Oplossingen

12e Naboj Junior

22 november 2024

Hallo,

voor u ligt het boekje met de opgaven en oplossingen van Náboj Junior 2024. Náboj Junior is een internationale wiskunde- en natuurkundewedstrijd, voornamelijk ontworpen voor teams van 4 leerlingen uit klas 2 en 3. De wedstrijd duurt 120 minuten, waarin de teams zoveel mogelijk opgaven proberen op te lossen. De vragen beogen niet alleen de wiskunde- en natuurkundekennis te toetsen, maar ook het innovatief probleemoplossend vermogen te stimuleren.

De 12e editie van Náboj Junior vond plaats op 22 november 2024. Dit jaar deden er 84 teams mee in Nederland. Náboj Junior vond plaats in 60 steden in Slowakije, Tsjechië, Polen en Oostenrijk. Tegelijkertijd werd de wedstrijd online gehouden in België, Spanje en Kroatië.

De wedstrijd in Nederland wordt georganiseerd door een team van vrijwilligers. Zij geven hun tijd en energie zodat de deelnemers mee kunnen doen aan de wedstrijd en hun kennis te laten testen. Het doel van Náboj Junior is om de vaardigheden van leerlingen op het gebied van wiskunde en natuurkunde te ontwikkelen en te laten zien dat de natuurwetenschappen veel interessante uitdagingen en mogelijkheden bieden aan een breed scala aan leerlingen.

De Náboj Juniorwedstrijd is ontstaan als een gezamenlijk project van de Trojsten Association (Slowakije) en de MFF UK Výfuk wedstrijd (Tsjechië). De leden van de organisaties zijn universiteitsstudenten van de faculteit Wiskunde, Natuurkunde en Informatica van de Comeniusuniversiteit in Bratislava en de faculteit Wiskunde en Natuurkunde van de Karelsuniversiteit in Praag, die ernaar streven de talenten van studenten te ontwikkelen en de belangstelling voor natuurwetenschappen te vergroten.

Hopelijk ook tot volgend jaar,

Tomas Miskov, Hoofdorganisator van Nederland

Opgave 1 ... Geheim dagboek

Het eerste deel van het supergeheime dagboek van Patrick is af. Hij wil het nu in een doos doen en hem opbergen achter slot en grendel, opdat niemand het kan lezen. Daarvoor heeft hij een hangslotje van een paar jaar geleden, maar waarvan hij de 3-cijferige code is vergeten. Hij kan om de 3 seconden een code proberen. Hoeveel minuten duurt het Patrick om alle mogelijke codes uit te proberen?

Antwoord: 50

Oplossing: We bepalen eerst het aantal 3-cijferige codes. Omdat we hiervoor elke combinatie van 000 tot aan 999 tellen, zijn het er 1000. Elke poging duurt 3 seconden, dus de totale tijd is $3 \cdot 1000 = 3000$ seconden, ofwel $\frac{3000}{60} = 50$ minuten.

Opgave 2 ... Vloerreparatie

Anne repareert de vloer in haar appartement. Ze heeft hiervoor planken van eikenhout gekocht met een dichtheid van $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Ze heeft de afmetingen van één zo'n plank met verschillende meetinstrumenten bepaald; de lengte is 0,8 m, de breedte is 12,5 cm en de dikte is 15 mm. Wat is het gewicht van één plank in gram?

Antwoord: 900

Oplossing: We zetten eerst alles om in basiseenheden. We weten dat $12{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}125\,\mathrm{m}$ en $15\,\mathrm{mm} = 0{,}015\,\mathrm{m}$. Nu kunnen we het volume van één plank vinden door alle drie de afmetingen met elkaar te vermenigvuldigen. Dit geeft een volume van $0{,}8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}125\,\mathrm{m} \cdot 0{,}015\,\mathrm{m} = 0{,}0015\,\mathrm{m^3}$. Om het gewicht van de plank te bepalen, vermenigvuldigen we het volume met de dichtheid van het hout, en dat geeft een massa van $0{,}0015\,\mathrm{m^3} \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$. Omdat het antwoord in gram moest zijn, rekenen we het nog om naar $0{,}9\,\mathrm{kg} = 900\,\mathrm{g}$.

Opgave 3 ... Goocheltruc nr. 1

Paul wil een goocheltruc uitvoeren met een stapeltje van 6 kaarten, genummerd 1, 2, 3, 4, 5 en 6. De truc begint met het neerleggen van alle zes de kaarten in één rij op tafel. Het is hierbij noodzakelijk dat voor elk paar aangrenzende kaarten geldt dat de twee getallen op de kaarten een verschil hebben dat (strikt) groter is dan 2. Op hoeveel verschillende manieren kan Paul de kaarten op deze manier ordenen?

Antwoord: 2

Oplossing: We merken op dat de kaarten 3 en 4 enkel mogen grenzen aan 6 respectievelijk 1. De kaarten 3 en 4 mogen dus maar hoogstens één buur hebben, dus ze moeten wel aan het begin dan wel einde van de rij geplaatst worden. De mogelijke volgordes zien er dan als volgt uit:

3					4
4					3

Vervolgens weten we welke getallen er naast 3 en 4 kunnen staan, dus passen we de volgordes aan als volgt:

3	6			1	4
4	1			6	3

We houden alleen de kaarten 2 en 5 over. In beide volgordes is er slechts één manier om deze in te vullen, en zo komen we tot de reeksen 3, 6, 2, 5, 1, 4 en 4, 1, 5, 2, 6, 3 als de enige twee mogelijke volgordes die aan de voorwaarde voldoen.

3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3

Opgave 4 ... Berkencardio

Noa en Alba rennen langs een rechte laan waar 10 berken zijn geplant. De afstanden tussen opeenvolgende berken zijn telkens gelijk. Noa begint bij de eerste berk en doet het volgende: ze rent naar de tweede berk en weer terug, dan naar de derde berk en terug naar de eerste berk, dan naar de vierde berk en weer terug naar de eerste berk, enzovoort, totdat ze ten slotte naar de tiende berk rent en weer terug naar de eerste berk.
Alba doet iets soortgelijks, maar zij begint bij de tiende berk. Ze rent dan naar de negende berk en terug, naar de achtste berk en weer terug naar de tiende berk... totdat ze uiteindelijk naar de eerste berk rent en weer terug naar de tiende berk.
Beide meisjes rennen met dezelfde snelheid en starten op hetzelfde moment. Hoe vaak zullen ze elkaar tijdens deze loop tegenkomen?

Antwoord: 10

Oplossing: Aangezien ze met dezelfde snelheid rennen, zal het Noa evenveel tijd kosten om bij de tweede berk te komen als Alba om bij de negende berk te komen. Dit geldt ook voor de volgende berken – ze zullen op hetzelfde moment bij de derde en achtste berk aankomen, bij de vierde en zevende berk, bij de vijfde en zesde berk... enzovoort. Echter, zodra Noa naar een berk met een hoger getal rent dan Alba, zullen ze elkaar voor de eerste keer ontmoeten. Dit gebeurt wanneer Noa onderweg is naar de zesde berk en Alba naar de vijfde berk. Ze zullen elkaar dan ook weer ontmoeten op de terugweg. Vanaf dit punt zal Noa steeds naar een berk met een hoger getal rennen dan Alba, waardoor ze elkaar op deze manier elke keer zullen ontmoeten, zowel op de heen- als terugweg naar elke volgende berk. In totaal zijn er vijf van deze berken (voor Noa de zesde tot en met de tiende berk, voor Alba de vijfde tot en met de eerste), dus ze zullen elkaar $5 \cdot 2 = 10$ keer tegenkomen.

Opgave 5 ... Passie-autocoureur

Arnaud is autocoureur. Omdat zijn raceauto het nummer 181 draagt, probeert hij alle momenten mee te maken waarop de auto een totaal aantal kilometers heeft afgelegd dat een veelvoud van 181 is. Vandaag begon Arnaud te rijden toen de kilometerteller van de auto 32 768 kilometer aangaf: 7 kilometer meer dan het vorige veelvoud van 181 (namelijk 32 761). Arnaud wil zijn volgende rit zo inplannen, dat het volgende moment waarop de auto een veelvoud van 181 kilometers heeft afgelegd, precies over 2 uur plaatsvindt. Wat moet hiervoor de gemiddelde snelheid van Arnaud in kilometer per uur zijn?

Antwoord: 87

Oplossing: Het verschil tussen twee opeenvolgende veelvouden van 181 is 181. Er is gegeven dat het vorige veelvoud van 181 kilometer 7 kilometer geleden was. Dus het volgende veelvoud van 181 is over $181 - 7 = 174$ kilometer. Arnaud wil daar precies in 2 uur zijn. Zijn gemiddelde snelheid moet daarom $v = \frac{174\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 87$ kilometer per uur zijn.

Opgave 6 ... Metaleugenaar

Mads maakt zijn lievelingsgetal bekend op zijn eigen manier. Hij doet zes uitspraken over dit getal en geeft elk van deze uitspraken een nummer. Drie ervan zijn waar en drie onwaar. De uitspraken zijn als volgt:

1. Het is een samengesteld getal.
2. Het is een oneven getal.
4. Het is (strikt) kleiner dan 30.
8. Het is een eencijferig getal.
16. Het laatste cijfer is 9.
32. Het is deelbaar door 5.

Mads verklaart hierbij (naar waarheid) dat zijn lievelingsgetal ook gelijk is aan de som van de getallen van de drie ware uitspraken. Wat is het lievelingsgetal van Mads?

Antwoord: 35

Oplossing: We beginnen met de eerste uitspraak. Stel dat deze onwaar is. Dit zou betekenen dat Mads' getal gelijk is aan ofwel 1, ofwel een priemgetal. De som van drie positieve gehele getallen kan nooit 1 zijn, dus het moet wel een priemgetal zijn. Echter, Mads' lievelingsgetal is nu een som van drie getallen uit 2, 4, 8, 16, en 32. Deze getallen zijn allemaal even, en dus zal het lievelingsgetal ook even zijn. Het enige even priemgetal is 2, terwijl de som groter dan 2 is. Dit geeft ons een tegenspraak, wat betekent dat de eerste uitspraak wel waar moet zijn.
De eerste uitspraak is de enige uitspraak met een oneven getal. Hierdoor is de som van de ware uitspraken ook oneven, dus de tweede uitspraak moet dan waar zijn. Bekijk nu de uitspraak met getal 4. Als deze de derde ware uitspraak zou zijn, dan zou Mads' lievelingsgetal al $1 + 2 + 4 = 7$ zijn. In dat geval zou de uitspraak met nummer 8 ook waar zijn, waardoor we vier ware uitspraken zouden hebben. Dat kan niet, dus de uitspraak met nummer 4 moet onwaar zijn. Hierdoor moet Mads' lievelingsgetal minstens 30 zijn. De enige manier om dit waar te laten zijn, is als de uitspraak met nummer 32 waar is. Dit maakt het lievelingsgetal van Mads $1 + 2 + 32 = 35$.
Het is eenvoudig na te gaan dat voor het getal 35, de ware uitspraken precies degene met de nummers 1, 2, en 32 zijn. Dus 35 is inderdaad het favoriete nummer van Mads.

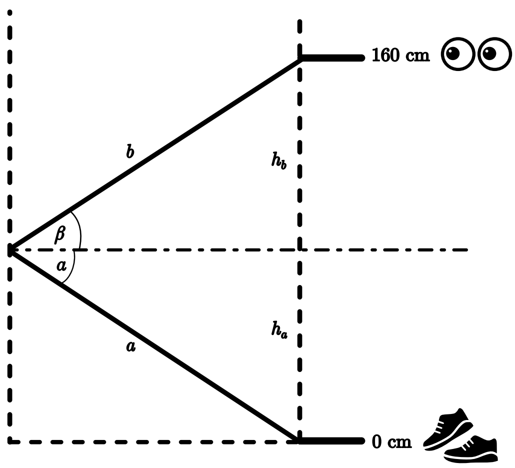
Opgave 7 ... Stijlvolle vraag

Michael is een man met stijl. Wanneer hij zijn outfits probeert, is het voor hem erg belangrijk om zijn schoenen in de spiegel te kunnen zien. Hij heeft een nieuwe rechthoekige spiegel gekocht en wil deze nu zo ophangen dat hij zijn voeten kan zien terwijl hij 120 cm van de spiegel af staat. Zijn ogen bevinden zich op een hoogte van 160 cm boven de grond. Laten we aannemen dat zijn schoenen zich op een hoogte van 0 cm bevinden. Wat is de maximale hoogte vanaf de grond waarop de onderkant van de spiegel kan worden geplaatst?

Opmerking: Ga ervan uit dat de spiegel geen lijst heeft.

Antwoord: 80

Oplossing: Om zijn voeten in de spiegel te zien, moet er een lichtstraal zijn die van zijn schoenen naar de spiegel reist en zo weerkaatst wordt dat de straal naar zijn ogen op 160 cm hoogte gaat. Merk op dat zowel zijn ogen als zijn voeten zich op dezelfde horizontale afstand van de spiegel bevinden. Merk ook op dat de hoek van inval gelijk zal zijn aan de hoek van weerkaatsing zodra de straal de spiegel raakt. Dit leidt tot het volgende diagram:



Omdat de hoeken α en β gelijk zijn, zullen ook de afstanden a en b gelijk zijn. Bovendien, en dat is het belangrijkste, zullen de hoogtes die de straal aflegt, h_a en h_b, ook gelijk zijn. Daarom zal het punt waar de straal de spiegel raakt precies in het midden liggen tussen Michael's voeten en zijn ogen. Aangezien zijn ogen zich op een hoogte van 160 cm bevinden, vindt de reflectie plaats op een hoogte van $\frac{160\,\text{cm}}{2} = 80\,\text{cm}$.

Dus de maximale hoogte van de onderkant van de spiegel kan ook op 80 cm boven de grond liggen. Als de spiegel hoger geplaatst zou worden, zou de straal niet op deze hoogte kunnen reflecteren, en zou Michael zijn schoenen niet in de spiegel kunnen zien.

Opgave 8 . . . Goocheltruc nr. 2

Paul voert opnieuw een goocheltruc uit met zes kaarten, genummerd 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Deze keer heeft hij ook een 2×3 tabel voorbereid waarin deze kaarten precies passen. Voor zijn truc moeten de kaarten in de tabel zo worden gerangschikt dat de nummers in elke rij (van links naar rechts) en elke kolom (van boven naar beneden) in oplopende volgorde staan. Een voorbeeld van zo'n opstelling is in de afbeelding te zien. Op hoeveel verschillende manieren kan Paul de kaarten rangschikken om aan de voorwaarde te voldoen?

1	2	5
3	4	6

Antwoord: 5

Oplossing: Laten we eerst kijken naar het getal in de linkerbovenhoek. Elk getal in de tabel moet van hieruit bereikbaar zijn door naar beneden of naar rechts te gaan. Dit betekent dat alle getallen in de tabel groter moeten zijn dan dit getal, dus het getal in de linkerbovenhoek moet 1 zijn. Op dezelfde manier moet het getal 6 in de rechterbenedenhoek staan.

1		
		6

Laten we nu kijken waar het getal 2 kan worden geplaatst. Dit moet in een vakje naast het vakje met 1 staan (anders zou er een vakje zijn met een getal tussen 1 en 2, wat onmogelijk is). We hebben dus twee mogelijkheden voor de positie van het getal 2:

Geval 1. Het getal 2 staat rechts van het getal 1. In dit geval zijn er drie mogelijkheden voor het getal rechts van het getal 2 (dit kan 3, 4 of 5 zijn). Voor elke keuze hiervoor kunnen de overblijvende vakjes op slechts één manier worden ingevuld.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

Geval 2. Het getal 2 staat onder het getal 1. In dit geval zijn er opnieuw drie mogelijkheden voor het vakje rechts van het vakje met 2. De resterende vakjes kunnen op één manier worden ingevuld, maar niet elke mogelijkheid levert een geldige oplossing op (als het getal 3 rechts van 2 staat, krijgen we geen geldige oplossing, omdat in de tweede kolom het bovenste getal groter is dan het onderste).

1	4	5
2	3	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

We tellen nu de mogelijkheden uit beide gevallen op, wat ons $3 + 2 = 5$ geldige manieren oplevert om de kaarten in de tabel te plaatsen.

Opgave 9 . . . Schone Satellieten

NASA heeft twee satellieten gelanceerd, Arend en Bella. Om praktische redenen zijn ze allebei precies boven Greenwich gelanceerd. Ze werden exact op hetzelfde moment in dezelfde richting gelanceerd, maar op verschillende hoogtes. Hierdoor bewegen ze wel allebei in een cirkelbaan rond de aarde, maar met een verschillende hoeksnelheid. Arend beweegt met een hoeksnelheid van 90° per uur, terwijl Bella een hoeksnelheid heeft van 120° per uur. Na hoeveel uur na de lancering zullen Arend en Bella voor de eerste keer weer precies boven hetzelfde punt op aarde zijn (mogelijk een ander punt dan Greenwich)?

Antwoord: 12

Oplossing: Elk uur legt Bella $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ meer af dan Arend. Dit verschil blijft elke uur gelijk, tot het moment dat Bella precies 360° meer heeft afgelegd dan Arend. Op dat moment heeft Bella één volledige omwenteling meer afgelegd dan Arend, en staan ze weer recht boven elkaar. Omdat Bella elk uur 30° inhaalt, duurt het $\frac{360}{30} = 12$ uur voordat ze 360° heeft ingehaald.

Opgave 10 . . . De Westerse Weg

Iedereen in het Wilde Westen houdt van de Westerse Weg, omdat deze kaarsrecht is zonder bochten. Toen een jongen genaamd Bram over deze weg liep, viel hem een interessant fenomeen op: toen hij achterom keek, zag hij dat de zon recht boven de weg achter hem stond. Toen hij weer vooruit keek, zag hij dat de weg abrupt eindigde en dat er twee objecten direct voor hem stonden, naast elkaar. Er was een smalle boom van 3 m hoog en een aankondigingsbord dat recht naar hem toe stond, met een hoogte van 2,4 m en een breedte van 5 m. De onderkant van het bord rustte op de grond. Bram mat dat de lengte van de schaduw van de boom 75 cm was. Wat is de oppervlakte van de schaduw die door het aankondigingsbord wordt geworpen, in vierkante meters?

Antwoord: 3

Oplossing: Omdat het aankondigingsbord recht naar de zon gericht staat, blijft de breedte van zijn schaduw gelijk aan de oorspronkelijke breedte van 5 m. De hoogte van de schaduw verandert echter. We weten dat de hoogte van de boom van 3 m een schaduw van 0,75 m werpt. De verhouding tussen de hoogte van de boom en de lengte van zijn schaduw is dus $\frac{3}{0{,}75} = \frac{4}{1}$. Deze verhouding geldt ook voor het aankondigingsbord, waardoor de lengte van zijn schaduw $\frac{2{,}4\,\mathrm{m}}{4} = 0{,}6\,\mathrm{m}$ is. De totale oppervlakte van de schaduw is de lengte vermenigvuldigd met de breedte, dus $0{,}6\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}^2$.

Opgave 11 . . . De opwarming van de aarde

Op een dag zegt Johan: "Het is zo heet in de oven dat het twee keer zo heet zou zijn als ik in de VS was."Hij bedoelde dat de huidige temperatuur in de oven, gemeten in Fahrenheit, twee keer de temperatuur gemeten in Celsius is. Wat is de temperatuur in de oven in graden Celsius?

Opmerking: Als de temperatuur in graden Celsius $N\,^\circ\mathrm{C}$ is, dan is de temperatuur in graden Fahrenheit

$$\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right) + 32\right)\,^\circ\mathrm{F}.$$

Antwoord: 160

Oplossing: Laten we de temperatuur in graden Celsius $N\,^\circ\mathrm{C}$ noemen. We weten dat de equivalente temperatuur in Fahrenheit kan worden gevonden als $\left(\left(\frac{9}{5}\cdot N\right) + 32\right)\,^\circ\mathrm{F}$. Echter weten we dat deze temperatuur twee keer de temperatuur in graden Celsius moet zijn, dus $2N\,°\mathrm{F}$. Daarom kunnen we een vergelijking opstellen: $((\frac{9}{5} \cdot N) + 32) = 2N$. We herschikken de vergelijking als volgt:

$$2N - \frac{9}{5} \cdot N = 32.$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{5} \cdot N = 32,$$
$$N = 160.$$

Dus de temperatuur in de oven was $160\,°\mathrm{C}$.

Opgave 12 ... Langzame start

Voor zijn zestiende verjaardag kreeg Mart een boek als cadeau. Het is een tijdje geleden dat Mart voor het laatst een boek las, dus hij weet dat het even zal duren om er volledig in te komen. Daarom heeft hij een speciaal plan bedacht om het hele boek te lezen: elke dag zal hij één pagina meer lezen dan de vorige dag, beginnend met 1 pagina op de eerste dag. Als het boek 2024 pagina's heeft, hoe lang zal het duren voordat Mart het hele boek heeft gelezen?

Antwoord: 64

Oplossing: Na één dag zal Mart 1 pagina hebben gelezen, na twee dagen $1+2$ pagina's, na drie dagen $1+2+3$ pagina's, enzovoort. Dus, na n dagen zal hij $1 + 2 + \ldots + n$ pagina's hebben gelezen. Met een formule uit de cheatsheet kunnen we deze som schrijven als $\frac{n(n+1)}{2}$. De vraag is wat het kleinste getal n is waarvoor geldt dat $\frac{n(n+1)}{2}$ minstens 2024 is. We moeten dus een ongelijkheid oplossen:

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 2024,$$
$$n(n+1) \geq 4048.$$

We kunnen schatten dat voor $n = 60$ het product $n(n+1)$ ongeveer 3600 is, dus het n dat we zoeken zal iets groter zijn. En inderdaad vinden we dat $63 \cdot 64 = 4032 \leq 4048$ en $64 \cdot 65 = 4160 \geq 4048$. Daarom zal het Mart 64 dagen kosten om het hele boek te lezen.

Opgave 13 ... Overal palindromen

Anne houdt zoveel van palindromen dat ze zoekt naar palindromen die kunnen worden gemaakt als een som van andere palindromen. Vandaag wil ze de grootste palindroom vinden die een som is van drie (niet noodzakelijk verschillende) 2-cijferige palindromen. Welk getal zal Anne vinden?

Opmerking: Een palindroom is een getal dat hetzelfde is wanneer het van links naar rechts of van rechts naar links wordt gelezen. Bijvoorbeeld, het getal 12321 *is een* 5*-cijferig palindroom.*

Antwoord: 242

Oplossing: Laten we beginnen met het bekijken van 2-cijferige palindromen. Omdat ze hetzelfde moeten zijn of ze nu van links of van rechts worden gelezen, moeten deze getallen bestaan uit twee dezelfde cijfers. Dus 2-cijferige palindromen zijn de getallen 11, 22, 33... tot en met 99. We kunnen een eigenschap opmerken die al deze getallen delen: ze zijn allemaal deelbaar door 11. Daarom moet, wanneer we 3 van deze getallen optellen, hun som ook deelbaar zijn door 11.

De grootste mogelijke som van drie 2-cijferige palindromen is $99 + 99 + 99 = 297$. Daarom moeten we dalen vanaf 297 tot de eerste palindroom die deelbaar is door 11. De eerste palindromen die we moeten controleren zijn 292, 282, 272... eenvoudigweg getallen in de vorm $2X2$, waarbij X een geheel getal is. We kunnen een regel voor deelbaarheid door 11 gebruiken die stelt dat de som van de cijfers op even posities min de som van de cijfers op oneven posities gelijk moet zijn aan 0 of een veelvoud van 11. Vanaf 292 naar beneden gaand, is de eerste zulke palindroom 242, waar $4-(2+2)=0$. Het enige wat overblijft is te controleren of we echt 3 2-cijferige palindromen kunnen vinden die optellen tot 242 – en inderdaad, we vinden dat dit $77+77+88=242$ zijn.

Opgave 14 ... Het croissant-dilemma

Louise houdt van croissants bij het ontbijt. Als echte fijnproever wil ze echter uit alle mogelijke smaken degene kiezen met de hoogste kwaliteit. Ze besloot dat de kwaliteit van een croissant het beste wordt gemeten door de gemiddelde dichtheid, dus voert ze een experiment uit waarin ze de gemiddelde dichtheid van elk type croissant wil bepalen. Ze experimenteert met een chocoladecroissant. Ze ontdekt dat het volume van de hele croissant 100 ml is, waarvan 15 ml de chocoladevulling is. De dichtheid van deze vulling is $1200\,\mathrm{kg/m^3}$, terwijl de dichtheid van het croissantdeeg $800\,\mathrm{kg/m^3}$ is. Wat is de gemiddelde dichtheid van deze chocoladecroissant in $\mathrm{kg/m^3}$?

Antwoord: 860

Oplossing: De gemiddelde dichtheid van een object kan eenvoudig worden gevonden als de totale massa gedeeld door het totale volume. We weten dat het totale volume $100\,\mathrm{ml} = 100\,\mathrm{cm^3}$ is, dus we hoeven alleen de totale massa te vinden. Deze kan worden gevonden als de som van de massa van de vulling en de massa van het deeg. Voor de massa's van deze delen gebruiken we eenvoudig de formule $m=\rho\cdot V$, waarbij ρ de dichtheid is en V het volume. We moeten echter voorzichtig zijn met de eenheden. Laten we de waarden $15\,\mathrm{ml} = 15\,\mathrm{cm^3}$ gebruiken voor het volume van de vulling (V_f) en $100\,\mathrm{ml} - 15\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{ml} = 85\,\mathrm{cm^3}$ voor het volume van het deeg (V_d). We zetten de twee gegeven dichtheden om naar overeenkomstige eenheden. $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3}$ voor de dichtheid van de vulling (ρ_f) en $800\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$ voor de dichtheid van het deeg (ρ_d). Nu is de totale massa van de croissant

$$\begin{aligned} m_{totaal} &= m_{vulling} + m_{deeg},\\ &= \rho_f\cdot V_f + \rho_d \cdot V_d,\\ &= 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3}\cdot 15\,\mathrm{cm^3} + 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3}\cdot 85\,\mathrm{cm^3},\\ &= 18\,\mathrm{g} + 68\,\mathrm{g},\\ &= 86\,\mathrm{g}. \end{aligned}$$

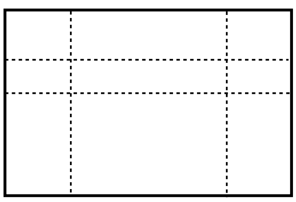
Nu kunnen we eenvoudig de gemiddelde dichtheid vinden als totale massa gedeeld door totaal volume:

$$\rho_{gemiddeld} = \frac{m_{totaal}}{V_{totaal}} = \frac{86\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{cm^3}} = 0{,}86\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Aangezien we ons antwoord in $\mathrm{kg/m^3}$ moeten geven, is ons antwoord $860\,\mathrm{kg/m^3}$.

Opgave 15 ... De erfenis van de tuinman

Abel is een tuinman. Hij heeft een rechthoekige tuin waarvan hij weet dat de omtrek 16 m is. Hij wil dat zijn zonen voor deze tuin zorgen, dus verdeelt hij deze in 9 rechthoekige delen zoals in de figuur (de stippellijnen geven de grenzen tussen de afzonderlijke delen aan). Wat is de som van de omtrekken van alle 9 van deze delen in meters?

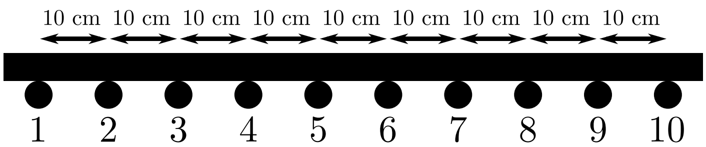


Antwoord: 48

Oplossing: We weten dat de omtrek van de grote rechthoek 16 m is, dus de som van de lengtes van alle volle lijnen is 16 m. Als we naar de stippellijnen kijken, zien we dat we deze kunnen herschikken om dezelfde rechthoek te creëren als de oorspronkelijke met volle lijnen. Dus de som van hun lengtes is gelijk aan de som van de lengtes van alle volle lijnen, dus ook 16 m. Nu is de vraag hoe vaak we welke lijnen gebruiken bij het optellen van de omtrekken van al deze 9 delen. Elke volle lijn wordt precies één keer gebruikt, aangezien elk segment van elke volle lijn tot precies 1 van de 9 omtrekken behoort. De stippellijnen liggen echter altijd tussen twee delen in, dus elk segment van elke stippellijn behoort tot precies 2 van de 9 omtrekken. We weten dus dat elke stippellijn twee keer wordt gebruikt en elke volle lijn één keer. In totaal gebruiken we de volledige omtrek van de oorspronkelijke rechthoek $2 + 1 = 3$ keer, dus het antwoord is $3 \cdot 16\,\text{m} = 48\,\text{m}$.

Opgave 16 . . . Kunnen we het niet laten vallen?!

Bob de Bouwer heeft een plank gemaakt. Deze bestaat uit een 1 meter lange homogene plank die wordt ondersteund door 10 pinnen, waarbij elke twee opeenvolgende pinnen op 10 centimeter afstand van elkaar staan. Bovendien heeft Bob de pinnen van links naar rechts genummerd met de getallen 1 tot 10, zoals in de afbeelding.



Enkele dagen later realiseert Bob zich dat 10 pinnen eigenlijk te veel waren. Hij besluit daarom een aantal pinnen te verwijderen zonder de plank te verplaatsen. Nu vraagt hij zich af: Wat is het minimale product van de getallen van de overgebleven pinnen zodat de plank niet valt?

Antwoord: 6

Oplossing: Om ervoor te zorgen dat de plank niet valt, moet het zwaartepunt tussen twee pinnen liggen. Met andere woorden, er moet minstens één pin links van het zwaartepunt zijn en één pin rechts ervan. Het zwaartepunt van de plank ligt tussen de pinnen met nummer 5 en 6, dus we hebben minstens één pin nodig met een nummer van hoogstens 5 en één pin met een nummer van minimaal 6.
Om het kleinste product te verkrijgen, nemen we de kleinste pin uit elk deel. Daarom kiezen we pin 1 uit het deel met hoogstens 5 en pin 6 uit het deel met minimaal 6.
Als we alleen deze twee pinnen gebruiken, zal het zwaartepunt ertussen liggen, zodat de plank stabiel blijft. Aangezien de oplossing aantoont dat het product niet kleiner kan zijn, kunnen we concluderen dat het minimale product van de overgebleven pinnen 6 is.

Opgave 17 . . . Voor statistici

Jacob studeert statistiek. Hij heeft een aantal nieuwe termen geleerd. Zo heeft hij geleerd dat in een gegeven dataset de modus het getal is dat het vaakst voorkomt in de dataset. De mediaan is het middelste getal wanneer de set in oplopende volgorde wordt gerangschikt. Bijvoorbeeld, voor de dataset 2, 7, 20, 6, 2 is de modus 2 en de mediaan 6.
Bij wijze van voorbeeld had Jacob een dataset van 11 getallen genomen. Echter, drie ervan is hij vergeten; hij herinnert zich nog wel de 8 getallen 8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5. Uit zijn berekeningen kan hij zich nog wel herinneren dat de mediaan gelijk was aan 4, en dat de modus uniek bepaald was en gelijk aan 4. (Dat wil zeggen, er is geen andere modus dan 4.) Wat is de grootst mogelijke waarde van het gemiddelde van de getallen in deze dataset? Geef het antwoord als een breuk in niet-vereenvoudigbare vorm.

Antwoord: 5

Oplossing: We weten dat de modus uniek is, namelijk 4. Daarom moet het aantal keren dat het getal 4 voorkomt in onze dataset strikt groter zijn dan het aantal keren dat enig ander getal voorkomt. Van de

bekende getallen komen 3 en 5 elk twee keer voor. Dus moet 4 minstens 3 keer voorkomen; momenteel komt het echter maar één keer voor. Daarom moeten van de 3 onbekende getallen die Jacob vergat er ten minste twee gelijk zijn aan 4.
We kennen nu de waarden van 10 van de 11 getallen in de dataset. Laten we nu naar de tweede voorwaarde kijken: de mediaan moet ook 4 zijn. Wanneer we de 10 bekende getallen in oplopende volgorde rangschikken, krijgen we: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Wanneer we het elfde getal toevoegen, moet het middelste getal 4 zijn. Het midden van deze set ligt momenteel tussen de getallen 4 en 5, dus als het elfde getal 5 of groter was, zou het middelste getal 5 zijn, wat niet aan de voorwaarde voldoet. Om aan de voorwaarde te voldoen, moet het elfde getal dus 4 of lager zijn. Aangezien we willen dat het rekenkundig gemiddelde zo groot mogelijk is, kiezen we nog een 4. Nu kennen we alle elf getallen in de dataset: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Het rekenkundig gemiddelde is hun som gedeeld door hun aantal, wat ons $\frac{55}{11} = 5$ oplevert.

Opgave 18 ... Naar elkaar toe rijden

Simon en Barbara willen elkaar ontmoeten. Simon wil Barbara verrassen, dus hij stapt in zijn auto en begint met een snelheid van $30\,\mathrm{km/h}$ naar Barbara's huis te rijden. Terwijl hij rijdt, wordt hij echter onderbroken door een telefoontje. Het is Barbara, die wil weten hoe het met hem gaat! Simon heeft geen andere keuze dan toe te geven dat hij momenteel naar haar huis rijdt. Barbara is erg enthousiast en wil hem zo snel mogelijk ontmoeten, dus ze stapt in haar auto en begint met een snelheid van $90\,\mathrm{km/h}$ naar Simon toe te rijden op het exacte moment dat Simon de helft van de afstand naar Barbara's huis heeft afgelegd. Ze ontmoeten elkaar precies 1 uur nadat Simon begon te rijden. Wat is de afstand tussen Barbara's huis en Simon's huis in kilometers?

Antwoord: 48

Oplossing: Laten we de totale afstand tussen de huizen noteren als s, de afstand die Simon heeft afgelegd als s_{si} en de afstand die Barbara heeft afgelegd als s_{ba}. We kunnen opmerken dat $s = s_{si} + s_{ba}$, dus om s te vinden, hoeven we alleen de afstanden te bepalen die Simon en Barbara hebben afgelegd. Ten eerste kunnen we eenvoudig s_{si} bepalen met de formule $v = \frac{s}{t}$, herschreven als $s = v \cdot t$, waarbij v de snelheid is en t de tijd. Dus $s_{si} = v_{si} \cdot t_{si} = 30\,\mathrm{km/h} \cdot 1\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{km}$.
We moeten echter nog steeds s_{ba} vinden om s te bepalen. Om dat te doen, drukken we de tijd uit die Simon nodig had om de helft van s af te leggen in termen van s. Uit $t = \frac{s}{v}$ kunnen we afleiden dat de tijd om $\frac{s}{2}$ af te leggen voor Simon, rijdend met $30\,\mathrm{km/h}$, zal zijn $t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s}{2 \cdot 30\,\mathrm{km/h}} = \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$.
Hiermee kunnen we ook de tijd uitdrukken waarin Barbara aan het rijden was (t_{ba}): dit is 1 uur min deze tijd. Dus $t_{ba} = 1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}$. Nu kunnen we de afstand die Barbara heeft afgelegd, s_{ba}, uitdrukken als $s_{ba} = v_{ba} \cdot t_{ba} = 90\,\mathrm{km/h} \cdot (1\,\mathrm{h} - \frac{s}{60\,\mathrm{km/h}}) = 90\,\mathrm{km} - \frac{90\,\mathrm{km/h} \cdot s}{60\,\mathrm{km/h}} = 90\,\mathrm{km} - \frac{3}{2} \cdot s$.
Nu we de waarde van s_{si} weten en s_{ba} hebben uitgedrukt in termen van s, kunnen we eenvoudig de totale s berekenen als

$$\begin{aligned} s &= s_{si} + s_{ba}, \\ s &= 30\,\mathrm{km} + 90\,\mathrm{km} - \frac{3}{2} \cdot s, \\ \frac{5}{2}s &= 120\,\mathrm{km}, \\ s &= 48\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

Dus de afstand tussen Barbara's huis en Simon's huis is $48\,\mathrm{km}$.

Opgave 19 ... Twee maal twee maal

Tomi verveelt zich, dus begint hij getallen op een schoolbord te schrijven. Eerst schrijft hij één keer het getal 2, daarna zet hij eronder een rij van twee keer los het getal 2, dan daaronder een rij van drie keer los het getal 2, en zo verder, totdat hij uiteindelijk een rij van 2024 keer los het getal 2 heeft geschreven. Vervolgens besluit hij om alle 2'en die hij op het bord ziet met elkaar te vermenigvuldigen. Wat is het laatste cijfer van het product dat hij krijgt?

Antwoord: 6

Oplossing: We moeten het laatste cijfer berekenen van het product

$$(2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{2024-keer}}).$$

Omdat we alleen geïnteresseerd zijn in het laatste cijfer van het totale product, kunnen we dit probleem benaderen door alleen te kijken naar het product van de laatste cijfers van de producten tussen haakjes. We kunnen beginnen door enkele initiële producten binnen de haakjes uit te schrijven:

$$\begin{aligned} 2&,\\ 2 \cdot 2 &= 4,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 8,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 16,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 32,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 64,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 128,\\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 256, \ldots \end{aligned}$$

In deze reeks getallen kunnen we opmerken dat het laatste cijfer zich herhaalt in het patroon: 2, 4, 8, 6. Omdat er een patroon is in het laatste cijfer van de getallen tussen haakjes, zal het laatste cijfer van het totale product voortkomen uit een herhaalde vermenigvuldiging van de cijfers in dit patroon: $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \ldots$. Als we alleen de laatste cijfers van de tussenstappen van deze vermenigvuldiging opschrijven, krijgen we de volgende reeks cijfers: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, 8, 4, 4, 8, 2, ... Hier kunnen we weer opmerken dat er een herhalend patroon is: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, ditmaal met een lengte van 8. Het laatste cijfer van het totale product zal dus een van de cijfers in dit patroon zijn. Omdat er in totaal 2023 vermenigvuldigingen zijn tussen de 2024 haakjes in onze uitdrukking, kunnen we 2023 delen door 8, de lengte van het patroon, en de rest zal ons vertellen op welke plaats in het herhalende patroon we eindigen na het vermenigvuldigen van alle getallen.
Aangezien $2023 : 8 = 252$, rest 7, is het laatste cijfer van het totale product 6, omdat dit het 7de cijfer is in het 8-cijferige patroon dat we eerder hebben geïdentificeerd.

Opgave 20 ... Radiospelen

Een radiokanaal organiseert elke dag een loterij. Iedereen kan een SMS sturen naar een specifiek telefoonnummer en komt daarmee in de loterij van die dag terecht. Gisteren gaf elke SMS je 1 lot voor de loterij, waarin één winnaar wordt getrokken. Vandaag heeft de radio een speciale oproep gedaan, en elke SMS geeft je 30 loten. John stuurde gisteren 1 SMS en vandaag ook 1 SMS. Aangenomen dat de organisatoren op beide dagen hetzelfde aantal SMS-berichten hebben ontvangen, hoeveel keer groter is de kans dat John vandaag wint in vergelijking met de kans van gisteren?

Antwoord: 1

Oplossing: In de loterij van vandaag ontvangt John 30 keer meer loten. Maar aangezien iedereen 30 keer meer loten heeft ontvangen, is ook het totale aantal loten 30 keer zo groot. Dus hoewel John 30 keer meer loten in de loterij heeft, vormen ze dezelfde fractie van alle loten als gisteren. De kans dat John wint, moet daarom hetzelfde zijn als gisteren. Het is dus 1 keer zo groot.

Opgave 21 ... Koppig tegen weerstand

Onlangs las Mathijs dat, als hij een draad maakt van lengte ℓ en doorsnede S van een materiaal met soortelijke weerstand ρ, de weerstand van de draad $R = \frac{\rho\ell}{S}$ is. Hij besloot het zelf uit te proberen. Hij maakte een koperdraad met weerstand R. Vervolgens smolt hij de draad en gebruikte al het gesmolten koper om een nieuwe draad te vormen waarvan de straal een derde was van de straal van de oorspronkelijke draad. De weerstand van deze draad is nu kR. Bepaal de waarde van k.

Antwoord: 81

Oplossing: De straal van de nieuwe draad is een derde van de oorspronkelijke straal en aangezien de oppervlakte van een cirkel evenredig is met het kwadraat van de straal, moet de doorsnede van de nieuwe draad $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$ zijn. Het volume van de draad blijft hetzelfde, dus de verandering van de doorsnede naar een negende veroorzaakt dat de lengte van de draad moet zijn toegenomen tot $\ell' = 9\ell$. De soortelijke weerstand is een eigenschap van het materiaal, dus deze blijft gelijk. Nu kunnen we de weerstand van de nieuwe draad berekenen als

$$R' = \frac{\rho\ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81\frac{\rho\ell}{S} = 81R.$$

Dus de weerstand van de nieuwe draad is 81 keer zo groot als die van de oorspronkelijke draad, en de waarde van k is dus 81.

Opgave 22 ... Voetbalshirts uit New Jersey

Thomas wast de voetbalshirts van het New Jersey-team. Zijn team gebruikt 75 shirts met 75 opeenvolgende nummers erop. Gisteren hing hij ze in oplopende volgorde op een lijn. Hij merkte op dat de som van de nummers van de laatste 5 shirts precies 6 keer groter was dan de som van de nummers van de eerste 5 shirts. Welk nummer stond op het shirt dat precies in het midden hing?

Antwoord: 49

Oplossing: Laten we het nummer van het shirt in het midden aanduiden met x. Er zijn $\frac{75-1}{2} = 37$ shirts vóór dit shirt en 37 shirts na dit shirt. De eerste vijf shirts hebben dus de nummers $x-37$, $x-36$, $x-35$, $x-34$ en $x-33$, terwijl de laatste vijf shirts de nummers hebben $x+33$, $x+34$, $x+35$, $x+36$ en $x+37$. De voorwaarde in het probleem vertaalt zich naar de vergelijking

$$\begin{aligned}
(x+33)+(x+34)+(x+35)+(x+36)+(x+37) &= 6((x-37)+(x-36)+(x-35)+(x-34)+(x-33)),\\
5x+175 &= 6(5x-175),\\
5x+175 &= 30x-1050,\\
25x &= 1225,\\
x &= 49.
\end{aligned}$$

Dus het nummer op het shirt in het midden was $x = 49$.

Opgave 23 ... Gezond poeder

Martijn maakt een gezonde snack en heeft daar gedroogde bananen voor nodig. Hij kocht een tros bananen die van nature 75 % water bevatten en besloot ze te drogen. Hij deed de helft in een voedseldroger, waardoor het watergehalte werd verminderd tot 25 %, en de andere helft in een vriesdroger, wat het watergehalte verlaagde tot slechts 10 %. Tot slot verpulverde hij beide partijen en mengde het poeder. Welk deel van dit poeder bestaat uit water? Geef het antwoord als een breuk in de eenvoudigste vorm.

Antwoord: $\frac{2}{11}$

Oplossing: Laat m de totale massa van de bananen zijn. We weten dat ze $\frac{3}{4}m$ aan water bevatten en $\frac{1}{4}m$ aan droge stof. Dus elke helft van de bananen bevat $\frac{1}{8}m$ aan droge stof. Voor de bananen die in de voedseldroger zijn gedroogd, vormt het droge deel 75 % van de bananen, dus deze bananen wegen nu $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$ en het water erin heeft een gewicht van $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$. Op dezelfde manier wegen de bananen uit de vriesdroger $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$ en het water weegt $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$.

In totaal zal de massa van het poeder $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$ zijn, waarvan $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ uit water bestaat. Dus het aandeel van het water in het poeder is

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Opgave 24 ... Springen in een lift

Karel weegt 75 kg en kan onder normale omstandigheden tot een hoogte van 1 m springen. Op een dag neemt hij een weegschaal mee in een enorme lift. Hij ontdekt dat de weegschaal aangaf dat hij slechts 60 kg weegt aan het begin van de daling van de lift. Wat is de grootste hoogte boven het niveau van de lift in meters die Karel kan springen aan het begin van de beweging van zo'n bewegende lift?

Antwoord: 1,25

Oplossing: Bij het springen wint Karel energie. Om tot een hoogte van $h_0 = 1\,\mathrm{m}$ te springen, moet Karel met een massa van $m = 75\,\mathrm{kg}$ energie $E = mgh_0$ opbouwen. Wat verandert er in de bewegende lift? De weegschaal toont een lager gewicht omdat de zwaartekrachtversnelling anders is. Laat de nieuwe zwaartekrachtversnelling g' zijn. Hierdoor werkt Karel op de weegschaal met een kracht $F_g = mg'$. Maar de weegschaal toont een gewicht van $m' = 60\,\mathrm{kg}$, omdat de weegschaal "denkt"dat alles gebeurt onder de normale zwaartekrachtversnelling. Het feit dat het gewicht m' aangeeft, betekent dat er een kracht $m'g$ op werkt. Maar dit is F_g, wat betekent:

$$mg' = m'g,$$
$$g' = \frac{m'}{m}g.$$

Laten we nu teruggaan naar het springen. Omdat de zwaartekrachtversnelling is veranderd, zal Karel met energie E springen tot een hoogte h. Dit wordt omgezet in potentiële energie $E = mg'h$. Dit betekent dat Karel tot een hoogte van

$$mgh_0 = mg'h,$$
$$h = \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1{,}25\,\mathrm{m}$$

kan springen.

Opgave 25 ... Vernietiging van 3

Voor Peter is het getal 3 alleen geassocieerd met tegenslagen (vindt hij bijvoorbeeld altijd drie graten in een graatloze visschotel), dus besluit hij het getal 3 uit zijn leven te wissen. Hij gebruikt geen enkel getal dat het cijfer 3 bevat of deelbaar is door 3. Hoeveel getallen van 1 tot en met 100 kan Peter gebruiken?

Antwoord: 55

Oplossing: Laten we de getallen tellen die Peter niet kan gebruiken. De veelvouden van 3 tussen 1 en 100 zijn 3, 6, ..., 99, dus er zijn er $99 : 3 = 33$. Daarnaast zijn er 19 getallen die het cijfer 3 bevatten (10 hiervan hebben 3 als eenheden, 10 als tientallen, maar het getal 33 zit in beide groepen). Peter gebruikt geen enkel van de getallen uit deze twee groepen. Maar er zijn enkele getallen die in beide groepen vallen, namelijk de getallen 3, 30, 33, 36, 39, 63, 93, die slechts één keer moeten worden meegeteld. Daarom gebruikt Peter $33 + 19 - 7 = 45$ getallen niet. Hij gebruikt alle andere getallen, dus hij gebruikt $100 - 45 = 55$ getallen.

Opgave 26 ... Pas op voor voetgangers

Tamar rijdt met een snelheid van 15 m/s. Ze merkt plots een voetganger op die oversteekt op het zebrapad. Tamar's reactietijd is 1 s, waarna de auto begint te remmen met een constante kracht. Zo was de remweg van de auto 33 m. Wat is de remweg in meters als Tamar begint met remmen vanaf een snelheid van 35 m/s?

Antwoord: 133

Oplossing: Laat v de snelheid van Tamar zijn. Gedurende de eerste $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ nadat ze de voetganger heeft opgemerkt, rijdt Tamar door met snelheid v, dus legt ze een afstand af van $s_1 = vt_0$. Vervolgens begint ze te remmen met een constante kracht F. Deze kracht werkt over de afstand s_2, dus verricht deze arbeid $W = Fs_2$. Deze arbeid werd verricht om de kinetische energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ van de auto te verminderen, waarbij m de massa van de auto is. We krijgen dus dat $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, wat betekent dat de afstand waarop de auto stopt nadat ze begint te remmen is

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

Uit de opgave weten we dat toen Tamar met een snelheid van $v_1 = 15\,\mathrm{m/s}$ reed, haar remweg $s_1 + s_2$ gelijk was aan $s = 33\,\mathrm{m}$. Hiermee kunnen we de onbekende grootheid $\frac{m}{F}$ uitdrukken als

$$s = v_1t_0 + \frac{mv_1^2}{2F},$$
$$\frac{m}{F} = \frac{2(s - v_1t_0)}{v_1^2}$$

en deze invoegen in de remweg $s' = s_1' + s_2'$ voor de snelheid $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$ om te krijgen

$$s' = v_2t_0 + \frac{mv_2^2}{2F},$$
$$s' = v_2t_0 + \frac{(s - v_1t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{(33\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s}) \cdot (35\,\mathrm{m/s})^2}{(15\,\mathrm{m/s})^2} = 133\,\mathrm{m}.$$

Dit betekent dat de remweg van Tamar bij een snelheid van $v_2 = 35\,\mathrm{m/s}$ $s' = 133\,\mathrm{m}$ zou is.

Opgave 27 ... Dansen op het Water

De organisatoren van het jaarlijkse Aquatechno Dansevenement willen een drijvend dansplatform in het meer plaatsen. Het platform is kubusvormig met een dikte van 10 cm en een gemiddelde dichtheid van 0,6 g/cm^3. Ze willen dat het platform 4000 kg kan dragen voordat het zinkt. Wat is de minimale vereiste oppervlakte van het bovenoppervlak in vierkante meters?

Antwoord: 100

Oplossing: Noem de benodigde oppervlakte S, zodat het volume van het dansplatform $V = S \cdot 10\,\mathrm{cm}$ is. Wanneer het volledig belast is, zal het bovenoppervlak gelijk liggen met het water eromheen, en dus verplaatst het een volume V water. De verplaatste watermassa zal $V \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ zijn, en dit moet gelijk zijn aan de massa van het dansplatform plus de 4000 kg die erop geplaatst is. Deze massa is $V \cdot 600\,\mathrm{kg/m^3} + 4000\,\mathrm{kg}$. Oplossen voor V geeft $V = 10\,\mathrm{m^3}$, waardoor de oppervlakte van het dansplatform $S = \frac{V}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{m^2}$ moet zijn.

Opgave 28 ... Tent

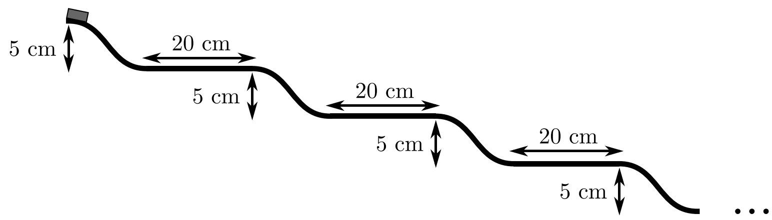
Iris is op een wandeltocht. Ze heeft een tent opgezet, die de vorm heeft van een gelijkbenige driehoek ABC met basis BC. Om haar kleren te drogen, heeft Iris een touw gespannen dat een gelijkzijdige driehoek DEF vormt, zodanig dat de punten D, E en F op de lijnstukken AB, BC en CA liggen, respectievelijk. Iris heeft gemeten dat $\angle ADF = 42^\circ$ en $\angle EFC = 24^\circ$. Wat is de grootte van $\angle EAC$ in graden?

Antwoord: 12

Oplossing: Beschouw de hoeken rond het hoekpunt F. We weten dat $\angle EFC = 24°$ en $\angle DFE = 60°$ omdat de driehoek DEF gelijkzijdig is. Daarom geldt dat $\angle AFD = 180° - \angle EFC - \angle DFE = 180° - 24° - 60° = 96°$. In de driehoek ADF kennen we nu twee hoeken, wat geeft dat $\angle DAF = 180° - \angle ADF - \angle DFA = 180° - 42° - 96° = 42°$.
We zien dat $\angle DAF = \angle ADF$, wat betekent dat de driehoek ADF gelijkbenig is met $AF = DF$. Lijnstuk DF is een zijde van de gelijkzijdige driehoek DEF, wat zegt dat $DE = EF = FD$. Hieruit volgt dat $AF = EF$, dus de driehoek AEF is gelijkbenig met basis AE.
We weten al dat $\angle AFE = \angle AFD + \angle DFE = 96° + 60° = 156°$. Daarom, vanwege de gelijkbenige driehoek AEF, krijgen we $\angle EAC = \angle EAF = \frac{180°-156°}{2} = 12°$.

Opgave 29 ... Hot wheels

Naomi speelt met een Hot Wheels-auto. Neem aan dat een Hot Wheels-auto een kubusvorm heeft met een massa van 60 g. Naomi heeft een parcours gemaakt met afwisselend hellende en horizontale delen. In de hellende delen gaat de auto 5 cm omlaag zonder wrijving, terwijl hij in de horizontale delen 20 cm horizontaal beweegt met een wrijvingscoëfficiënt van 0,4. Het parcours begint met een hellend deel en Naomi geeft de auto een beginsnelheid van 5 m/s. Op het hoeveelste horizontale deel van de weg stopt de auto?



Antwoord: 42

Oplossing: In de hellende delen neemt de energie van de auto toe en in de horizontale delen verliest hij energie. Daarom stopt de auto op een van de horizontale delen, namelijk wanneer zijn energie tot 0 is gedaald.
Aan het begin is de totale energie van de auto de som van zijn potentiële energie en zijn kinetische energie. Voor de eenvoud nemen we aan dat de potentiële energie van de auto aan het begin 0 J is. De energie van de auto bestaat dus volledig uit zijn kinetische energie, die $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ is, waarbij $m = 60\,\mathrm{g}$ de massa van de auto is en $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ de beginsnelheid van de auto.
Elke keer dat de auto een hellend deel passeert, neemt zijn energie toe door een verandering in de potentiële energie. Omdat hij daalt met een hoogte $h_0 = 5\,\mathrm{cm}$, wint hij energie $E_{p_0} = mgh_0$. In de horizontale delen is er een wrijvingskracht $F_t = fmg$, waarbij $f = 0{,}4$ de wrijvingscoëfficiënt is. Deze kracht werkt over een lengte $s = 20\,\mathrm{cm}$, waardoor er arbeid wordt verricht $W = F \cdot s = fmgs$. Hierdoor neemt de energie van de auto af met W.
Na elk opeenvolgend horizontaal en verticaal deel daalt de energie van de auto met $E_{p_0} - W = mgh_0 - fmgs$. Na n van zulke paren van horizontale en verticale delen, is de energie afgenomen met $n(E_{p_0} - W)$ en we zoeken het kleinste n waarvoor $E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0$. Het oplossen van deze ongelijkheid geeft

$$
\begin{aligned}
E_0 - n(E_{p_0} - W) &\leq 0,\\
\frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmgs) &\leq 0,\\
\frac{1}{2}v_0^2 &\leq n(fgs - gh_0),\\
n &\geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)},\\
n &\geq \frac{(5\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 10\,\mathrm{m^2/s}(0{,}4 \cdot 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm})} = \frac{25}{0{,}6} = \frac{250}{6} \doteq 41{,}67.
\end{aligned}
$$

Dus de auto stopt op het 42e horizontale deel.

Opgave 30 ... Ouder worden

Simon is net 37 jaar geworden en schrijft daarom een getal van 2024 cijfers, namelijk $3737\cdots37$, dat bestaat uit 1012 keer de cijfer 3 en 1012 keer de cijfer 7. Hij denkt terug aan de tijd toen hij 21 was en om die reden vermenigvuldigt hij het getal van 2024 cijfers met 21. Ten slotte besluit hij de som van de cijfers van het verkregen product te berekenen. Wat is de som van de cijfers die hij krijgt?

Antwoord: 12 153

Oplossing: Met een beetje geluk merken we op dat $37 \cdot 21 = 777$. Dit maakt het vermenigvuldigen gemakkelijker. We bootsen de gebruikelijke vermenigvuldigingsprocedure na. Normaal gesproken vermenigvuldigen we alleen cijfers van één cijfer. Maar nu weten we dat $37 \cdot 21 = 777$, dus we kunnen deze vermenigvuldiging in elke stap uitvoeren. Op deze manier ziet de vermenigvuldiging er uit zoals in de volgende afbeelding.

$$
\begin{array}{r}
37\cdots7373737\\
\cdot\,21\\
\hline
777\\
777\\
777\\
\cdots\\
777\\
\hline
784\cdots4848477
\end{array}
$$

De opeenvolgende getallen 777 hebben telkens één cijfer 7 gemeen, dus we sommen het op zoals gebruikelijk. Hierdoor verschijnen de cijfers 4 en 8 in het resultaat. Uit de procedure blijkt dat we het aantal cijfers met 1 hebben verhoogd, zodat het resultaat een getal van 2025 cijfers is. Drie daarvan zijn cijfer 7 en de overige $2025 - 3 = 2022$ wisselen af tussen 4 en 8, dus er zijn $2022 : 2 = 1011$ van elk van hen. In totaal is de som van alle cijfers van het resultaat $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Opgave 31 ... Batterijen opladen

Miko schrijft de oplossingen voor de Náboj Junior van dit jaar in een theehuis. Voor zijn werk gebruikt hij een laptop met een accu capaciteit van 4000 mAh en een smartphone met een accu capaciteit van 3500 mAh. Helaas was hij vergeten ze op te laden, dus beide apparaten hebben maar 20 % van hun capaciteit. Miko heeft slechts één oplader die de apparaten kan opladen met een stroomsterkte van 3,25 A. Hij weet ook dat wanneer zijn laptop volledig is opgeladen, deze na 10 uur leeg is, en dat hetzelfde geldt voor zijn smartphone. Wat is de minimale tijd in uren waarin Miko beide apparaten volledig kan opladen terwijl hij ze nog steeds gebruikt voor zijn werk?

Antwoord: 2,4

Oplossing: De capaciteit van een batterij in mAh beschrijft een verband tussen de geleverde stroomsterkte van de batterij en de tijd gedurende welke de batterij die stroom kan leveren. Als een batterij met een capaciteit van 4000 mAh volledig is opgeladen, kan deze bijvoorbeeld een elektrische stroomsterkte van 4000 mA gedurende één uur leveren, of een stroomsterkte van 1000 mA gedurende vier uur, of iets dergelijks. Aangezien Miko kan wisselen welk apparaat wordt opgeladen, kunnen we de laptop en de smartphone als één apparaat beschouwen met een capaciteit van $4000\,\mathrm{mAh} + 3500\,\mathrm{mAh} = 7500\,\mathrm{mAh}$. Aan het begin hadden beide apparaten samen een lading van 20 % van hun capaciteit, dus samen hadden ze $0{,}2 \cdot 7500\,\mathrm{mAh} = 1500\,\mathrm{mAh}$. Beide apparaten lopen leeg op een manier waardoor ze na 10 uur leeg zijn, wat betekent dat ze per uur $7500\,\mathrm{mAh} : 10 = 750\,\mathrm{mAh}$ verbruiken.

Ondertussen laadt Miko de apparaten op met een oplader die een stroomsterkte heeft van $3{,}25\,\mathrm{A} = 3250\,\mathrm{mA}$. Dus na één uur laadt hij 3250 mAh bij. Dit betekent dat de lading van de batterijen elk uur toeneemt met

$3250\,\mathrm{mAh} - 750\,\mathrm{mAh} = 2500\,\mathrm{mAh}$. Miko moet de lading met $7500\,\mathrm{mAh} - 1500\,\mathrm{mAh} = 6000\,\mathrm{mAh}$ verhogen, dus zullen de apparaten volledig opgeladen zijn in

$$\frac{6000\,\mathrm{mAh}}{2500\,\mathrm{mAh/h}} = 2{,}4\,\mathrm{h}.$$

Opgave 32 ... Zandkastelen bouwen is saai

Louise is het zat om zandkastelen te bouwen, dus speelt ze nu met een emmer in een meer. De emmer is heel licht en heeft een cilindervorm met een bodemoppervlakte van $400\,\mathrm{cm}^2$ en een hoogte van $30\,\mathrm{cm}$. Louise heeft de emmer volledig ondergedompeld, zodat de bovenkant $10\,\mathrm{cm}$ onder het wateroppervlak ligt. Nu wil ze de emmer langzaam optillen totdat de bodem net boven het wateroppervlak is. Wat is de arbeid in Joule die Louise moet verrichten?

Antwoord: 18

Oplossing: De enige reden waarom Louise wat arbeid moet verrichten, is dat ze de potentiële energie van het water in de emmer verhoogt. De emmer is een cilinder met een bodemoppervlakte $S = 400\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}04\,\mathrm{m}^2$ en een hoogte $h = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, dus de massa van het water in de emmer is $m = \rho_{water} S h$. Het zwaartepunt van het water in de emmer bevindt zich halverwege de hoogte van de emmer, namelijk op $\frac{h}{2}$. De toename van de potentiële energie van het water, en dus de arbeid die Louise moet verrichten, is:

$$W = mg\frac{h}{2} = \frac{\rho_{water} S g h^2}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot (0{,}3\,\mathrm{m})^2}{2} = 18\,\mathrm{J}.$$

Opgave 33 ... We hebben het niet over Bruno

Bruno is een buitengewone ontwerper, dus het is jammer dat we het niet vaker over hem hebben. Recentelijk tekende hij een nieuw logo voor zijn bedrijf. Het is een zeer specifiek zeshoek $ABCDEF$, waarbij $AB = 12\,\mathrm{cm}$, $BC = 19\,\mathrm{cm}$, $CD = 2\,\mathrm{cm}$, $DE = 14\,\mathrm{cm}$, $EF = 4\,\mathrm{cm}$ en $FA = 9\,\mathrm{cm}$. Bovendien zijn de lengtes van de diagonalen AC, CE en EA gehele getallen en vormen zij een driehoek. Wat is de maximaal mogelijke omtrek van de driehoek ACE in centimeters?

Antwoord: 53

Oplossing: We gaan de driehoeksongelijkheid meerdere keren gebruiken. In de driehoek ABC vertelt deze ons dat de lengte van zijde AC groter is dan $19\,\mathrm{cm} - 12\,\mathrm{cm} = 7\,\mathrm{cm}$, maar kleiner dan $19\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 31\,\mathrm{cm}$. De lengte moet een geheel getal zijn, dus de lengte van AC kan elk geheel getal tussen $8\,\mathrm{cm}$ en $30\,\mathrm{cm}$ zijn. Om dezelfde reden (toegepast in de driehoeken CDE en EFA) krijgen we dat de lengte van CE een geheel getal is tussen $13\,\mathrm{cm}$ en $15\,\mathrm{cm}$ en de lengte van EA een geheel getal tussen $6\,\mathrm{cm}$ en $12\,\mathrm{cm}$.
Om de maximale omtrek van de driehoek ACE te krijgen, moeten we de grootst mogelijke lengtes van zijn zijden kiezen. Maar de driehoeksongelijkheid moet geldig blijven. Dus, zelfs als we de grootste mogelijke lengtes van CE en EA kiezen, kunnen we de lengte AC slechts kiezen tot minder dan $15\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 27\,\mathrm{cm}$. De grootste mogelijke omtrek van de driehoek wordt dus bereikt wanneer $AC = 26\,\mathrm{cm}$, $CE = 15\,\mathrm{cm}$ en $EA = 12\,\mathrm{cm}$, waarbij de omtrek $26\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} = 53\,\mathrm{cm}$ is.

Opgave 34 ... De vreugde van iets missen

Jort speelt met faculteiten. De faculteit van een getal krijg je door alle natuurlijke getallen tot dat getal met elkaar te vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Jort bekijkt het product $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$, dat geen kwadraat is. Jort ontdekt dat als hij de factor $k!$ zou weglaten, hij wel een kwadraat zou krijgen. Bovendien realiseert hij zich dat er slechts één zo'n k met deze eigenschap is. Bepaal de waarde van k.

Antwoord: 1012

Oplossing: Het product van twee kwadraten is ook weer een kwadraat – als we a^2 vermenigvuldigen met b^2, krijgen we $(ab)^2$. We zullen proberen dit te gebruiken om het probleem te vereenvoudigen.
Kijk naar het product $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Als we de opeenvolgende termen groeperen als $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ en elke faculteit van een even getal schrijven als $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, kunnen we het product vereenvoudigen tot de vorm

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \ldots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (2023!)^2).$$

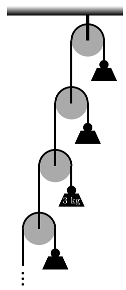
De factor $(1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (2023!)^2$ is een product van kwadraten, dus dit is ook een kwadraat. Om het hele product een kwadraat te maken, moet de factor $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024$ een kwadraat zijn. Het is een product van even getallen, dus we kunnen het vereenvoudigen door het getal twee uit elke factor te halen. Op deze manier krijgen we

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2024) = 2^{1012}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Dit getal 2^{1012} is een kwadraat (de exponent is even), dus de enige belemmering voor het hele product om een kwadraat te zijn is de factor $1012!$. In de opgave mogen we één factor weglaten en dit betekent dat we de factor $1012!$ moeten verwijderen. Aangezien de opgave aangeeft dat deze factor uniek is, kunnen we zeggen dat we zoeken naar het getal $k = 1012$.

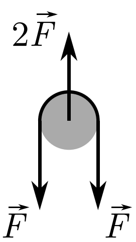
Opgave 35 ... Overal katrollen

Bob de bouwer heeft een oneindig katrollensysteem gebouwd zoals in de figuur. De massa's van de gewichten hoeven niet hetzelfde te zijn. Het systeem is zo gemaakt dat het in rust blijft. De massa van het derde gewicht is 3 kg. Wat is het totale gewicht van alle gewichten in kilogrammen?



Antwoord: 24

Oplossing: De situatie rondom elke katrol ziet eruit zoals in de figuur.



De krachten in het touw zijn overal gelijk aan F omdat de spanning in het touw overal gelijk is (natuurlijk kan de spanning verschillen voor verschillende touwen). Om ervoor te zorgen dat de katrol in rust blijft, moet er ook een kracht met grootte $2F$ in de opwaartse richting zijn.
Hoewel het lijkt alsof we te maken hebben met de complexiteit van een oneindig katrollensysteem, zien we dat dit ons niet belemmert. Omdat de katrollen en touwen massaloos zijn, kunnen we de som van alle gewichten bepalen door te kijken naar de kracht waarmee het oneindige katrollensysteem op het plafond werkt. Dit

geeft ons de som van de zwaartekrachten die op alle gewichten werken, wat ons vervolgens hun totale gewicht vertelt.
We gebruiken de observatie aan het begin om de kracht te bepalen die op het plafond werkt.
Begin met het bekijken van de derde katrol. We weten dat er een gewicht met massa 3 kg aan hangt, waarop een zwaartekracht met grootte $3\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 30\,\mathrm{N}$ werkt. Dus de spanning in het bijbehorende touw is ook 30 N, wat betekent dat er een kracht met grootte $2 \cdot 30\,\mathrm{N} = 60\,\mathrm{N}$ op de derde katrol moet werken in de opwaartse richting.
Nu kunnen we naar de tweede katrol kijken. De kracht van 60 N uit de vorige alinea zorgt voor een spanning van dezelfde grootte in het touw rond de tweede katrol, wat betekent dat er een kracht van $2 \cdot 60\,\mathrm{N} = 120\,\mathrm{N}$ op de tweede katrol in de opwaartse richting moet werken. Door hetzelfde argument toe te passen op de eerste katrol, moet er een kracht van $2 \cdot 120\,\mathrm{N} = 240\,\mathrm{N}$ op de eerste katrol in de opwaartse richting werken. Dit is echter ook de grootte van de kracht waarmee het gehele katrollensysteem op het plafond werkt, wat we wilden vinden.
Dus het hele katrollensysteem werkt op het plafond met een kracht van 240 N, waardoor de massa van alle gewichten $240\,\mathrm{N} : 10\,\mathrm{N/kg} = 24\,\mathrm{kg}$ moet zijn.

Opgave 36 . . . De cijfers zijn omgedraaid

Milan houdt van spelen met getallen. Hij neemt een getal van drie cijfers, keert de volgorde van de cijfers om en trekt dit getal af van het oorspronkelijke getal. Bijvoorbeeld, als hij begint met het getal 123, krijgt hij $123 - 321 = -198$. Op een keer laat hij dit aan Anna zien. Hij doet dit met Anna's favoriete getal. Vervolgens neemt hij een getal dat 31 kleiner is dan Anna's favoriete getal, wat nog steeds een getal van drie cijfers is. Tot zijn verbazing krijgt hij hetzelfde verschil als bij Anna's favoriete getal. Hoeveel 3-cijferige getallen kunnen Anna's favoriete getal zijn?

Opmerking: Een 3-cijferig getal kan geen nul hebben als honderdtal, maar het getal dat ontstaat door de cijfers om te draaien kan dat wel. In dat geval negeren we de beginnullen.

Antwoord: 216

Oplossing: Laten we eerst kijken naar de verschillen die Milan berekent. Een getal van drie cijfers kan geschreven worden als $100A + 10B + C$, waarbij A, B en C de cijfers zijn. Na het omdraaien van de cijfers krijgt Milan het getal $100C + 10B + A$, dus het verschil wordt

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C).$$

We zien dat het verschil alleen afhangt van het verschil tussen het honderdtal en de eenheid van het oorspronkelijke getal. In dit probleem werkt Milan met een getal en dan met datzelfde getal verminderd met 31. Hij krijgt hetzelfde resultaat, dus deze twee getallen moeten hetzelfde verschil hebben tussen het honderdtal en de eenheid. Nu moeten we de getallen met deze eigenschap berekenen.
Er zijn twee mogelijke gevallen, gebaseerd op de eenheid van Anna's favoriete getal. Als de eenheid 0 is, verandert het aftrekken van 31 dit naar 9. Daarom moet het honderdtal ook met 9 toenemen, wat duidelijk onmogelijk is. Dit betekent dat Anna's favoriete getal geen 0 als eenheid heeft. Na aftrekking van 31 vermindert de eenheid dus met 1, en het honderdtal moet ook met 1 verminderen. Dit gebeurt alleen als het 2-cijferige getal gevormd door de laatste twee cijfers van Anna's favoriete getal één van 00, 01, . . ., 30 is.
Uit deze lijst verwijderen we de gevallen met 0 als eenheid, wat 27 mogelijkheden overlaat. Het enige wat we nu nog hoeven te doen, is de mogelijkheden voor het honderdtal bepalen. Dit kan geen 1 zijn, omdat we na het aftrekken van 31 geen 3-cijferig getal zouden krijgen. Maar de cijfers 2, 3, . . ., 9 zijn wel mogelijk.
Door het honderdtal te combineren met de mogelijkheden voor de andere twee cijfers krijgen we $8 \cdot 27 = 216$ mogelijkheden voor Anna's favoriete getal.

Opgave 37 . . . De grootste verveling ooit

Joost is zo verveeld dat hij alle positieve gehele getallen van 1 tot en met 9 876 543 210 opschrijft, zijn favoriete getal. Hij berekent ook de som van alle cijfers in deze getallen en krijgt het resultaat 443 255 601 330. Nu wil hij iets vergelijkbaars doen. Hij verwisselt de cijfers 5 en 6 in alle getallen en berekent de som van alle cijfers in de nieuwe getallen. Wat is het resultaat dat Joost op deze manier krijgt?

Antwoord: 443 256 101 330

Oplossing: Elke verandering van cijfer 5 naar cijfer 6 verhoogt de som van de cijfers met 1 en elke verandering van 6 naar 5 verlaagt de som van de cijfers met 1. Dit betekent dat elke verandering van 5 naar 6 een verandering van 6 naar 5 opheft. We hoeven dus alleen naar het verschil te kijken in het aantal keren dat de cijfers 5 en 6 voorkomen in de getallen tussen 1 en 9 876 543 210.
Laten we ons richten op de cijfers 5 en 6 in de positie waarin deze cijfers voorkomen in het getal 9 876 543 210. Als we een cijfer 5 in een hogere of lagere positie hebben, kunnen we dit cijfer 5 verwisselen met cijfer 6 (en omgekeerd), zodat we een getal krijgen dat door Joost is meegeteld. Er is bij zulke getallen dus geen verschil tussen het aantal keren dat de cijfers 5 en 6 voorkomen.
Nu focussen we ons alleen op de cijfers 5 en 6 in de miljoenen en honderdduizenden posities. Ook maakt het enige verschil wanneer deze twee cijfers worden voorafgegaan door de 987 combinatie (anders zou de logica van de vorige alinea van toepassing zijn). Onder deze voorwaarde komt het cijfer 5 1 000 000 keer voor als miljoenen-cijfer en $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$ keer als honderdduizenden-cijfer. Op dezelfde manier komt het cijfer 6 543 211 keer voor als miljoenen-cijfer en $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$ keer als honderdduizenden-cijfer. Het aantal keren dat cijfer 5 voorkomt, is dus $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 500\,000$ groter dan het aantal keren dat het cijfer 6 voorkomt.
De vervanging van het cijfer 5 door cijfer 6 verhoogt de som van de cijfers dus met 500 000, waardoor Joost het resultaat krijgt

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330.$$

Opgave 38 ... Uit het water springen

Ferdinand is een homogeen, vast prisma met een basis van een regelmatige zeshoek met zijde 0,9 m, een hoogte van 0,6 m en een dichtheid van $125\,\mathrm{kg/m^3}$. Hij wordt momenteel net onder het wateroppervlak van een groot meer gehouden, zodat beide bases parallel aan het wateroppervlak zijn en de bovenste basis zich precies op het wateroppervlak bevindt. Na loslaten zal Ferdinand boven het meer uitspringen. Wat is de hoogte boven het wateroppervlak in meters die de bovenste basis zal bereiken?
Opmerking: Stel dat de bases van Ferdinand horizontaal blijven.

Antwoord: 2,4

Oplossing: Laat V het volume van Ferdinand zijn, $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$ zijn hoogte en $\rho_{Ferdinand} = 125\,\mathrm{kg/m^3}$ zijn dichtheid. Na de sprong wordt het oorspronkelijke volume van Ferdinand gevuld met water. Hierdoor verliest het meer energie $E = V\rho_{water}g\frac{h}{2}$, aangezien de massa van dit water $V\rho_{water}$ is en het zwaartepunt zich op een diepte van $\frac{h}{2}$ bevindt (het meer is groot genoeg zodat het wateroppervlak hetzelfde blijft). We moeten de hoogte H bepalen die Ferdinand zal bereiken. Op het hoogste punt heeft hij geen kinetische energie meer, dus de energie die hij van het water kreeg, wordt omgezet in potentiële energie $E = V\rho_{Ferdinand}gH$. Door de twee uitdrukkingen voor E te vergelijken vinden we

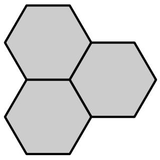
$$V\rho_{water}g\frac{h}{2} = V\rho_{Ferdinand}gH,$$
$$H = \frac{\rho_{water}}{\rho_{Ferdinand}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{125\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \frac{0{,}6\,\mathrm{m}}{2} = 2{,}4\,\mathrm{m}.$$

We zien dat de bovenste basis van Ferdinand de hoogte van 2,4 m zal bereiken.

Opgave 39 ... Uitsnijden van veelhoeken

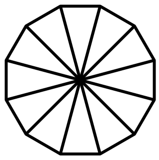
Thomas nam papier en knipte drie regelmatige veelhoeken uit, elk met een verschillend aantal zijden en met dezelfde zijdelengte. Tot zijn verbazing kon hij ze zo op tafel leggen dat ze allemaal een hoekpunt deelden en elk paar veelhoeken een zijde deelde. Op deze manier kreeg Thomas een (onregelmatige) n-hoek. Wat is de maximaal mogelijke waarde van n?

Opmerking: Als we de veelhoeken zouden toestaan om hetzelfde aantal zijden te hebben, zou onderstaande figuur met $n = 12$ *een mogelijke een* n*-hoek vormen.*



Antwoord: 46

Oplossing: Elke regelmatige m-hoek kan worden verdeeld in m congruente gelijkbenige driehoeken zoals te zien in de figuur.



De hoeken tegenover de basis moeten samen $360°$ vormen. Alle andere hoeken dragen bij aan de hoekensom van de m-hoek. Omdat de som van de hoeken in elke driehoek $180°$ is, betekent dit dat de som van de hoeken in de m-hoek gelijk is aan $m \cdot 180° - 360° = (m-2) \cdot 180°$. Elke hoek in een regelmatige m-hoek heeft dezelfde grootte, dus de grootte van elke hoek is $\frac{m-2}{m} \cdot 180°$.
Als we de veelhoeken zo willen rangschikken zoals gevraagd in de opgave, moet de som van de hoeken bij het gemeenschappelijke hoekpunt $360°$ zijn. Dus, als we x, y en z het aantal zijden van de regelmatige veelhoeken noemen en de informatie uit de vorige paragraaf gebruiken, dan moet gelden:

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180° + \frac{y-2}{y} \cdot 180° + \frac{z-2}{z} \cdot 180° = 360°.$$

We kunnen de hele vergelijking door $180°$ delen en vereenvoudigen om te krijgen:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x} + \frac{y-2}{y} + \frac{z-2}{z} &= 2, \\ \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \left(1 - \frac{2}{y}\right) + \left(1 - \frac{2}{z}\right) &= 2, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Laten we proberen alle drietallen (x, y, z) te vinden die aan deze vergelijking voldoen. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $x > y > z$. Als $z \geq 6$, dan is $y \geq 7$ en $x \geq 8$. Maar dan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Daarom kunnen we geen $z \geq 6$ hebben, dus is z een van de getallen 3, 4 of 5. Los elk geval afzonderlijk op.

Geval $z = 3$. De voorwaarde in dit geval is $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Door vermenigvuldiging met de noemers krijgen we $6y + 6x = xy$, wat kan worden herschreven (na toevoeging van 36 aan beide zijden) in de vorm $(x-6)(y-6) = 36$. Beide factoren moeten positief zijn. Omdat het getal 36 kan worden geschreven als een product van twee verschillende getallen op vier manieren $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, krijgen we vier oplossingen voor (x, y), namelijk de paren $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$.

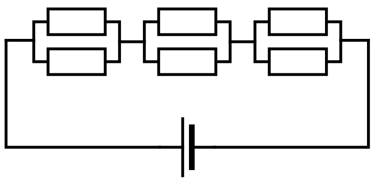
Geval $z = 4$. We gaan verder zoals in het vorige geval. We hebben $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, wat na vermenigvuldiging $4y + 4x = xy$ wordt. Na toevoeging van 16 en factorisatie krijgen we de vergelijking $(x-4)(y-4) = 16$. Dus (x, y) moet een van de paren $(20, 5)$ en $(12, 6)$ zijn.

Geval $z = 5$. Tot slot hebben we in dit geval de vergelijking $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{10}$, wat $10y+10x = 3xy$ wordt. Als we deze vergelijking met 3 vermenigvuldigen en 100 optellen, krijgen we de vergelijking $(3x-10)(3y-10) = 100$. Dit leidt tot oplossingen waarbij de paren (x, y) behoren tot de paren $\left(\frac{110}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $(20, 4)$, $\left(\frac{35}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $(10, 5)$. Van deze zijn we niet geïnteresseerd in de paren met breuken. Bovendien hebben we de drietallen $(20, 5, 4)$ al gevonden in het vorige geval (en het hoort niet bij dit geval). De enige andere oplossing uit dit geval is $(x, y) = (10, 5)$ en die voldoet niet aan de voorwaarde $y > z$. Dus we hebben geen nieuwe oplossingen uit dit geval.

De enige drietallen (x, y, z) die voldoen aan de vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ en de ongelijkheden $x > y > z$ zijn de drietallen $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$, en $(12, 6, 4)$.
Het kan worden gezien dat, na het samenvoegen van de veelhoeken, elke veelhoek op de rand alle zijden zal hebben behalve twee. Dit betekent dat we $n = (x-2) + (y-2) + (z-2) = (x+y+z) - 6$ moeten hebben, dus we proberen het getal $x + y + z - 6$ te maximaliseren. Onder de gevonden drietallen zijn de waarden van $x + y + z - 6$ respectievelijk 46, 30, 26, 22, 23, en 16. Daarom is de maximaal mogelijke waarde van n gelijk aan 46.

Opgave 40 ... Een erg weerbarstig probleem

Mathijs heeft een elektrisch circuit gebouwd zoals te zien is in de afbeelding. Hij heeft een spanningsbron van 3 V en weerstanden van respectievelijk $2\,\Omega$, $3\,\Omega$, $4\,\Omega$, $5\,\Omega$, $6\,\Omega$ en $7\,\Omega$ gebruikt. Maar hij is vergeten exact welke posities de weerstanden in het circuit innemen. Hij weet alleen dat de stroomsterkte die door het gehele circuit loopt $\frac{273}{580}$ A is. Wat is de elektrische stroomsterkte in ampère die door de weerstand van $5\,\Omega$ loopt?



Antwoord: $\frac{39}{290}$

Oplossing: De weerstand R_0 van twee parallelle weerstanden met weerstanden R_1 en R_2 wordt gegeven door de relatie

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Drie van zulke parallelle paren zijn in serie geschakeld, dus de totale weerstand van alle weerstanden wordt gegeven door de som van drie breuken in bovenstaande vorm. De totale weerstand R kan worden berekend met de spanning $U = 3\,\mathrm{V}$ van de bron en de elektrische stroom $I = \frac{273}{580}$ A door het gehele circuit. Dit geeft

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3\,\mathrm{V}}{\frac{273}{580}\,\mathrm{A}} = \frac{580}{91}\,\Omega.$$

Daarom moeten we hebben dat

$$\frac{580}{91}\,\Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

waarbij R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 en R_6 respectievelijk $2\,\Omega$, $3\,\Omega$, $4\,\Omega$, $5\,\Omega$, $6\,\Omega$ en $7\,\Omega$ zijn in een bepaalde volgorde. Beschouw deze vergelijking zonder eenheden. Om het getal 91 in de noemer te krijgen, moet het kleinste gemene veelvoud van de noemers $R_1 + R_2$, $R_3 + R_4$ en $R_5 + R_6$ een veelvoud zijn van 91. De priemfactorisatie van 91 is $91 = 7 \cdot 13$. Dus moet ten minste één van de noemers deelbaar zijn door 13. Omdat we dit als som moeten schrijven van twee getallen uit de verzameling $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kan dit alleen als $6 + 7$. Dit betekent dat één van de parallelle paren de weerstanden van $6\,\Omega$ en $7\,\Omega$ moet bevatten. Op dezelfde manier moet er een paar zijn waarvan de som een veelvoud is van 7. De enige manier om dit te doen is met een paar van $2\,\Omega$ en $5\,\Omega$ en een paar van $3\,\Omega$ en $4\,\Omega$.
Het blijft nu over om de stroomsterkte door de $5\,\Omega$ weerstand te berekenen. Deze staat parallel aan de $2\,\Omega$ weerstand, dus de weerstand van dit paar is

$$R_{25} = \frac{2\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{10}{7}\,\Omega.$$

De stroom door dit gehele paar is nog steeds I, dus de spanning over beide weerstanden in het paar is

$$U_{25} = R_{25} I = \frac{10}{7}\,\Omega \cdot \frac{273}{580}\,\mathrm{A} = \frac{39}{58}\,\mathrm{V}.$$

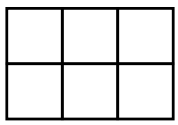
Tenslotte is de elektrische stroom I' door de weerstand van $R' = 5\,\Omega$

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\,\mathrm{V}}{5\,\Omega} = \frac{39}{290}\,\mathrm{A}.$$

Opgave 41 ... Overal rechthoeken

Mikki heeft een $m \times n$ tabel verdeeld in mn vakjes van één eenheid groot getekend. Zij telt dat er 141 400 rechthoeken gevormd werden door de lijnen van de tabel. Hoeveel eenheidvakjes bevat de tabel?

Opmerking: We beschouwen elk vierkant als een rechthoek. Bijvoorbeeld, er zijn 18 *rechthoeken in een* 2×3 *tabel hieronder.*



Antwoord: 700

Oplossing: We moeten het aantal rechthoeken berekenen in termen van m (aantal rijen) en n (aantal kolommen). Kijk naar de verticale lijnen die van de bovenkant naar de onderkant van de tabel lopen (er zijn er $n + 1$) en op dezelfde manier naar de horizontale lijnen van links naar rechts (er zijn er $m + 1$). Merk op dat elke combinatie van twee verticale lijnen en twee horizontale lijnen precies één rechthoek bepaalt. Omgekeerd geldt ook dat als we een rechthoek kiezen, deze precies twee verticale en twee horizontale lijnen bepaalt – de lijnen langs de zijden van de rechthoek. Er is dus een een-op-een relatie tussen de rechthoeken en combinaties van twee verticale en twee horizontale lijnen.
We hoeven dus alleen het aantal van deze combinaties te berekenen. Voor de eerste verticale lijn hebben we $n + 1$ keuzes, en voor de tweede verticale lijn blijven er n keuzes over. Echter, op deze manier kunnen we een paar lijnen in twee verschillende volgordes kiezen. Daarom kunnen we de verticale lijnen op $\frac{(n+1)n}{2}$ manieren kiezen. Op dezelfde manier kunnen we de horizontale lijnen op $\frac{(m+1)m}{2}$ manieren kiezen. Het totale aantal manieren om de combinatie van lijnen te kiezen is dus $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$. We willen dus de waarden m en n vinden waarvoor geldt dat

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400, \quad (m+1)m(n+1)n = 565\,600$$

Merk op dat het getal 565 600 deelbaar is door 101 (omdat $565\,600 = 5600 \cdot 101$) wat een priemgetal is, dus het moet ten minste één van de factoren aan de linkerkant delen. Een optie, geïnspireerd door het feit dat 565 600 ook deelbaar is door 100, is om één van m en n gelijk aan 100 te stellen. Stel bijvoorbeeld $m = 100$. De rest van de vergelijking wordt dan $(n + 1)n = 56$, wat klopt voor $n = 7$.
Het kan eenvoudig handmatig worden gecontroleerd dat andere veelvouden van 101 (bij veelvouden van 808 en hoger is het product groter dan 565 600, omdat het zeker groter is dan $800 \cdot 800 = 640\,000$) geen andere oplossingen opleveren. Dit betekent dat Mikki een 100×7 (of 7×100) tabel moet hebben getekend, die uit $100 \cdot 7 = 700$ eenheidvakjes bestaat.

Opgave 42 . . . Een schattige satelliet

Drie satellieten draaien om de Aarde. Hun banen zijn cirkels met het middelpunt in het centrum van de Aarde en bijna dezelfde straal. Bovendien liggen alle drie de banen in hetzelfde vlak. De satellieten hebben stuwraketten waarmee ze een constante hoeksnelheid kunnen behouden. De eerste satelliet draait om de Aarde in 90 minuten, de tweede in 30 minuten en de derde in 15 minuten, en ze bewegen allemaal tegen de klok in. Bij de start waren alle satellieten bijna op dezelfde plek. Wat is de kans dat de satellieten op een willekeurig gekozen moment een scherpe driehoek vormen?

Antwoord: $\frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%$

Oplossing: De eerste satelliet draait elke 90 minuten om de Aarde, dus hij draait elke minuut $\frac{360°}{90} = 4°$. De tweede satelliet draait elke minuut $\frac{360°}{30} = 12°$, en de derde satelliet draait elke minuut $\frac{360°}{15} = 24°$.
In plaats van drie satellieten die om de Aarde draaien, kunnen we de situatie bekijken vanuit het perspectief van één van de satellieten. Het voordeel hiervan is dat we één satelliet als stilstaand kunnen beschouwen. Laten we bijvoorbeeld zeggen dat de eerste satelliet stilstaat. In het referentiekader van deze satelliet draait de tweede satelliet elke minuut $12° - 4° = 8°$ en de derde satelliet elke minuut $24° - 4° = 20°$.
Nu kunnen we naar de scherpheid van de driehoek kijken. De satellieten bevinden zich op dezelfde cirkel. Als twee van hen een diameter vormen, dan vertelt de stelling van Thales ons dat de satellieten een rechthoekige driehoek vormen. We kunnen zien dat dit een soort grens is tussen het vormen van een scherpe of stompe driehoek:

- Als er een diameter van de cirkel bestaat waarbij alle drie satellieten aan dezelfde kant van deze diameter liggen, dan vormen de satellieten een stompe driehoek,
- Als er geen diameter bestaat zoals hierboven beschreven, dan vormen de satellieten een scherpe driehoek.

De scherpheid/stompheid kan alleen veranderen als twee van de satellieten een diameter vormen of als twee satellieten op hetzelfde punt zijn. Voor het paar bestaande uit de eerste en tweede satelliet gebeurt dit eens per $\frac{180°}{8°} = 22{,}5$ minuten, voor het paar bestaande uit de eerste en derde satelliet gebeurt dit eens per $\frac{180°}{20°} = 9$ minuten. Tot slot, voor het paar bestaande uit de tweede en derde satelliet, gebeurt dit eens per $\frac{180°}{20°-8°} = 15$ minuten. Veelvouden van deze tijden vormen onze breekpunten:

- Van minuut 0 tot minuut 9 (de eerste en derde satelliet vormen een diameter) – ze vormen een stompe driehoek.
- Van minuut 9 tot minuut 15 (de tweede en derde satelliet vormen een diameter) – ze vormen een scherpe driehoek.
- Van minuut 15 tot minuut 18 (de eerste en derde satelliet bevinden zich op hetzelfde punt) – ze vormen een stompe driehoek.
- Van minuut 18 tot minuut 22,5 (de eerste en tweede satelliet vormen een diameter) – ze vormen een stompe driehoek.
- Van minuut 22,5 tot minuut 27 (de eerste en derde satelliet vormen een diameter) – ze vormen een scherpe driehoek.

- Van minuut 27 tot minuut 30 (de tweede en derde satelliet bevinden zich op hetzelfde punt) – ze vormen een stompe driehoek.
- Van minuut 30 tot minuut 36 (de eerste en derde satelliet bevinden zich op hetzelfde punt) – ze vormen een stompe driehoek.
- Van minuut 36 tot minuut 45 (de eerste en tweede satelliet bevinden zich op hetzelfde punt en vormen samen een diameter met de derde satelliet) – ze vormen een stompe driehoek.

Vanwege de configuratie op minuut 45 kunnen we zien dat vanaf minuut 45 tot minuut 90 dezelfde stappen in omgekeerde volgorde zullen plaatsvinden. Dit komt doordat we, als we de bewegingen in axiale symmetrie bekijken ten opzichte van de diameter gevormd door de satellieten op minuut 45, de 'achterwaartse' beweging van de satellieten van minuut 45 tot minuut 0 zouden zien. Er gebeurt dus niets fundamenteel nieuws, en we kunnen de kans afleiden uit de bewegingen tussen minuten 0 en 45. Gedurende deze 45 minuten vormen de satellieten een scherpe driehoek tussen minuten 9 en 15 en tussen minuten 22,5 en 27. In totaal $(15 - 9) + (27 - 22{,}5) = 10{,}5$ minuten. De kans dat de satellieten een scherpe driehoek vormen is dus

$$\frac{10{,}5}{45} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \doteq 23{,}3\,\%.$$

Met dank aan

Voorzitter van het opgavencomité

Marián Poturnay

Opgave-inzendingen

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Opgaven en oplossingen

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Herzieningen

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dlugošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Vertalingen

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskyi, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisaj, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Coördinatoren

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Wedstrijdlocaties

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkola Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkera • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu