dakle, znamo da će svaka isprekidana linija biti korištena dvaput, a svaka puna linija jednom. Sveukupno ćemo koristiti cijeli opseg početnog pravokutnika $2 + 1 = 3$ puta, pa je odgovor $3 \cdot 16 \text{ m} = 48 \text{ m}$.

Zadatak 16 ... Možemo li ju ne uništiti?

Bob Graditelj izgradio je policu. Sastoji se od homogene daske dužine 1 metar koju podupire 10 klinova, pri čemu su svaka dva susjedna udaljena 10 centimetara. Osim toga, Bob je označio klinove brojevima od 1 do

10 s lijeva na desno, kao na slici. Nekoliko dana kasnije, Bob je shvatio da je 10 klinova previše. Stoga je odlučio ukloniti neke od klinova bez pomicanja daske. Sada se pita: koliki je minimalni umnožak brojeva preostalih klinova tako da daska ne padne?



Rezultat: 6

Rješenje: Kako bi daska ostala stabilna, njezino težište mora ležati između dvaju klinova. Drugim riječima, mora postojati jedan klin lijevo od težišta i jedan klin desno od njega. Težište daske leži između klinova broj 5 i 6, stoga iz prethodne rečenice znamo da moramo imati barem jedan klin s brojem najviše 5 i jedan klin s brojem najmanje 6. Da bismo dobili najmanji umnožak, trebamo uzeti najmanji klin iz oba dijela. Stoga uzimamo klin 1 iz lijevog dijela (s brojem najviše 5) i klin 6 iz desnog dijela (s brojem najmanje 6).

Ako koristimo samo ova dva klina, težište će ležati između njih, pa će daska biti stabilna. Budući da rješenje zapravo dokazuje da umnožak ne može biti manji, možemo reći da je minimalni umnožak preostalih klinova 6.

Zadatak 17 ... Za statističare

Jakov uči statistiku. Naučio je nekoliko novih pojmova. Naučio je da u danom skupu podataka, mod je broj koji se najviše puta pojavljuje u skupu. Medijan je broj koji se nalazi u sredini kad skup poredamo uzlazno. Na primjer, u skupu podataka 2, 7, 20, 6, 2, mod je 2, a medijan 6.

Jakov je uzeo skup podataka koji sadrži brojeve 8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5 i još tri (ne nužno različita) broja koja je zaboravio. Sjeća se samo da je medijan skupa bio 4 te da je mod bio jedinstven (postojao je samo jedan mod u cijelom skupu podataka) i da je također bio 4. Koja je najveća moguća vrijednost aritmetičke sredine brojeva u ovom skupu podataka? Odgovor napišite kao do kraja skraćeni razlomak.

Rezultat: 5

Rješenje: Znamo da skup ima jedinstven mod: 4. Zato se broj 4 u skupu mora pojavljivati više nego bilo koji drugi broj. Od poznatih brojeva, najviše se puta pojavljuju brojevi 3 i 5, svaki po dva puta. To znači da se broj 4 mora pojaviti barem 3 puta, ali od poznatih brojeva samo je jedan broj 4. Dakle, od 3 nepoznata broja, koje je Jakov zaboravio, barem dva moraju biti 4.

Sada znamo vrijednosti 10 od 11 brojeva u skupu. Promotrimo sada drugi uvjet: medijan također mora biti 4. Kada poredamo 10 brojeva koje znamo u rastući niz (ne nužno strogo rastući), dobijemo: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Nakon dodavanja jedanaestog broja u niz broj u sredini mora biti 4. Sredina niza je trenutno između brojeva 4 i 5, pa kad bi jedanaesti broj bio 5 ili veći, medijan bi bio 5 što je u kontradikciji s uvjetom zadatka. Da bi uvjet bio ispunjen, jedanaesti broj mora biti 4 ili manji. Kako želimo da aritmetička sredina bude što veća moguća, odabrat ćemo broj 4. Sad znamo svih 11 brojeva u skupu: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Njihova aritmetička sredina je njihov zbroj podijeljen s brojem koliko ih ima, odnosno $\frac{55}{11} = 5$.

Zadatak 18 ... Krećemo se zajedno

Simon i Barbara žele se sastati. Simon želi iznenaditi Barbaru, pa ulazi u svoj automobil i počinje voziti prema Barbarinoj kući brzinom od 30 km/h. Međutim, dok vozi, prekida ga telefonski poziv. To je Barbara koja želi provjeriti kako je! Simon nema izbora nego priznati da trenutno vozi prema njenoj kući. Barbara je vrlo uzbuđena i želi se sastati s njim što je prije moguće, pa ulazi u svoj automobil i počinje voziti prema Simonu. Počinje voziti brzinom od 90 km/h točno onda kada je Simon prešao polovicu udaljenosti do Barbarine kuće. Sretno se susreću točno 1 sat nakon što je Simon počeo voziti. Kolika je udaljenost između Barbarine kuće i Simonove kuće u kilometrima?

Rezultat: 48

Rješenje: Označimo ukupnu udaljenost između kuća sa s , udaljenost koju je prešao Simon sa s_{si} i udaljenost koju je prešla Barbara sa s_{ba} . Možemo primijetiti da $s = s_{si} + s_{ba}$, tako da kako bismo našli s trebamo samo odrediti obje udaljenosti koje su prešli Simon i Barbara. Prvo, možemo lako odrediti s_{si} koristeći formulu $v = \frac{s}{t}$, preuređenu kao $s = v \cdot t$, gdje je v brzina, a t vrijeme. Stoga je $s_{si} = v_{si} \cdot t_{si} = 30 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 30 \text{ km}$. Međutim, još uvijek trebamo pronaći s_{ba} kako bismo odredili s . Da bismo to učinili, izrazit ćemo vrijeme koje je Simonu trebalo da dođe do polovice puta s koristeći s . Iz $t = \frac{s}{v}$ možemo odrediti da će vrijeme potrebno za prelazak $\frac{s}{2}$ za Simona koji putuje brzinom od 30 km/h biti $t = \frac{\frac{s}{2}}{30} = \frac{s}{60} = \frac{s}{2 \cdot 30 \text{ km/h}} = \frac{s}{60 \text{ km/h}}$. Koristeći ovo, možemo također izraziti vrijeme tijekom kojeg je Barbara putovala (t_{ba}): to je 1 sat minus Simonovo vrijeme potrebno za prelazak polovice udaljenosti. Stoga, $t_{ba} = 1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}$. Sada možemo izraziti udaljenost koju je prešla Barbara s_{ba} kao $s_{ba} = v_{ba} \cdot t_{ba} = 90 \text{ km/h} \cdot \left(1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}\right) = 90 \text{ km} - \frac{90 \text{ km/h} \cdot s}{60 \text{ km/h}} = 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s$. Kako znamo vrijednost s_{si} i izrazili smo s_{ba} preko s , jednostavno možemo izračunati ukupan put s kao

$$\begin{aligned} s &= s_{si} + s_{ba}, \\ s &= 30 \text{ km} + 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s, \\ \frac{5}{2} s &= 120 \text{ km}, \\ s &= 48 \text{ km}. \end{aligned}$$

Stoga je udaljenost između Barbarine i Simonove kuće 48 km.

Zadatak 19 ... Dva puta dva puta

Tomi je dosadno pa počinje pisati brojeve na ploču. Na početku napiše jedan broj 2, zatim u sljedeći red dva broja 2 odvojena razmakom, pa u sljedeći red tri broja 2, pa četiri broja 2 itd. sve dok u zadnji red ne napiše 2024 broja 2. Zatim je odlučio izmnožiti sve brojeve 2 koje je napisao na ploči. Koja je posljednja znamenka tog produkta?

Rezultat: 6

Rješenje:

Želimo izračunati zadnju znamenku umnoška

$$(2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{2024\text{-puta}}.$$

Budući da nas zanima samo posljednja znamenka cijelog produkta, problemu možemo pristupiti razmatrajući samo produkt posljednjih znamenki produkata u zagradama.

Najprije ćemo zapisati nekoliko prvih brojeva unutar zagrada:

$$\begin{aligned} &2, \\ &2 \cdot 2 = 4, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256, \dots \end{aligned}$$

Primijetimo da u ovom nizu brojeva posljednja znamenka prati uzorak 2, 4, 8, 6. Budući da postoji uzorak u brojevima unutar zagrada, posljednja znamenka produkta bit će rezultat ponavljnja množenja brojeva iz ovog uzorka: $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \dots$

Krenemo li ispisivati samo posljednje znamenke ovog postupka množenja, dobit ćemo sljedeći niz brojeva: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, 8, 4, 4, 8, 2, ... Ponovno možemo primijetiti uzorak 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, ovaj put duljine 8. Posljednja znamenka cijelog množenja bit će jedna od znamenaka ovog uzorka. Budući da ukupno ima 2023 množenja između 2024 zagrada u našoj jednadžbi, možemo podijeliti 2023 s 8, duljinom uzorka, i ostatak će nam reći na kojoj ćemo poziciji uzorka stati nakon svih množenja.

Vrijedi $2023 : 8 = 252$, ostatak 7, dakle posljednja znamenka cijelog produkta je 6 jer je to sedma znamenka uzorka duljine 8 kojeg smo ranije otkrili.

Zadatak 20 ... Radijska tombola

Radijski kanal organizira tombolu svaki dan. Svatko može poslati SMS na određeni telefonski broj i sudjelovati u tomboli taj dan. Jučer je svaki SMS korisniku dao 1 listić za tombolu s jednim pobjednikom. Danas je radio izdao poseban poziv i svaki SMS korisniku daje 30 listića. Ivan je poslao 1 SMS jučer i 1 SMS danas. Ako znamo da su organizatori primili jednak broj SMS-ova oba dana, koliko puta je veća vjerojatnost da Ivan pobijedi danas od jučerašnje vjerojatnosti?

Rezultat: 1

Rješenje: U današnjoj tomboli Ivan je dobio 30 puta više listića, ali zato što su svi dobili 30 puta više listića, ukupan broj listića je također 30 puta veći. Zato, iako Ivan ima 30 puta više listića za tombolu, oni tvore jednaki udio svih listića kao i jučer. Zato vjerojatnost Ivanove pobjede mora biti jednaka kao i jučer. Odnosno, ona je 1 puta veća.

Zadatak 21 ... Otpornost na otpornost

Matko je vrlo otporan pa se lagano može oduprijeti učenju o elektricitetu. Zadnje je naučio da ako napravi žicu duljine ℓ i poprečnog presjeka S od materijala električne otpornosti ρ , otpor žice bit će $R = \frac{\rho\ell}{S}$. Odlučio je probati i napravio je bakrenu žicu otpora R . Zatim je žicu otalio i iskoristio sav bakar da napravi novu žicu čiji je radijus presjeka trećina radijusa početne žice. Otpornost nove žice je kR . Odredi vrijednost koeficijenta k .

Rezultat: 81

Rješenje:

Radijus nove žice je trećina radijusa početne, a kako je površina kruga proporcionalna kvadratu radijusa, poprečni će presjek nove žice imati površinu $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$. Volumen nove žice bit će jednak volumenu početne, dakle smanjenje površine na $\frac{1}{9}$ početne implicira povećanje duljine 9 puta, $\ell' = 9\ell$. Otpornost je svojstvo materijala pa se nije promijenila. Sada računamo otpornost nove žice:

$$R' = \frac{\rho\ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81 \frac{\rho\ell}{S} = 81R.$$

Odavde vidimo da je otpornost nove žice 81 puta otpornost početne žice, dakle vrijednost k je 81.

Zadatak 22 ... Dresovi iz Dresdena

Wolfgang pere dres svog omiljenog dresenskog nogometnog kluba. Dresden koristi 75 dresova sa 75 uzastopnih brojeva na njima. Jučer ih je sve povješao u rastućem poretku. Primijetio je da je zbroj brojeva posljednjih 5 dresova točno 6 puta veći od zbroja brojeva prvih 5 dresova. Koji je broj bio na dresu obješenom točno u sredini?

Rezultat: 49

Rješenje:

Označimo s x broj dresa u sredini. Ispred njega nalazi se $\frac{75-1}{2} = 37$ dresova, isto kao i iza njega. Sasvim je jasno da su brojevi na prvih pet dresova $x - 37$, $x - 36$, $x - 35$, $x - 34$ i $x - 33$, a brojevi na posljednjih pet $x + 33$, $x + 34$, $x + 35$, $x + 36$ i $x + 37$. Uvjet zadatka možemo zapisati kao jednadžbu:

$$\begin{aligned}(x + 33) + (x + 34) + (x + 35) + (x + 36) + (x + 37) &= 6((x - 37) + (x - 36) + (x - 35) + (x - 34) + (x - 33)), \\ 5x + 175 &= 6(5x - 175), \\ 5x + 175 &= 30x - 1050, \\ 25x &= 1225, \\ x &= 49.\end{aligned}$$

Zaključujemo da je broj na dresu u sredini $x = 49$.

Zadatak 23 ... Zdravi prah

Mislav priprema zdravi snack i za to su mu potrebne suhe banane. Kupio je grozd banana koje prirodno imaju udio vode od 75% i odlučio ih osušiti. Polovicu je stavio u zračnu sušilicu koja je smanjila njihov udio vode na 25%, a polovicu u zamrzivač koji je smanjio njihov udio vode na samo 10%. Na kraju je sve posušene banane samljeo u prah i pomiješao ih. Koji postotak vode sadrži ovaj prah? Odgovorite s potpuno skraćenim razlomkom.

Rezultat: $\frac{2}{11}$

Rješenje: Neka je m masa banana. Znamo da sadrže $\frac{3}{4}m$ vode i $\frac{1}{4}m$ suhe tvari. Tako svaka polovica banana sadrži $\frac{1}{8}m$ suhe tvari. Za banane osušene u zračnoj sušilici, suha tvar čini 75% banana, tako da ove banane sada teže $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$, a voda u njima ima masu $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$. Slično, banane iz zamrzivača teže $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$, a voda teži $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$.

Ukupna masa praha bit će $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$, od čega je $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ masa vode. Dakle, udio vode u prahu je

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Zadatak 24 ... Skakanje u dizalu

Karlo teži 75 kg i u normalnim uvjeti može skočiti do 1 m u vis. Jednom je u ogromno dizalo uzeo vagu i otkrio da na početku spusta vaga pokazuje samo 60 kg. Koliko iznosi najveća visina do koje bi Karlo mogao skočiti na početku spusta ovog dizala?

Rezultat: 1,25

Rješenje:

Kada skače, Karlo dobiva kinetičku energiju. Kako bi Karlo koji teži $m = 75$ kg skočio $h_0 = 1$ m u vis treba mu $E = mgh_0$ energije. Što je drukčije u pokretnom dizalu? Vaga pokazuje manje jer je gravitacijsko ubrzanje drukčije. Označimo to novo ubrzanje s g' . Stoga Karlo djeluje na vagu silom $F_g = mg'$, ali vaga pokazuje $m' = 60$ kg jer "misli" da se sve događa pri uobičajenom gravitacijskom ubrzanju. To što pokazuje m' znači da na nju djeluje sila $m'g$, a to je zapravo F_g što daje

$$\begin{aligned}mg' &= m'g, \\ g' &= \frac{m'}{m}g.\end{aligned}$$

Vratimo se skakanju. Budući da se gravitacijsko ubrzanje promijenilo, Karlo će uz energiju E skočiti do visine h . Energija se pretvara u potencijalnu, $E = mg'h$. Zaključujemo da će Karlo skočiti do visine

$$\begin{aligned}mgh_0 &= mg'h, \\ h &= \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} \cdot 1 \text{ m} = 1,25 \text{ m}.\end{aligned}$$

Zadatak 25 ... Istrebljivanje broja 3

Za Petra, broj 3 je povezan samo s nesrećom (npr. uvijek nađe tri kosti u obroku s ribom bez kostiju), pa je odlučio izbrisati broj 3 iz svog života. Ne koristi ni jedan broj koji sadrži znamenku 3 ili koji je djeljiv s brojem 3. Koliko brojeva između 1 i 100 (uključujući) Petar može koristiti?

Rezultat: 55

Rješenje: Prebrojiti ćemo brojeve koje Petar ne koristi. Višekratnici broja 3 između 1 i 100 su 3, 6, ..., 99, pa ih je ukupno $99 : 3 = 33$. Dodatno, postoji 19 brojeva koji u sebi sadrže znamenku 3. (10 brojeva koji ju imaju na mjestu jedinice i 10 koji ju imaju na mjestu desetice, ali broj 33 je u obje te grupe pa pazimo da ga ne brojimo dvaput). Petar ne koristi brojeve ni iz jedne od ove dvije grupe. Ali postoje neki brojevi koji su u obje grupe, to su brojevi 3, 30, 33, 36, 39, 63, 93 koji bi trebali biti prebrojeni samo jednom. Dakle, Petar ne koristi $33 + 19 - 7 = 45$ brojeva. Koristi sve ostale, odnosno koristi $100 - 45 = 55$ brojeva.

Zadatak 26 ... Čuvaj se pješaka

Terezija vozi automobil brzinom 15 m/s. Odjednom primijeti pješaka na pješačkom prijelazu. Vrijeme njezine reakcije je 1 s i tada počinje kočiti konstantnom silom. Na taj se način auto zaustavio nakon 33 m. Kolike bi duljine bio zaustavni put (u metrima) da je Terezija počela kočiti pri brzini od 35 m/s?

Rezultat: 133

Rješenje:

Neka je v Terezijina brzina. Za prvih $t_0 = 1$ s nakon što je primijetila pješaka Terezija se i dalje kretala brzinom v dakle prešla je udaljenost $s_1 = vt_0$. Tada je počela kočiti konstantnom silom F . Ova sila djeluje na putu s_2 , dakle obavlja rad $W = Fs_2$ koji smanjuje kinetičku energiju automobila $E = \frac{1}{2}mv^2$, gdje je m masa automobila. Stoga imamo $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, što znači da će automobil nakon što je počeo kočiti, stati na udaljenosti

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

Zadatak nam govori da je, kad je Terezija vozila brzinom $v_1 = 15$ m/s, prešla zaustavni put $s_1 + s_2$ jednak $s = 33$ m. Koristeći ovo možemo izraziti nepoznatu veličinu $\frac{m}{F}$ kao

$$s = v_1 t_0 + \frac{mv_1^2}{2F},$$

$$\frac{m}{F} = \frac{2(s - v_1 t_0)}{v_1^2}$$

u uvrštavanjem u izraz za zaustavni put $s' = s'_1 + s'_2$ uz brzinu $v_2 = 35$ m/s dobivamo

$$s' = v_2 t_0 + \frac{mv_2^2}{2F},$$

$$s' = v_2 t_0 + \frac{(s - v_1 t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} + \frac{(33 \text{ m} - 15 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s}) \cdot (35 \text{ m/s})^2}{(15 \text{ m/s})^2} = 133 \text{ m}.$$

Sasvim je jasno da bi Terezijin zaustavni put pri brzini $v_2 = 35$ m/s bio $s' = 133$ m.

Zadatak 27 ... Ples na vodi

Organizatori godišnjeg Aquatechno plesa žele na jezero staviti plutajući plesni podij. Podij je kvadar debljine 10 cm i prosječne gustoće $0,6 \text{ g/cm}^3$. Organizatori žele da podij izdrži masu od 4000 kg, a da ne potone. Koja je minimalna potrebna površina gornje plohe u metrima kvadratnim?

Rezultat: 100

Rješenje: Označimo potrebnu površinu s S , tako da je volumen plesnog podija $V = S \cdot 10 \text{ cm}$. Kada je pod maksimalnim teretom koji može izdržati, gornja ploha će biti u razini s vodom oko nje, pa će istiskivati vodu volumena V . Istisnuta voda će imati masu $V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3$, i to mora biti jednako masi plesnog podija zajedno s masom 4000 kg na plesnom podiju. Ova masa će biti $V \cdot 600 \text{ kg/m}^3 + 4000 \text{ kg}$. Rješavanje jednadžbe za V daje $V = 10 \text{ m}^3$ pa površina gornje plohe podija mora biti $S = \frac{V}{0,1 \text{ m}} = 100 \text{ m}^2$.

Zadatak 28 ... Šator

Lucija je na planinarenju. Sagradila je šator oblika jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom BC . Kako bi posušila svoju odjeću, objesila je uže koje čini jednakokraničan trokut DEF , tako da točke D , E i F leže na stranicama AB , BC i CA redom. Lucija je izmjerila da je $\angle ADF = 42^\circ$ i $\angle EFC = 24^\circ$. Koliko je iznosi kut $\angle EAC$, u stupnjevima?

Rezultat: 12

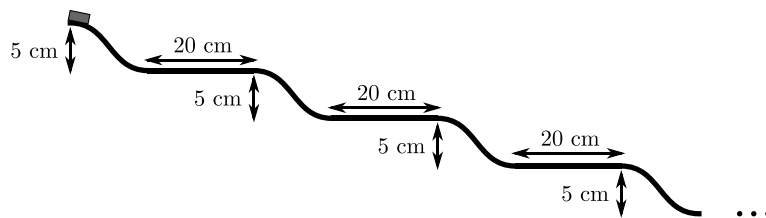
Rješenje: Promotrimo kutove s vrhom u F . Znamo da je $\angle EFC = 24^\circ$ i $\angle DFE = 60^\circ$ jer je trokut DEF jednakokraničan. Zbog toga je $\angle AFD = 180^\circ - \angle EFC - \angle DFE = 180^\circ - 24^\circ - 60^\circ = 96^\circ$. U trokutu ADF znamo dva kuta pa je treći $\angle DAF = 180^\circ - \angle ADF - \angle DFA = 180^\circ - 42^\circ - 96^\circ = 42^\circ$.

Vidimo da je vrijedi $\angle DAF = \angle ADF$ što znači da je trokut ADF jednakokraničan i $AF = DF$. Dužina DF je stranica jednakokračnog trokuta DEF pa je $DE = EF = FD$. Sada slijedi $AF = EF$ pa je trokut AEF jednakokraničan s osnovicom AE .

Već znamo da je $\angle AFE = \angle AFD + \angle DFE = 96^\circ + 60^\circ = 156^\circ$. Iz jednakokračnog trokuta AEF slijedi $\angle EAC = \angle EAF = \frac{180^\circ - 156^\circ}{2} = 12^\circ$.

Zadatak 29 ... Hot wheels

Nina se igra Hot Wheels autićem. Pretpostavite da je Hot Wheels autić kvadar mase 60 g . Nina je napravila stazu u kojoj su naizmjenično nizbrdice i horizontalni dijelovi. Na nizbrdici se auto pomakne 5 cm vertikalno bez trenja, a na horizontalnim dijelovima se pomakne 20 cm s faktorom trenja $0,4$. Staza počinje s nizbrdicom i Nina autiću da početnu brzinu 5 m/s . Na kojem po redu horizontalnom dijelu će se autić zaustaviti?



Rezultat: 42

Rješenje: Na nizbrdici se autiću povećava energija, a na horizontalnim dijelovima ju troši. Zato će se autić zaustaviti na jednom od horizontalnih dijelova, i to onda kad mu energija padne na 0.

Na početku, ukupna energija autića jednaka je zbroju njegove potencijalne i kinetičke energije. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je potencijalna energija autića na početku 0 J . Tada je energija autića jednaka njegovoj kinetičkoj energiji koja je $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, gdje je $m = 60 \text{ g}$ masa autića i $v_0 = 5 \text{ m/s}$ početna brzina autića.

Svaki put kad autić prođe nizbrdicu, njegova ukupna energija se povećava za razliku u potencijalnoj energiji. S obzirom na to da mu se visina smanji za $h_0 = 5 \text{ cm}$, energija mu se povećava za $E_{p_0} = mgh_0$. Na horizontalnim dijelovima sila trenja jednaka je $F_t = fmg$ gdje je $f = 0,4$ faktor trenja. Djeluje na duljini $s = 20 \text{ cm}$, pa je potreban rad $W = F \cdot s = fmg s$ da ju svlada. Zato se energija autića na horizontalnom dijelu smanji za W . Nakon svakog sljedećeg horizontalnog i vertikalnog dijela energija autića se smanji za $E_{p_0} - W = mgh_0 - fmg s$. Nakon n takvih parova vertikalnih i horizontalnih dijelova, energija se smanji za $n(E_{p_0} - W)$. Želimo pronaći

najmanji n takav da je $E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0$. Rješavanjem ove nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} E_0 - n(E_{p_0} - W) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmg s) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}v_0^2 &\leq n(fgs - gh_0), \\ n &\geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)}, \\ n &\geq \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m}^2/\text{s}(0,4 \cdot 20 \text{ cm} - 5 \text{ cm})} = \frac{25}{0,6} = \frac{250}{6} \doteq 41,67. \end{aligned}$$

Dakle, autić će se zaustaviti na 42. horizontalnom dijelu.

Zadatak 30 ... Stari se

Lucija je upravo napunila 37 godina i tom je prigodom napisala 2024-veroznamenasti broj $3737 \dots 37$ koji se sastoji od 1012 znamenki 3 i 1012 znamenki 7. Prisjećala se vremena kad je imala samo 21 godinu pa je pomnožila svoj 2024-veroznamenasti broj s 21. Konačno, odlučila je izračunati zbroj znamenaka ovog produkta. Koji je broj dobila?

Rezultat: 12 153

Rješenje:

Ako Bog da, primijetit ćemo da je $37 \cdot 21 = 777$. Ovo će nam omogućiti jednostavnije provesti množenje. Pokušajmo oponašati uobičajeni postupak pisanog množenja. Najčešće množimo samo jednoznamenaste brojeve, ali budući da znamo $37 \cdot 21 = 777$, možemo provesti ovo množenje u svakom koraku. Tako ćemo dobiti množenje kao na sljedećoj slici.

$$\begin{array}{r} 37 \dots 7373737 \\ \cdot 21 \\ \hline 777 \\ 777 \\ \dots \\ 777 \\ \hline 784 \dots 4848477 \end{array}$$

Vidimo da uzastopni brojevi 777 imaju po jednu znamenku 7 na zajedničkom dekadskom mjestu pa ih pozbrajamo kao i inače. Na taj će se način u zbroju pojavljivati 4 i 8. Iz ovog postupka vidljivo je da se broj znamenaka produkta povećao za jedan, dakle rezultat će biti 2025-eroznamenasti broj. Tri znamenke će biti 7, a ostalih $2025 - 3 = 2022$ alternira između 4 i 8, pa svake od njih ima upravo $2022 : 2 = 1011$. Zbroj svih znamenki je stoga $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Zadatak 31 ... Punjenje baterija

Maja piše rješenja za ovogodišnji Náboj Junior u kafiću. Za rad koristi prijenosno računalo s baterijom kapaciteta 4000 mAh i pametni telefon s baterijom kapaciteta 3500 mAh. Ali, zaboravila ih je napuniti, pa su oboje na 20% svojih kapaciteta. Maja ima samo jedan punjač koji može puniti uređaj s izlaznom strujom od 3,25 A. Maja također zna da kada koristi potpuno napunjeno prijenosno računalo, ono se isprazni za 10 sati, kao i potpuno napunjeni pametni telefon koji se također isprazni nakon 10 sati korištenja. Nakon koliko minimalno vremena, u satima, Maja može imati oba uređaja potpuno napunjena dok ih istovremeno koristi za rad?

Rezultat: 2,4

Rješenje: Kapacitet baterije u mAh opisuje odnos između izlazne struje baterije i vremena koliko dugo baterija može davati takvu struju. Na primjer, ako je baterija s kapacitetom 4000 mAh potpuno napunjena, može davati električnu struju 4000 mA sat vremena ili struju 1000 mA četiri sata ili bilo što slično.

S obzirom na to da Maja može mijenjati koji uređaj se puni, prijenosno računalo i pametni telefon možemo promatrati kao jedan uređaj s kapacitetom $4000 \text{ mAh} + 3500 \text{ mAh} = 7500 \text{ mAh}$. Na početku, oba uređaja su na 20 % vlastitog kapaciteta, pa su ukupno napunjeni na $0,2 \cdot 7500 \text{ mAh} = 1500 \text{ mAh}$. Oba uređaja se potpuno isprazne nakon 10 sati, pa se zajedno prazne za $7500 \text{ mAh} : 10 = 750 \text{ mAh}$ svakog sata.

Istovremeno ih Maja puni punjačem izlazne struje $3,25 \text{ A} = 3250 \text{ mA}$, pa se tijekom jednog sata napune za 3250 mAh. Stoga se napunjenost baterija poveća za $3250 \text{ mAh} - 750 \text{ mAh} = 2500 \text{ mAh}$ svakog sata. Maja treba napuniti baterije za $7500 \text{ mAh} - 1500 \text{ mAh} = 6000 \text{ mAh}$, pa će uređaji biti potpuno napunjeni za

$$\frac{6000 \text{ mAh}}{2500 \text{ mAh/h}} = 2,4 \text{ h.}$$

Zadatak 32 ... Gradnja pješćanih dvoraca je dosadna

Lei je dosadila gradnja pješćanih dvoraca pa se sada igra kantom u jezeru. Kanta je vrlo lagana i u obliku cilindra s površinom dna 400 cm^2 i visinom 30 cm. Lea je u potpunosti uronila kantu pod vodu, i to tako da je vrh bio 10 cm ispod razine vode. Sada želi polako podići kantu tako da njezino dno bude točno iznad površine jezera. Koliki je rad, izražen u džulima, Lea morala uložiti?

Rezultat: 18

Rješenje: Jedini razlog zašto Lea mora uložiti neki rad jest kako bi povećala potencijalnu energiju vode u kanti. Kanta je cilindar s površinom baze $S = 400 \text{ cm}^2 = 0,04 \text{ m}^2$ i visinom $h = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$ pa je masa vode u njoj jednaka $m = \rho_{\text{vode}}Sh$. Težište vode u kanti je na polovini visine kante, što je $\frac{h}{2}$. Dakle, povećanje potencijalne energije vode, a i rada koji Lea mora uložiti jest:

$$W = mg\frac{h}{2} = \frac{\rho_{\text{vode}}Sgh^2}{2} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2}{2} = 18 \text{ J.}$$

Zadatak 33 ... Nemoj spominjati Brunu

Bruno je izvanredan dizajner pa je šteta što više ne pričamo o njemu. Nedavno je nacrtao novi logo za svoju tvrtku. Radi se o vrlo specifičnom šesterokutu $ABCDEF$, u kojemu su $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 19 \text{ cm}$, $CD = 2 \text{ cm}$, $DE = 14 \text{ cm}$, $EF = 4 \text{ cm}$ i $FA = 9 \text{ cm}$. Osim toga, duljine dijagonala AC , CE i EA u centimetrima su cjelobrojne i one tvore trokut. Koji je najveći mogući opseg trokuta ACE izražen u centimetrima?

Rezultat: 53

Rješenje: U rješenju ćemo više puta koristiti nejednakost trokuta. U trokutu ABC , ona nam govori da je duljina stranice AC veća od $19 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$ i manja od $19 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 31 \text{ cm}$. Duljina treba biti cjelobrojna pa je duljina stranice AC bilo koji cijeli broj između 8 cm i 30 cm. Na isti način (primijenimo li to na trokute CDE i EFA) dobijemo da je duljina dužine CE cijeli broj između 13 cm i 15 cm, a duljina dužine EA cijeli broj između 6 cm i 12 cm.

Kako bismo dobili najveći mogući opseg trokuta ACE , moramo odabrati najveće moguće duljine njegovih stranica, pri čemu mora vrijediti nejednakost trokuta. Zato, čak i da odaberemo najveće moguće duljine stranica CE i EA , duljinu stranice AC možemo odabrati jedino tako da bude kraća od $15 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 27 \text{ cm}$. Zato se najveći mogući opseg trokuta postiže za $AC = 26 \text{ cm}$, $CE = 15 \text{ cm}$ i $EA = 12 \text{ cm}$. U tom je slučaju opseg jednak $26 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 53 \text{ cm}$.

Zadatak 34 ... Radost propuštanja

Matej se igra s faktorijelima. Faktoriyel nekog broja je broj koji dobijemo kad pomnožimo sve prirodne brojeve do tog broja. Na primjer, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Matej promatra umnožak $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$, koji nije potpuni kvadrat. Shvatio je da, izostavi li neki faktor $k!$, dobit će potpun kvadrat. Osim toga, uočio je da postoji jedinstven k koji zadovoljava to svojstvo. Pronađi vrijednost broja k .

Rezultat: 1012

Rješenje: Umnožak dvaju potpunih kvadrata opet je potpun kvadrat – pomnožimo li a^2 i b^2 , dobijemo $(ab)^2$. To ćemo svojstvo koristiti kako bismo pojednostavnili problem.

Promotrimo umnožak $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Uparimo li uzastopne faktore na sljedeći način: $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ i zapišemo svaki faktoriyel parnog broja kao $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$, možemo svesti umnožak na oblik

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \dots \cdot (2023!)^2).$$

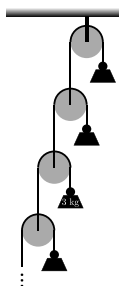
U drugoj se zagradi s desne strane jednakosti nalazi umnožak potpunih kvadrata pa je i on sam potpun kvadrat. Da bi cijeli umnožak s desne strane jednakosti bio potpun kvadrat, to mora biti i prva zagrada. U njoj je umnožak parnih brojeva pa ga možemo pojednostavniti tako da izlučimo 2 iz svakog faktora. Na taj način dobijemo

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) = 2^{1012}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Broj 2^{1012} je potpun kvadrat (jer je eksponent paran) pa je jedina zapreka da cijeli umnožak bude potpun kvadrat faktor $1012!$. Iz postavki zadatka, smijemo izostaviti jedan faktor pa nam ovo govori da bismo trebali izostaviti faktor $1012!$. Zadatak nam također govori da je takav broj jedinstven pa možemo reći da tražimo broj $k = 1012$.

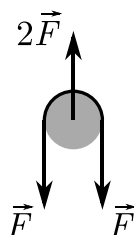
Zadatak 35 ... Koloturi, koloturi posvuda

Bob Graditelj konstruirao je beskonačni sustav kolotura kao na slici. Mase utega nisu nužno jednake. Sustav je konstruiran na način da ostaje u mirovanju. Masa trećeg utega je 3 kg. Kolika je ukupna masa svih utega u kilogramima?



Rezultat: 24

Rješenje: Na svakom koloturu imamo sljedeću situaciju:



Sile u užetu jednake su istom F jer je napetost užeta ista duž cijelog užeta (naravno, razlikuje se za različite užadi). Da bi kolotur ostao u mirovanju, mora postojati i sila veličine $2F$ usmjerena prema gore.

Iako se čini da se moramo baviti problemom beskonačnosti kolotura, vidjet ćemo da nas to uopće neće ometati. Naime, budući da su koloturi i užad bez mase, možemo pronaći zbroj svih utega promatrajući silu kojom beskonačni sustav kolotura djeluje na strop. To nam daje zbroj gravitacijskih sila koje djeluju na sve utege, što nam zauzvrat daje njihovu ukupnu masu.

Iskoristit ćemo ono što smo primijetili na početku da bismo odredili silu koja djeluje na strop.

Započnimo tako da promotrimo treći kolotur. Znamo da je tamo uteg mase 3 kg, na koji djeluje gravitacijska sila od $3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 30 \text{ N}$. Stoga je napetost u odgovarajućem užetu također 30 N pa moramo imati silu od $2 \cdot 30 \text{ N} = 60 \text{ N}$ koja djeluje na treći kolotur, usmjerenu prema gore.

Sada možemo pogledati drugi kolotur. Sila od 60 N iz prethodnog odlomka uzrokuje napetost jednake jačine u užetu oko drugog kolotura, što znači da moramo imati silu od $2 \cdot 60 \text{ N} = 120 \text{ N}$ koja djeluje na drugi kolotur usmjerena prema gore. Koristeći isti argument za prvi kolotur, moramo imati silu od $2 \cdot 120 \text{ N} = 240 \text{ N}$ koja djeluje na prvi kolotur i usmjerena je prema gore. Međutim, ta sila je također po iznosu jednaka sili kojom cijeli sustav kolotura djeluje na strop i koju smo tražili.

Dakle, cijeli sustav kolotura djeluje na strop silom od 240 N, pa ukupna masa svih utega mora biti $240 \text{ N} : 10 \text{ N/kg} = 24 \text{ kg}$.

Zadatak 36 ... Kako se znamenke okreću

Mihovil se voli igrati s brojevima. Uzme troznamenkast broj i preokrene mu poredak znamenki te oduzme novi broj od početnog. Na primjer, ako je počeo s brojem 123, izračunao je broj $123 - 321 = -198$. Jednom je svoju igru pokazao Ani, izveo ju je na njenom omiljenom broju. Zatim je uzeo broj za 31 manji od Aninog omiljenog broja, a koji je još uvijek troznamenkast. Na svoje iznenađenje, dobio je jednaki rezultat kao s Aninim omiljenim brojem. Koliko bi troznamenkastih brojeva moglo biti Anin omiljeni broj?

Napomena: Troznamenkasti broj ne može imati 0 kao znamenku stotice, međutim, broj dobiven okretanjem poretka znamenaka može. U tom slučaju zanemarujemo znamenku 0 na početku.

Rezultat: 216

Rješenje: Najprije promotrimo razlike koji Mihovil dobiva. Troznamenkasti broj možemo zapisati u obliku $100A + 10B + C$, pri čemu su A , B i C njegove znamenke. Nakon okretanja poretka, Mihovil dobiva broj $100C + 10B + A$, dakle razlika je

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C).$$

Vidimo da razlika koju Mihovil dobiva ovisi samo o razlici znamenke stotica i znamenke jedinica početnog broja. U zadatku Mihovil radi s nekim brojem i zatim s brojem za 31 manjim. Dobio je isti rezultat, dakle ta su dva broja morala imati jednaku razliku znamenaka stotice i jedinice. Sada samo moramo odrediti sve brojeve s tim svojstvom.

Imamo dva slučaja ovisno o znamenki jedinice Aninog omiljenog broja. Ako je znamenka jedinice 0, oduzimanje 31 bi ju promijenilo u 9 pa se znamenka stotice mora uvećati za 9, a sasvim je jasno da to nije moguće. Znači da Anin omiljeni broj nema znamenku 0 kao znamenku jedinice. Jasno je da će se oduzimanjem 31 znamenka jedinice umanjiti za 1, stoga se i znamenka stotice mora smanjiti za 1 kako bi razlika ostala ista. Ovo je moguće samo ako je dvoznamenkasti broj dobiven od zadnje dvije znamenke Aninog omiljenog broja jedan od sljedećih: 00, 01, ..., 30.

S ovog popisa treba obrisati one s 0 kao znamenkom jedinice, što nam ostavlja 27 mogućnosti. Na kraju moramo još odrediti mogućnosti za znamenku stotice. Ne može biti 1 jer bismo oduzimanjem dobili dvoznamenkasti broj, ali ostale znamenke, 2, 3, ..., 9, funkcioniraju.

Kombiniranjem mogućnosti za znamenku stotice sa mogućnostima za druge dvije znamenke dobivamo ukupno $8 \cdot 27 = 216$ mogućnosti za Anin omiljeni broj.

Zadatak 37 ... Nikad vam neće biti ovoliko dosadno

Josipu je toliko dosadno da je napisao sve prirodne brojeve od 1 do svojeg najdražeg broja, 9 876 543 210, uključujući i njih. Također je odlučio izračunati zbroj znamenaka svih tih brojeva te je dobio 443 255 601 330. Sada želi učiniti slično, ali je umjesto svake znamenke 5 napisao 6, a umjesto svake znamenke 6 napisao 5 te ponovno izračunao zbroj znamenaka svih napisanih na ploči. Koji će rezultat Josip dobiti ovaj put?

Rezultat: 443 256 101 330

Rješenje: Svaka promjena znamenke 5 u znamenku 6 povećava Josipov zbroj za 1 i, slično tome, svaka promjena iz 6 u 5 smanjuje zbroj za 1. To znači da svaka promjena iz 5 u 6 poništava promjenu s 6 na 5, stoga nas zanima samo razlika u broju pojavljivanja znamenki 5 i 6 u prirodnim brojevima između 1 i 9 876 543 210. Prvo primijetimo da se možemo fokusirati samo na znamenke 5 i 6 u onim pozicijama u kojima se te znamenke pojavljuju u broju 9 876 543 210. Naime, ako se znamenka 5 nalazi na višoj ili nižoj poziciji (na primjer u brojevima kao što su 500 ili 50000), možemo zamijeniti tu znamenku 5 sa znamenkom 6 (i slično svaku znamenku 6 sa znamenkom 5) i dobiti broj koji je Josip već uračunao. To znači da, iako mijenjamo te znamenke, one se zapravo poništavaju jer će u oba slučaja ukupna suma biti ista.

Primjerice, ako imamo broj 56, zamijenit ćemo 5 sa 6 i 6 sa 5, i dobit ćemo broj 65, dok kad primijenimo zamjene na broj 65 dobit ćemo 56 - odnosno, naše zamjene će samo zamijeniti redoslijed pribrojnika, ali neće dodati nikakve nove ili izgubiti neke stare. Dakle, ovakve zamjene ne stvaraju nikakvu razliku u zbroju znamenki. Zbog toga nas ne zanimaju te pozicije, nego samo pozicije gdje zamjena stvarno može promijeniti zbroj.

Sada se fokusiramo samo na znamenke 5 i 6 na mjestima milijuna i stotina tisuća. Razlika se pojavljuje samo kad ove dvije znamenke prethodi niz 987 (inače možemo primijeniti logiku iz prethodnog odlomka). U tom slučaju, znamenka 5 pojavljuje se 1 000 000 puta kao znamenka milijuna i $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$ puta kao znamenka stotina tisuća. Slično, znamenka 6 pojavljuje se 543 211 puta kao znamenka milijuna i $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$ puta kao znamenka stotina tisuća. Dakle, broj pojavljivanja znamenke 5 je za $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 500\,000$ veći od broja pojavljivanja znamenke 6.

Stoga zamjena znamenke 5 u znamenku 6 povećava zbroj znamenki za 500 000, pa će Josip dobiti rezultat

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330.$$

Zadatak 38 ... Iskakanje iz vode

Ferb je homogena čvrsta prizma čija je baza pravilni šesterokut sa stranicama duljine 0,9 m, visine 0,6 m i gustoće 125 kg/m^3 . Trenutno je držan pod vodom u velikom jezeru i to tako da su mu obje baze paralelne površini vode, a gornja baza je točno u razini vode. Nakon ispuštanja, Ferb će iskočiti iz jezera. Koliku će visinu, u metrima, postići gornja Ferbova baza u odnosu na razinu vode?

Napomena: Pretpostavite da će Ferbove baze ostati horizontalne.

Rezultat: 2,4

Rješenje:

Neka je V Ferbov volumen, $h = 0,6 \text{ m}$ visina i $\rho_{\text{Ferb}} = 125 \text{ kg/m}^3$ gustoća. Nakon skoka, volumen koji je Ferb zauzimao popunit će voda. Budući da je masa te vode $V\rho_{\text{voda}}$, a njeno težište je na dubini $\frac{h}{2}$ (jezero je dovoljno veliko pa se razina vode neće promijeniti), jezero gubi energiju $E = V\rho_{\text{water}}g\frac{h}{2}$. Moramo odrediti visinu H koju će Ferb postići. U najvišoj točki kinetička će energija biti 0. Dakle, energija koju je primio od vode pretvorit će se u gravitacijsku potencijalnu energiju $E = V\rho_{\text{Ferb}}gH$. Izjednačavanjem dva izraza za E dobivamo:

$$V\rho_{\text{voda}}g\frac{h}{2} = V\rho_{\text{Ferb}}gH,$$

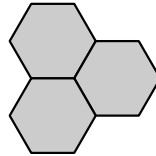
$$H = \frac{\rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{Ferb}}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{125 \text{ kg/m}^3} \cdot \frac{0,6 \text{ m}}{2} = 2,4 \text{ m}.$$

Vidimo da će Ferbova gornja baza postići visinu od 2,4 m..

Zadatak 39 ... Izrezani mnogokuti

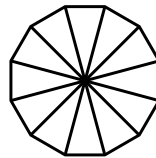
Viktor je uzeo papir i izrezao tri pravilna mnogokuta sve s različitim brojem stranica, ali sve iste duljine stranice. Iznenadujuće, uspio ih je staviti na stol tako da svi dijele vrh i da svaki par mnogokuta dijeli stranicu. Na taj način Viktor je dobio (nepravilni) n -terokut. Koja je najveća moguća vrijednost od n ?

Napomena: Kad bismo dopustili da mnogokuti imaju isti broj stranica, jedan od načina za dobiti n -terokut bio bi onaj prikazan na sljedećoj slici. Ovdje bi Viktor dobio $n = 12$.



Rezultat: 46

Rješenje: Svaki pravilan m -terokut se može rastaviti na m sukladnih jednakokračnih trokuta kao na slici.



Kutovi nasuprot osnovicama u sumi daju 360° . Svi ostali kutovi pridodaju sumi kutova m -terokuta. S obzirom da je zbroj kutova u trokutu uvijek 180° , to znači da je zbroj kutova m -terokuta jednak $m \cdot 180^\circ - 360^\circ = (m - 2) \cdot 180^\circ$. Svaki kut u pravilnom m -terokutu ima istu mjeru, stoga je mjera jednog od njih $\frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ$. Želimo li složiti mnogokute kako se od nas traži u zadatku, zbroj kutova u zajedničkom vrhu mora biti 360° . Stoga, ako s x , y i z označimo broj vrhova svakog od mnogokuta, uz informaciju iz prijašnjeg odlomka, mora vrijediti:

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180^\circ + \frac{y-2}{y} \cdot 180^\circ + \frac{z-2}{z} \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Možemo podijeliti cijelu jednadžbu s 180° i pojednostavniti kako bismo dobili

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x} + \frac{y-2}{y} + \frac{z-2}{z} &= 2, \\ \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \left(1 - \frac{2}{y}\right) + \left(1 - \frac{2}{z}\right) &= 2, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pronađimo sve uređene trojke (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $x > y > z$. Za $z \geq 6$ imamo $y \geq 7$ i $x \geq 8$. No, tada je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, ne postoje rješenja za $z \geq 6$. Preostaju nam slučajevi $z = 3, 4, 5$. Razmatramo svaki slučaj zasebno.

Slučaj $z = 3$. Jednadžba postaje $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Množenjem nazivnicima dobivamo $6y + 6x = xy$, što se, nakon dodavanja 36 s obje strane jednakosti, može zapisati kao $(x-6)(y-6) = 36$. Obje zagrade moraju biti pozitivne. S obzirom da se broj 36 može zapisati kao umnožak dva različita broja na četiri načina $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, dobivamo četiri rješenja za parove (x, y) : $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$.

Slučaj $z = 4$. Slično prošlom slučaju, imamo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ što, nakon množenja i dodavanja 16 s obje strane, postaje $(x - 4)(y - 4) = 16$. Rješenja su parovi (x, y) : $(20, 5)$ i $(12, 6)$.

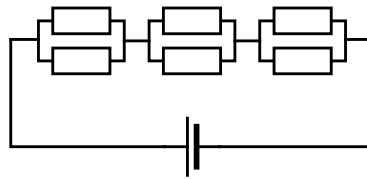
Slučaj $z = 5$. Konačno, u ovom slučaju imamo jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}$, koja postane $10y + 10x = 3xy$. Pomnožimo li s 3 i dodamo 100, dobivamo jednadžbu $(3x - 10)(3y - 10) = 100$. Ovo nam daje parove rješenja (x, y) : $(\frac{110}{3}, \frac{11}{3})$, $(20, 4)$, $(\frac{35}{3}, \frac{14}{3})$, $(10, 5)$. Međutim, odbacujemo rješenja s razlomcima. Rješenje $(20, 5, 4)$ smo dobili u prijašnjem slučaju. Jedino je preostalo rješenje $(x, y) = (10, 5)$, no ono ne zadovoljava uvjet $y > z$. Dakle, u ovom slučaju nemamo novih rješenja.

Jedine trojke (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ i nejednadžbe $x > y > z$ su $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$, i $(12, 6, 4)$.

Vidimo da će, nakon spajanja mnogokuta, svaki mnogokut na rubu imati sve stranice osim dvije. Stoga mora vrijediti $n = (x - 2) + (y - 2) + (z - 2) = (x + y + z) - 6$, pa tražimo za koju od trojki (x, y, z) je ovaj izraz najveći. Vrijednosti koje dobijemo su, redom, 46, 30, 26, 22, 23, i 16. Dakle, 46 je najveća moguća vrijednost od n .

Zadatak 40 ... Vrlo otporan problem

Matej je sastavio strujni krug kao na slici. Koristio je izvor napona od 3 V i otpornike otpora 2Ω , 3Ω , 4Ω , 5Ω , 6Ω i 7Ω . Međutim, zaboravio je točne položaje otpornika u strujnom krugu. Zna samo da je ukupna struja kroz strujni krug $\frac{273}{580}$ A. Kolika je, u Amperima, električna struja kroz otpornik otpora 5Ω ?



Rezultat: $\frac{39}{290}$

Rješenje: Otpor R_0 dva paralelno spojena otpornika R_1 i R_2 dan je kao:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Tri takva paralelna para spojena su u seriju pa je ukupni otpor svih otpornika zbroj tri razlomka kao gore. Ukupni otpor R može se izračunati iz napona $U = 3$ V izvora i električne struje $I = \frac{273}{580}$ A kroz cijeli strujni krug:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3 \text{ V}}{\frac{273}{580} \text{ A}} = \frac{580}{91} \Omega.$$

Dakle, mora biti:

$$\frac{580}{91} \Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

gdje su R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , i R_6 jednaki $2 \Omega, 3 \Omega, 4 \Omega, 5 \Omega, 6 \Omega$ i 7Ω u nekom poretku. Promotrimo ovu jednadžbu bez mjernih jedinica. Da bismo dobili 91 u nazivniku, najmanji zajednički višekratnik nazivnika $R_1 + R_2, R_3 + R_4$ i $R_5 + R_6$ mora biti višekratnik od 91. Rastav broja 91 na proste faktore je $91 = 7 \cdot 13$, dakle barem jedan od nazivnika mora biti djeljiv sa 13. Budući da ga moramo dobiti kao zbroj elemenata iz skupa $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, jedina je mogućnost $6 + 7$. To znači da jedan od parova paralelnih otpornika mora biti 6Ω i 7Ω . Sličnim razmišljanjem zaključujemo da mora postojati i par čiji je zbroj višekratnik od 7. Jedina je mogućnost da ti parovi onda budu 2Ω i 5Ω te 3Ω i 4Ω .

Ostaje još izračunati struju kroz otpornik od $5\ \Omega$. On je u paru s otpornikom od $2\ \Omega$, pa je otpor ovog para

$$R_{25} = \frac{2\ \Omega \cdot 5\ \Omega}{2\ \Omega + 5\ \Omega} = \frac{10}{7}\ \Omega.$$

Struja kroz cijeli ovaj par je i dalje I , dakle napon na oba ova otpornika je:

$$U_{25} = R_{25}I = \frac{10}{7}\ \Omega \cdot \frac{273}{580}\ \text{A} = \frac{39}{58}\ \text{V}.$$

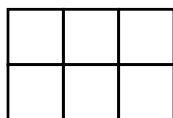
Konačno, struja I' kroz otpornik otpora $R' = 5\ \Omega$ je:

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\ \text{V}}{5\ \Omega} = \frac{39}{290}\ \text{A}.$$

Zadatak 41 ... Pravokutnici posvuda

Maja je nacrtala $m \times n$ tablicu i podijelila ju na mn jediničnih kvadrata. Izbrojala je da pravokutnika definiranih linijama u tablici ima ukupno 141 400. Koliko je jediničnih kvadrata u tablici?

Napomena: Svaki kvadrat smatramo pravokutnikom. Na primjer, u 2×3 tablici na slici imamo 18 pravokutnika.



Rezultat: 700

Rješenje: Moramo izračunati broj pravokutnika izražen preko m (broja redaka) i n (broja stupaca). Promotrimo vertikalne linije od vrha do dna tablice (ima ih $n + 1$) i horizontalne linije od lijevog do desnog ruba tablice (ima ih $m + 1$). Primijetiti ćemo da svake dvije horizontalne i dvije vertikalne linije određuju jedan pravokutnik. Vrijedi i obratno, odaberemo li neki pravokutnik, on određuje točno dvije horizontalne i dvije vertikalne linije – one dobivene produljivanjem njegovih stranica. Dakle, postoji jedan na jedan korespondencija između pravokutnika i četvorki horizontalnih i vertikalnih linija, stoga je dovoljno izračunati broj takvih četvorki.

Za prvu vertikalnu liniju imamo $n + 1$ izbora, a za drugu biramo jednu od preostalih n . Međutim, nije bitan redosljed u kojem smo ih birali, dakle vertikalne linije zapravo biramo na $\frac{(n+1)n}{2}$ načina. Slično vrijedi i za horizontalne linije, biramo ih na $\frac{(m+1)m}{2}$ načina. Stoga je ukupan broj četvorki linija $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$. Tražimo brojeve m i n takve da vrijedi

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400,$$

$$(m+1)m(n+1)n = 565\,600.$$

Primijetimo da je broj 565 600 djeljiv brojem 101 ($565\,600 = 5600 \cdot 101$) koji je prost pa mora dijeliti barem jednog od faktora s lijeve strane. Jedna je opcija, motivirana činjenicom da je 565 600 djeljiv i sa 100, staviti da jedan od brojeva m i n bude 100. Stavimo primjerice da je $m = 100$. Ostatak jednadžbe tada postaje $(n+1)n = 56$, što vrijedi za $n = 7$. Lako se provjeri da za druge višekratnike od 101 (za višekratnike veće od 808 umnožak je veći od 565 600 jer je zasigurno veći od $800 \cdot 800 = 640\,000$) kao faktore rješenje ne postoji. To znači da je Maja zasigurno nacrtala tablicu 100×7 (ili 7×100) koja se sastoji od 700 jediničnih kvadrata.

Zadatak 42 ... Šiljasti satelit

Tri satelita kruže oko Zemlje. Njihove su putanje kružnice sa središtem u središtu Zemlje s gotovo istim polumjerima. Osim toga, sve tri putanje leže u istoj ravnini. Sateliti imaju mlaznice koje im omogućavaju da zadrže iste kutne brzine. Prvi satelit okruži Zemlju svakih 90 minuta, drugi svakih 30 minuta, a treći svakih 15 minuta. Sva tri satelita kruže u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Nakon polijetanja, svi su sateliti bili na gotovo istoj poziciji. Kolika je vjerojatnost da u proizvoljno odabranom trenutku sateliti tvore šiljastokutni trokut?

Rezultat: $\frac{7}{30} \doteq 23,3\%$

Rješenje: Prvi satelit okruži Zemlju svakih 90 minuta pa se svake minute rotira za $\frac{360^\circ}{90} = 4^\circ$. Slično, drugi se satelit svake minute rotira za $\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$, a treći se satelit svake minute rotira za $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$.

Umjesto da promatramo tri satelita, možemo situaciju promatrati s pozicije jednog satelita. Prednost ovoga je u tome da ćemo jedan satelit promatrati kao stacionarni objekt, to jest kao da se ne kreće. Na primjer, recimo neka je prvi satelit stacionaran. Iz gledišta tog satelita, drugi se satelit svake minute rotira za $12^\circ - 4^\circ = 8^\circ$, a treći za $24^\circ - 4^\circ = 20^\circ$.

Sad možemo promatrati šiljastokutnost. Sateliti se nalaze na istoj kružnici. Ako dva od njih formiraju promjer te kružnice, prema Talesovom će teoremu sateliti formirati pravokutan trokut. Ovo je granični slučaj između šiljastokutnosti i tupokutnosti promatranog trokuta:

- ako je promjer kružnice takav da sva tri satelita leže s iste strane tog promjera, onda oni formiraju tupokutan trokut
- ako nema promjera kakav je opisan u prethodnoj natuknici, tada sateliti formiraju šiljastokutan trokut.

Šiljastokutnost/tupokutnost se može promijeniti samo ako dva satelita formiraju promjer kružnice ili ako se dva satelita nađu u istoj točki. Za prvi i drugi satelit, to će se dogoditi svake $\frac{180^\circ}{8^\circ} = 22,5$ minute, za prvi i treći satelit svakih $\frac{180^\circ}{20^\circ} = 9$ minuta te za drugi i treći satelit svakih $\frac{180^\circ}{20^\circ - 8^\circ} = 15$ minuta. Promatrat ćemo situaciju s prekidima u višekratnicima tih minuta.

- Od minute 0 do minute 9 (prvi i treći satelit formiraju promjer) – formiraju tupokutni trokut.
- Od minute 9 do minute 15 (drugi i treći satelit formiraju promjer) – formiraju šiljastokutni trokut.
- Od minute 15 do minute 18 (prvi i treći satelit su u istoj točki) – formiraju tupokutni trokut.
- Od minute 18 do minute 22,5 (prvi i drugi satelit formiraju promjer) – formiraju tupokutni trokut.
- Od minute 22,5 do minute 27 (prvi i treći satelit formiraju promjer) – formiraju šiljastokutni trokut.
- Od minute 27 do minute 30 (drugi i treći satelit su u istoj točki) – formiraju tupokutni trokut.
- Od minute 30 do minute 36 (prvi i treći satelit su u istoj točki) – formiraju tupokutni trokut.
- Od minute 36 do minute 45 (prvi i drugi satelit su u istoj točki i formiraju promjer s trećim satelitom) – formiraju tupokutni trokut.

Zbog pozicije u minuti 45, vidimo da će se od minute 45 do minute 90 ponavljati isti koraci kakvi su opisani, samo u obrnutom poretku. Razlog tome je taj da, kad bismo promatrali kretanje osnosimetrično s obzirom na promjer koji sateliti formiraju u minuti 45, vidjeli bismo kretanja satelita od minute 45 do minute 0 "unazad". Stoga se ništa novo neće dogoditi i možemo izračunati vjerojatnost promatrajući kretanje od minute 0 do minute 45. Tijekom tih 45 minuta, sateliti formiraju šiljastokutan trokut između minuta 9 i 15 te minuta 22,5 i 27, što je ukupno $(15 - 9) + (27 - 22,5) = 10,5$ minuta. Zato je vjerojatnost da sateliti formiraju šiljastokutan trokut

$$\frac{10,5}{45} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \doteq 23,3\%.$$

Zahvale

Predsjudnik povjerenstva za izbor zadataka

Marián Poturnay

Prijedlozi zadataka

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Tekstovi i rješenja zadataka

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Recenzenti

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dluhošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Prevoditelji

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskiy, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisař, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinatori

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Lokacije natjecanja:

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biala:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovéj Tímrahy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkeru • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu