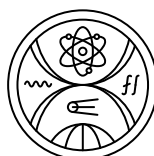
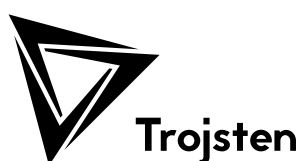


Vzorové riešenia
12. ročník Náboja Junior

22. novembra 2024



FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského
v Bratislave

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadání a řešení úloh súťaže Náboj Junior 2024. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímý až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nie len na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 22. novembra 2024 prebehol 12. ročník Náboja Junior. Na Slovensku sa tento rok zúčastnilo súťaže skoro 430 tímov. Náboj Junior prebehol v 60 mestách na Slovensku, v Česku, v Poľsku a v Rakúsku. Súčasne sa súťaž konala v online verzii v Belgicku, Holandsku, Chorvátsku a Španielsku.

V slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškólakmi, ktorí venujú svoj čas a energiu, aby umožnili mladším žiakom z regiónu zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti. Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškólakov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave a Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a zvýšenie záujmu o prírodné vedy.

Tešíme sa na Vás budúci rok,

o. z. Trojsten

Úloha 1 ... Tajný denník

Patrik práve dopísal prvú časť svojho veľmi tajného denníka a teraz ho chce zamknúť do trezora, aby si ho nikto nemohol prečítať. Chce použiť zámok, ktorý si kúpil pred pár rokmi, no zabudol 3-ciferný kód, ktorým sa dá zámok otvoriť. Patrik vie vyskúšať jeden kód každé 3 sekundy. Koľko minút bude Patrikovi trvať vyskúšať všetky možné kódy?

Výsledok: 50

Riešenie: Ako prvé nájdime počet všetkých možných 3-ciferných kódov. To budú všetky kódy od 000 do 999, čo nám dá dokopy 1000 možností. Vyskúšať jednu z nich bude Patrikovi trvať 3 sekundy, čiže vyskúšať ich 1000 mu bude trvať $3 \cdot 1000 = 3000$ sekúnd, čo je $\frac{3000}{60} = 50$ minút.

Úloha 2 ... Rekonštrukcia podlahy

Anička opravuje podlahu vo svojom byte. Preto si kúpila niekoľko dosiek z dubového dreva s hustotou 600 kg/m^3 . S rôznymi pomôckami odmerala rozmery jednej takejto dosky a zistila, že jej dĺžka je 0,8 m, jej šírka je 12,5 cm a jej hrúbka je 15 mm. Aká je hmotnosť tejto dosky v gramoch?

Výsledok: 900

Riešenie: Začnime premenou jednotiek na základné jednotky. Vieme, že 12,5 cm je 0,125 m a 15 mm je 0,015 m. Teraz vieme jednoducho nájsť objem jednej dosky vynásobením všetkých troch jej rozmerov. To nám dá objem $0,8 \text{ m} \cdot 0,125 \text{ m} \cdot 0,015 \text{ m} = 0,0015 \text{ m}^3$. Aby sme zistili, koľko doska váži, potrebujeme vynásobiť tento objem jej hustotou, čo nám dá hmotnosť $0,0015 \text{ m}^3 \cdot 600 \text{ kg/m}^3 = 0,9 \text{ kg}$. Našou odpoveďou má byť hmotnosť v gramoch, teda $0,9 \text{ kg} = 900 \text{ g}$.

Úloha 3 ... Magický trik 1

Paľko chce predviesť kamarátom magický trik s jeho balíčkom 6 kariet očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Tento trik začína vyložením všetkých šiestich kariet do jedného radu vedľa seba na stôl. Aby tento trik fungoval, je nutné, aby rozdiel čísel na každých dvoch susedných kartách bol väčší než 2. Koľko rôznych zoradení kariet vie Paľko vytvoriť, aby splnil túto podmienku?

Výsledok: 2

Riešenie: Všimnime si, že pre karty 3 a 4 máme iba jednu kartu s hodnotou líšiace sa o viac ako 2. Pre 3 je to 6 a pre 4 je to 1. Karty 3 a 4 kvôli tomuto môžu mať vedľa seba iba jednu ďalšiu kartu, čo nastane, len ak ich položíme na začiatok alebo koniec celého radu. Čiže možné zoradenia musia vyzeráť takto:

3					4
4					3

Navyše vieme, ktoré karty musia byť vedľa 3 a 4, čiže môžeme doplniť zoradenia ako:

3	6			1	4
4	1			6	3

Zostávajú nám iba čísla 2 a 5. Vidíme, že v oboch zoradeniach je iba jedna možnosť, ako ich vieme uložiť na prázdne políčka. Dostávame tak zoradenia 3, 6, 2, 5, 1, 4 a 4, 1, 5, 2, 6, 3 ako jediné 2 možnosti, ktoré spĺňajú danú podmienku.

3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3

Úloha 4 ... Tréning medzi brezami

Danka a Janka bežia po brezovej ulici, kde je vysadených 10 briez. Vzdialenosti medzi každými dvoma susednými brezami sú rovnaké. Danka začne bežať pri 1. breze a pokračuje nasledovne: beží k 2. breze a naspäť k 1. breze, potom k 3. breze a naspäť k 1. breze, potom k 4. breze a naspäť k 1. breze, a tak ďalej, až kým nakoniec neprebehne k 10. breze a naspäť k 1. breze.

Janka robí niečo podobné, ale začína pri 10. breze a beží k 9. breze a naspäť k 10. breze, potom k 8. breze a naspäť k 10. breze, a tak ďalej, až kým nakoniec neprebehne k 1. breze a naspäť k 10. breze.

Obe dievčatá bežia rovnakou rýchlosťou a začnú bežať v ten istý moment. Koľkokrát sa počas tohto behu stretnú?

Výsledok: 10

Riešenie: Keďže dievčatá bežia rovnakou rýchlosťou, dostať sa k 2. breze bude Danke trvať rovnako dlho, ako bude Janke trvať dostať sa k 9. breze. Toto bude platiť aj pre všetky nasledujúce brezy – dievčatá budú naraz pri 3. a 8. breze, naraz pri 4. a 7. breze, naraz pri 5. a 6. breze, atď. Avšak, keď už nastane situácia, že Danka zrovna beží k breze s vyšším číslom ako Janka, stretnú sa po prvý raz. Preto kým je Danka na ceste k 6. breze a Janka na ceste k 5. breze, stretnú sa prvýkrát. Navyše sa Danka a Janka stretnú ešte raz počas cesty naspäť od týchto briez. Keďže od tohto momentu bude Danka vždy bežať k breze s vyšším číslom ako Janka, dievčatá sa stretnú dvakrát pre každú ďalšiu brezu, ku ktorej pôjdu. Dokopy je takýchto briez 5 (pre Danku 6. až 10. breza, pre Janku 5. až 1. breza), čiže sa dokopy stretnú $5 \cdot 2 = 10$ ráz.

Úloha 5 ... Vášnivý závodník

Samko je profesionálny vodič pretekárskeho auta. Keďže jeho auto hrdo nosí číslo 181, snaží sa Samko zachytiť všetky momenty, kedy jeho auto prešlo počet kilometrov, ktorý je násobkom čísla 181. Dnes Samko začal šoférovať, keď auto ukazovalo 32 768 najjazdených kilometrov. To je o 7 kilometrov viac ako minulý násobok čísla 181 (ktorý je 32 761). Samko chce teraz šoférovať auto tak, aby moment, keď auto najbližšie ukáže počet kilometrov, ktorý je násobkom čísla 181, nastal o presne 2 hodiny. Aká musí byť Samkova priemerná rýchlosť v kilometroch za hodinu, aby sa mu to podarilo?

Výsledok: 87

Riešenie: Vieme, že rozdiel medzi každými dvoma nasledujúcimi násobkami n je n . Teda rozdiel medzi dvoma nasledujúcimi násobkami 181 je 181. V zadaní je napísané, že minulý násobok čísla 181 bol 7 kilometrov dozadu. Nasledujúci násobok čísla 181 tak bude o $181 - 7 = 174$ kilometrov. Vieme, že Samko chce prejsť týchto 174 kilometrov za presne 2 hodiny. Jeho priemerná rýchlosť počas týchto dvoch hodín preto musí byť $v = \frac{174 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 87 \text{ km/h}$.

Úloha 6 ... Meta klamár

Matko má obľúbené číslo. Vytvoril šesť výrokov o tomto čísle a každému výroku priradil číslo. Tri z týchto výrokov boli pravdivé a tri boli nepravdivé. Tieto výroky sú:

1. Je to zložené číslo.
2. Je to nepárne číslo.
4. Je to číslo menšie ako 30.
8. Je to jednociferné číslo.
16. Na mieste jednotiek má toto číslo cifru 9.
32. Je deliteľné číslom 5.

Matko hovorí, že jeho obľúbené číslo je súčtom čísel priradených tým trom tvrdeniam, ktoré sú pravdivé. Aké je Matkovo obľúbené číslo?

Výsledok: 35

Riešenie: Pozrime sa najprv na prvý výrok. Predpokladajme, že je nepravdivý. To by znamenalo, že Matkovo číslo je buď 1, alebo prvočíslo. Keďže priradené čísla sú kladné a súčet troch kladných celých čísel nikdy nie je 1, Matkovo obľúbené číslo nie je 1. Takže musí byť prvočíslo. Avšak, muselo by tiež byť súčtom troch z čísel 2, 4, 8, 16, 32. Tie sú však všetky párne, rovnako teda bude párny aj ich súčet. Tento súčet prirodzene nemôže byť 2, čiže tento súčet bude párne číslo, ktoré nie je prvočíslo. Tým sme dostali spor, čo znamená, že prvý výrok je určite pravdivý.

Prvé tvrdenie je jediné tvrdenie, ktorého číslo je nepárne. Z tohto dôvodu bude aj súčet troch pravdivých tvrdení nepárny, čiže druhé tvrdenie musí byť pravdivé. Ostáva už len nájsť aj tretie pravdivé tvrdenie. Pozrime sa na tvrdenie s číslom 4. Ak by bolo tretím pravdivým tvrdením, Matkovo obľúbené číslo by bolo $1 + 2 + 4 = 7$. Ale v takom prípade by bolo pravdivé aj tvrdenie číslo 8, takže by sme mali štyri pravdivé tvrdenia. Taká situácia nemôže nastať, čiže tvrdenie číslo 4 musí byť nepravdivé. Matkovo obľúbené číslo tak musí mať hodnotu aspoň 30. Jediný spôsob, ktorým vieme toto docieľiť, je, že výrok číslo 32 bude pravdivý. To by spôsobilo, že obľúbené číslo by bolo $1 + 2 + 32 = 35$.

Je jednoduché skontrolovať, že pre číslo 35 sú pravdivé práve tie tvrdenia s číslami 1, 2 a 32. Teda číslo 35 je naozaj Matkovo obľúbené číslo.

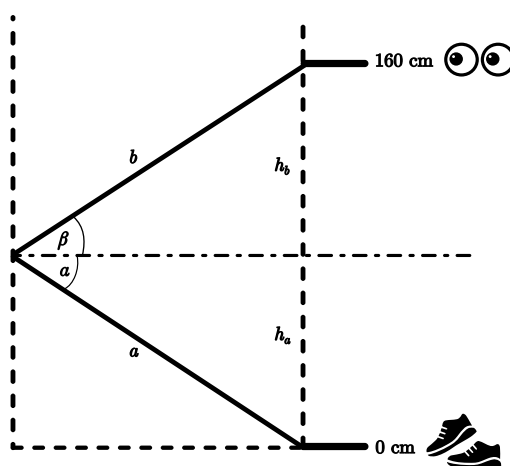
Úloha 7 ... Elegantný problém

Miško je veľmi elegantný. Preto je preňho veľmi dôležité, aby pri skúšaní svojho oblečenia videl aj na svoje topánky. Kúpil si teda nové obdĺžnikové zrkadlo, ktoré chce teraz zavesiť na stenu takým spôsobom, aby v ňom videl svoje topánky stojac vo vzdialenosti 120 cm od zrkadla. Jeho oči sú vo výške 160 cm nad zemou. Uvažujte, že jeho topánky sú vo výške 0 cm. Aká je najvyššia možná výška nad zemou v centimetroch, v ktorej môže byť spodná hrana zrkadla?

Poznámka: Uvažujte, že zrkadlo nemá rám.

Výsledok: 80

Riešenie: Vieme, že musí existovať taký lúč svetla, ktorý prejde z Miškových topánok k zrkadlu takým spôsobom, že sa odrazí do Miškových očí vo výške 160 cm. Musíme si uvedomiť, že aj Miškove nohy, aj jeho oči sú v rovnakej vodorovnej vzdialenosti od zrkadla. Taktiež si spomeňme, že keď lúč dopadne na plochu zrkadla, uhol jeho dopadu sa bude rovnať uhlu jeho odrazu. Môžeme teda nakresliť takýto obrázok:



Uhly α a β sú zhodné. Preto aj vzdialenosti a a b budú zhodné. Dôležitejšie však je, že výšky h_a a h_b , ktoré lúč nastúpa, budú zhodné. Kvôli tomu bude miesto, kde sa lúč odrazí od zrkadla, presne v strede medzi Miškovými topánkami a Miškovými očami. Keďže jeho oči sú vo výške 160 cm, odraz nastane vo výške $\frac{160 \text{ cm}}{2} = 80 \text{ cm}$. Teda najvyššia výška, v ktorej môže byť spodná hrana zrkadla, je tiež 80 centimetrov nad zemou. Ak by bola akokoľvek vyššia, lúč by sa vo výške 80 centimetrov nemal od čoho odraziť a Miško by v zrkadle nevidel svoje topánky.

Úloha 8 ... Magický trik 2

Paľko chce znova predviesť kamarátom magický trik s jeho balíčkom s kartami očíslovanými 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Tentokrát si pripravil tabuľku 2×3 do ktorej tieto karty dokonale pasujú. Aby tento magický trik fungoval, potrebuje Paľko uložiť tieto karty do tabuľky takým spôsobom, že karty v každom riadku (zľava doprava) a v každom stĺpci (zhora nadol) budú vo vzostupnom poradí. Jedno takéto usporiadanie je znázornené na obrázku. Koľkými rôznymi spôsobmi vie Paľko uložiť karty do tabuľky, aby splnil danú podmienku?

1	2	5
3	4	6

Výsledok: 5

Riešenie: Zameralíme sa najprv na kartu v ľavom hornom rohu. Ku všetkým ostatným číslam v tabuľke sa vieme odtiaľto dostať buď posunom nadol, alebo doprava. Kvôli tomuto musia mať všetky ostatné karty v tabuľke číslo väčšie ako táto karta. To spôsobuje, že číslo karty v ľavom hornom rohu musí byť 1. Podobnými úvahami sa dopracujeme k tomu, že v pravom dolnom rohu tabuľky musí byť číslo 6.

1		
		6

Teraz sa zamyslíme nad tým, kam vieme položiť číslo 2. Musí to byť nejaké políčko vedľa karty číslo 1 (inak by sme potrebovali políčko s kartou s hodnotou medzi číslami 1 a 2, no takú kartu nemáme). Teda máme len dva prípady, ako vieme položiť kartu s číslom 2:

Prípád 1. Číslo 2 je napravo od čísla 1. V tomto prípade máme tri možnosti, aká karta môže byť napravo od karty 1 (môžu to byť karty 3, 4 alebo 5). Pre každú z týchto troch kariet nám ostane iba jeden spôsob, ktorým vieme poukladať karty do ostatných políčok.

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

Prípád 2. Číslo 2 je pod číslom 1. V tomto prípade máme opäť tri možnosti na to, akú kartu položíme napravo od čísla 2. Zvyšné políčka vieme opäť zaplniť len jedným spôsobom, avšak nie v každom prípade dostaneme validné riešenie (ak je napravo od čísla 2 číslo 3, nedostávame validné riešenie – druhý stĺpec bude mať v hornom riadku väčšie číslo ako v spodnom).

1	4	5
2	3	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

Ostáva už len sčítať počet možností z oboch prípadov. Našli sme $3 + 2 = 5$ možností, ktorými sa dajú karty uložiť do tabuľky požadovaným spôsobom.

Úloha 9 ... Miestne satelity

NASA vypustila dva satelity, Alfréda a Betku. Z praktických dôvodov boli oba vystrelené priamo nad Greenwich. Boli vypustené v presne ten istý moment presne tým istým smerom, avšak v rozdielnych výškach. To spôsobuje, že aj keď oba opisujú kruhovú trajektóriu okolo Zeme, ich uhlová rýchlosť je rôzna. Alfréd sa hýbe s uhlovou rýchlosťou 90° za hodinu, zatiaľ čo Betka sa hýbe s uhlovou rýchlosťou 120° za hodinu. Po koľkých hodinách po vypustení sa budú Alfréd a Betka prvýkrát znova nachádzať nad rovnakým miestom na Zemi (možno iným ako Greenwich)?

Výsledok: 12

Riešenie: Každú hodinu opíše Betka o $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ väčší uhol ako Alfréd. Toto sa bude diať každú hodinu, až pokiaľ Betka neopíše o presne 360° väčší uhol ako Alfréd – v tomto momente Betka prejde o jeden celý okruh okolo Zeme viac ako Alfréd, a teda sa znova nachádzajú jeden nad druhým. Keďže Betka na Alfréda získava uhol 30° každú hodinu, 360° naňho získava po presne $\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$ hodinách.

Úloha 10 ... Západná cesta

Každý na divokom západe miluje Západnú cestu, pretože je dokonale rovná bez akýchkoľvek zákrut. Keď isté dieťa menom Vilko kráčalo po tejto ceste, všimlo si zaujímavý jav: keď sa Vilko pozrel za seba, zbadal, že Slnko sa nachádza presne nad cestou rozprestierajúcou sa za ním. Keď sa pozrel naspäť dopredu, zbadal, že cesta sa náhle končí a priamo pred ním sú dva objekty, jeden hneď vedľa druhého. Bol tam úzky strom s výškou 3 m a billboard s výškou 2,4 m a šírkou 5 m otočený priamo k Vilkovi, pričom spodná hrana billboardu ležala na zemi. Vilko odmeral, že dĺžka tieňa stromu je 75 cm. Aká veľká je plocha tieňa, ktorú vrhá billboard, v metroch štvorcových?

Výsledok: 3

Riešenie: Keďže billboard je otočený priamo k slnku, šírka jeho tieňa ostane rovnaká ako pôvodná šírka billboardu, teda 5 m. Jeho výška sa však zmení. Vieme, že výška stromu vedľa billboardu sa zmenila z 3 m na 0,75 m. Teda pomer medzi výškou stromu a dĺžkou jeho tieňa je $\frac{3}{0,75} = \frac{4}{1}$. Tento pomer bude rovnaký aj pre tieň billboardu, dĺžka jeho tieňa preto bude $\frac{2,4 \text{ m}}{4} = 0,6 \text{ m}$. Celková plocha tieňa bude jeho dĺžka krát jeho výška, teda $0,6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$.

Úloha 11 ... Globálne otepľovanie

Jedného dňa Janko povedal: „V rúre na pečenie je tak horúco, že ak by som bol v USA, bolo by v nej dvakrát tak horúco.“ Myslel tým, že momentálna teplota v rúre meraná v stupňoch Fahrenheita by bola dvakrát tak veľká ako táto teplota meraná v stupňoch Celzia. Aká bola teplota v rúre v stupňoch Celzia?

Poznámka: Ak je teplota v stupňoch Celzia $N^\circ\text{C}$, potom teplota v stupňoch Fahrenheita je

$$\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}.$$

Výsledok: 160

Riešenie: Označme si teplotu v stupňoch Celzia $N^\circ\text{C}$. Vieme, že ekvivalentnú teplotu v stupňoch Fahrenheita vieme nájsť ako $\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) ^\circ\text{F}$. Avšak vieme, že toto číslo by malo byť dvakrát tak veľké, ako teplota v stupňoch Celzia, teda $2N^\circ\text{F}$. Teda môžeme napísať rovnicu $\left(\left(\frac{9}{5} \cdot N \right) + 32 \right) = 2N$. Rovnicu môžeme preusporiadať ako:

$$2N - \frac{9}{5} \cdot N = 32.$$

Odtiaľ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \cdot N &= 32, \\ N &= 160. \end{aligned}$$

Teplota v rúre bola 160°C .

Úloha 12 ... Pomalé začiatky

Na šestnásté narodeniny dostal Matúš ako darček knihu. Už je to nejaký čas, odkedy Matúš naposledy čítal, preto vie, že mu to chvíľku potrvá, kým sa do toho zcela dostane. Preto vytvoril špeciálny plán, ako prečíta celú knihu: každý deň prečíta o jednu stranu viac ako prečítal minulý deň, začínajúc tým, že prvý deň prečíta 1 stranu. Ak mala kniha 2024 strán, koľko dní bude Matúšovi trvať prečítať celú knihu?

Výsledok: 64

Riešenie: Po jednom dni bude mať Matúš prečítanú 1 stranu, po dvoch dňoch $1 + 2$ strany, po troch dňoch $1 + 2 + 3$ strany a tak ďalej. Teda po n dňoch bude mať prečítaných $1 + 2 + \dots + n$ strán. Ak použijeme vzorec zo vzorcovníka, vieme tento súčet zapísať ako $\frac{n(n+1)}{2}$. Otázka znie, aké je najmenšie možné n také, že $\frac{n(n+1)}{2}$ je aspoň 2024. Teda potrebujeme vyriešiť nerovnicu

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} &\geq 2024, \\ n(n+1) &\geq 4048.\end{aligned}$$

Môžeme odhadnúť, že pre $n = 60$ je súčin $n(n+1)$ približne 3600, takže n , ktoré hľadáme, je iba o čosi väčšie. A naozaj, vieme nájsť, že $63 \cdot 64 = 4032 \leq 4048$ a $64 \cdot 65 = 4160 \geq 4048$. Takže prečítať celú knihu bude Matúšovi trvať 64 dní.

Úloha 13 ... Všade samé palindrómy

Adam až tak veľmi miluje palindrómy, že začal hľadať také, ktoré sa dajú vytvoriť ako súčet ďalších palindrómov. Dnes sa snaží nájsť najväčší palindróm, ktorý je súčtom troch (nie nutne rozdielnych) 2-ciferných palindrómov. Aké číslo Adam nájde?

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa zľava doprava číta rovnako ako sprava doľava. Napríklad číslo 12321 je 5-ciferným palindrómom.

Výsledok: 242

Riešenie: Ako prvé sa pozrime na 2-ciferné palindrómy. Keďže sa majú čítať rovnako zľava doprava ako sprava doľava, musia pozostávať z dvoch rovnakých cifier. Teda 2-ciferné palindrómy budú čísla 11, 22, 33, ... až po 99. Všimnime si vlastnosť, ktorú všetky zdieľajú – všetky sú deliteľné 11. Preto keď sčítame 3 z týchto čísel, musí aj ich súčet byť deliteľný 11.

Najväčší možný súčet troch 2-ciferných palindrómov je $99 + 99 + 99 = 297$. Teda musíme ísť nadol od čísla 297 a hľadať prvý palindróm deliteľný 11. Prvé palindrómy, ktorých deliteľnosť číslom 11 budeme musieť skontrolovať budú 292, 282, 272... jednoducho čísla vo forme $2X2$, kde X je jednociferné číslo. Môžeme použiť pravidlo na deliteľnosť číslom 11, ktoré hovorí, že ciferný súčet na párnych miestach mínus súčet cifier na nepárnych miestach musí byť buď 0, alebo násobok 11. Idúc nadol od 292, prvý taký palindróm je 242, kde $4 - (2 + 2) = 0$. Už len ostáva nájsť také tri 2-ciferné palindrómy, ktoré keď sčítame, tak naozaj dostaneme 242 – zistíme, že to sú napríklad $77 + 77 + 88 = 242$.

Úloha 14 ... Najlepší croissant

Lucka veľmi rada raňajkuje croissanty. Avšak, ako pravý gastronóm, zo všetkých príchutí si chce vybrať tú najkvalitnejšiu. Rozhodla sa, že croissant je tým kvalitnejší, čím má väčšiu priemernú hustotu, preto momentálne experimentuje a snaží sa nájsť priemernú hustotu každej príchute croissantov. Práve teraz experimentuje s čokoládovým croissantom. Zistila, že objem celého croissantu je 100 ml, z čoho 15 ml je čokoládová náplň. Hustota tejto náplne je 1200 kg/m^3 , zatiaľ čo hustota croissantového cesta je 800 kg/m^3 . Aká je priemerná hustota čokoládového croissantu v kg/m^3 ?

Výsledok: 860

Riešenie: Priemerná hustota telesa sa dá nájsť ako jeho celková hmotnosť predelená jeho celkovým objemom. Vieme, že celkový objem croissantu je $V_{celk} = 100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3$, čiže stačí nájsť jeho celkovú hmotnosť. Tú zistíme ako súčet hmotností cesta a náplne. Pre hmotnosti týchto častí použijeme jednoducho vzorec $m = \rho \cdot V$, kde ρ je hustota a V je objem. Avšak musíme si dať pozor na správne jednotky. Použijeme hodnoty $15 \text{ ml} = 15 \text{ cm}^3$ pre objem náplne (V_n) a $100 \text{ ml} - 15 \text{ ml} = 85 \text{ ml} = 85 \text{ cm}^3$ pre objem cesta (V_c). Teda musíme dať dve zadané hodnoty hustôt do korešpondujúcich jednotiek, čo je $1200 \text{ kg/m}^3 = 1,2 \text{ g/cm}^3$ pre hustotu náplne (ρ_n) a $800 \text{ kg/m}^3 = 0,8 \text{ g/cm}^3$ pre hustotu cesta (ρ_c). Teraz môžeme nájsť celkovú hmotnosť croissantu ako

$$\begin{aligned} m_{celk} &= m_n + m_c, \\ &= \rho_n \cdot V_n + \rho_c \cdot V_c, \\ &= 1,2 \text{ g/cm}^3 \cdot 15 \text{ cm}^3 + 0,8 \text{ g/cm}^3 \cdot 85 \text{ cm}^3, \\ &= 18 \text{ g} + 68 \text{ g}, \\ &= 86 \text{ g}. \end{aligned}$$

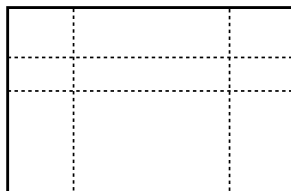
Teraz môžeme jednoducho nájsť priemernú hustotu ako celkovú hmotnosť predelenú celkovým objemom

$$\rho_{priemer} = \frac{m_{celk}}{V_{celk}} = \frac{86 \text{ g}}{100 \text{ cm}^3} = 0,86 \text{ g/cm}^3.$$

Keďže máme zadať odpoveď v jednotkách kg/m^3 , správnou odpoveďou je 860 kg/m^3 .

Úloha 15 ... Záhradníckovo dedičstvo

Adam je záhradník. Vlastní záhradu obdĺžnikového tvaru s obvodom 16 m. Chce, aby sa o túto záhradu starali jeho synovia, preto ju rozdelil na 9 obdĺžnikových častí ako na obrázku (prerušované čiary reprezentujú hranice medzi jednotlivými časťami). Aký je súčet obvodov všetkých 9 častí v metroch?

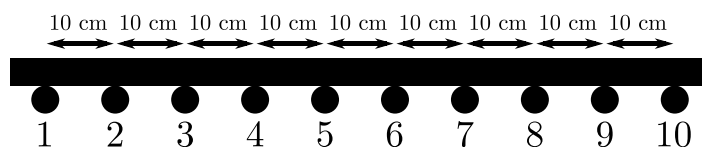


Výsledok: 48

Riešenie: Vieme, že obvod veľkého obdĺžnika je 16 m, súčet dĺžok všetkých plných čiar je preto 16 m. Keď sa pozrieme na prerušované čiary, zbadáme, že ich vieme preusporiadať tak, aby sme vytvorili rovnaký obdĺžnik ako ten pôvodný (vytvorený z plných čiar). Preto súčet dĺžok prerušovaných čiar bude rovnaký ako súčet dĺžok všetkých plných čiar, teda tiež 16 m. Teraz je otázka, koľkokrát použijeme ktoré čiary pri sčítavaní všetkých 9 obvodov. Každá plná čiara bude použitá práve raz, keďže každá časť každej plnej čiar patrí práve jednému zo všetkých 9 obvodov. Avšak prerušované čiary sú vždy medzi dvoma časťami, preto každá časť každej prerušovanej čiar bude patriť až dvom z 9 obvodov. Teda vieme, že každá prerušovaná čiara bude použitá dvakrát a každá plná čiara bude použitá raz. Dokopy teda použijeme celý obvod pôvodného obdĺžnika $2 + 1 = 3$ razy, teda odpoveď je $3 \cdot 16 \text{ m} = 48 \text{ m}$.

Úloha 16 ... Padá polička, niečo si praj

Bob staviteľ postavil poličku. Tá pozostávala z 1 meter dlhej homogénnej dosky podloženej 10 klineciami, pričom každé dva susedné klince boli vzdialené 10 centimetrov. Bob očísloval tieto klince zľava doprava číslami od 1 do 10 tak, ako je znázornené na obrázku. O niekoľko dní si Bob uvedomil, že použiť na toto 10 klineciov je pletvanie klineciami. Rozhodol sa preto, že nejaké klince odstráni. Teraz uvažuje: aký je najmenší možný súčin čísel ostávajúcich klineciov tak, aby doska nespadla?



Výsledok: 6

Riešenie: Aby doska nespadla, musí jej ťažisko ležať medzi dvoma klincami. Inými slovami, jeden kliniec musí byť naľavo od ťažiska a jeden kliniec musí byť napravo od ťažiska. Ťažisko dosky leží medzi klincami 5 a 6, čiže z minulej vety môžeme usúdiť, že musíme mať aspoň jeden kliniec s číslom najviac 5 a aspoň jeden kliniec s číslom aspoň 6. Aby sme dostali najmenší možný súčin, musíme na oboch častiach nechať len ten najmenší možný kliniec. Teda necháme kliniec číslo 1 z prvej spomenutej časti a kliniec 6 z druhej spomenutej časti.

Ak použijeme iba tieto dva klince, ťažisko bude ležať medzi nimi a teda doska nespadne. Najmenší možný súčin čísel ostávajúcich klinec teda bude 6.

Úloha 17 ... Pre štatistikov

Kubo sa učí štatistiku. Naučil sa niekoľko nových pojmov. Naučil sa, že v danom súbore dát je modus číslo, ktoré sa v súbore vyskytuje najčastejšie. Medián je zasa číslo, ktoré sa nachádza v strede súboru dát, ak súbor usporiadame vo vzostupnom poradí. Napríklad pre súbor dát 2, 7, 20, 6, 2 je modus rovný 2 a medián je rovný 6.

Kubo má súbor dát, ktorý obsahuje čísla 8, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5 a ďalšie tri (nie nutne rozdielne) celé čísla, ktoré zabudol. Pamätá si len, že medián bol 4 a že modus bol jedinečný (v celom súbore dát bol iba jeden modus) a bol tiež 4. Aká je najväčšia možná hodnota aritmetického priemeru čísel v tomto súbore dát? Odpovedzte zlomkom v základnom tvare.

Výsledok: 5

Riešenie: Vieme, že bol iba jeden modus: 4. Kvôli tomu musí byť počet čísel 4 v tomto súbore dát väčší ako počet akéhokoľvek iného čísla. Z čísel, o ktorých vieme, je najviac čísel 3 a 5, obe sú v súbore dát dva razy. Kvôli tomu musí byť číslo 4 v súbore dát aspoň tri razy, avšak momentálne tam je iba raz. Preto z tých troch neznámych celých čísel, ktoré Kubo zabudol, musia aspoň dve byť čísla 4.

Teda už poznáme hodnoty 10 z 11 čísel v súbore dát. Pozrime sa teraz na druhú podmienku: medián má byť tiež 4. Keď zoradíme 10 známych čísel vo vzostupnom poradí, dostaneme: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Potom ako pridáme jedenáste číslo, stredné číslo v rade má byť 4. Stred celého radu je momentálne medzi číslami 4 a 5, preto ak by bolo jedenáste číslo 5 alebo väčšie, stredným číslom (a teda mediánom) by sa stalo číslo 5, čo nespĺňa podmienku. Aby bola splnená, jedenáste číslo teda musí byť 4 alebo menšie. Keďže chceme, aby bol aritmetický priemer všetkých týchto čísel čo najväčší, vyberieme najväčšie takéto číslo, teda vyberieme ďalšie číslo 4. Teraz poznáme všetkých jedenásť čísel v súbore: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 8, 9. Ich aritmetický priemer je ich súčet predelený ich počtom, čo nám dáva $\frac{55}{11} = 5$.

Úloha 18 ... Veľké sťahovanie

Šimon a Barborka sa chcú stretnúť. Šimon chcel Barborku prekvapiť, preto nastúpil do svojho auta a začal šoférovať po ceste k Barborkinmu domu rýchlosťou 30 km/h. Ale kým šoféruje, preruší ho zvonenie mobilu. Barborka mu volá, aby sa ho spýtala, ako sa má! Šimon nemá na výber a musí sa priznať, že k nej práve ide. Barborku to veľmi potešilo a chce Šimona stretnúť čo najskôr, preto nastúpila do svojho auta a začala šoférovať po ceste smerom k nemu rýchlosťou 90 km/h. Zo svojho domu vyrazila v ten moment, keď bol Šimon zrovna v polovici trasy medzi jej a jeho domom. Šťastne sa stretli presne 1 hodinu po tom, ako Šimon vyrazil. Aká je vzdialenosť medzi Barborkiným a Šimonovým domom v kilometroch?

Výsledok: 48

Riešenie: Označme si celkovú vzdialenosť medzi domami s , vzdialenosť prejdenú Šimonom s_{si} a vzdialenosť prejdenú Barborkou s_{ba} . Všimnime si, že $s = s_{si} + s_{ba}$, takže aby sme našli s , stačí nám nájsť jednotlivé

vzdialenosti prejdenej Šimonom a Barborkou. Ako prvé môžeme jednoducho nájsť s_{si} pomocou vzorca $v = \frac{s}{t}$, preusporiadaného ako $s = v \cdot t$ kde v je rýchlosť a t je čas. Teda

$$s_{si} = v_{si} \cdot t_{si} = 30 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 30 \text{ km}.$$

Stále však potrebujeme nájsť s_{ba} , aby sme určili s . Vyjadriť si preto čas, ktorý Šimonovi trvalo dostať sa do polovice vzdialenosti s , pomocou s . Z $t = \frac{s}{v}$ môžeme určiť, že prejsť $\frac{s}{2}$ Šimonovi idúcemu rýchlosťou 30 km/h trvalo

$$t = \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s}{2 \cdot 30 \text{ km/h}} = \frac{s}{60 \text{ km/h}}.$$

Pomocou tohto môžeme vyjadriť aj čas, počas ktorého cestovala Barborka (t_{ba}): bude to 1 hodina mínus tento čas. Preto: $t_{ba} = 1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}$. Teraz môžeme vyjadriť vzdialenosť prejdenuj Barborkou s_{ba} ako

$$s_{ba} = v_{ba} \cdot t_{ba} = 90 \text{ km/h} \cdot \left(1 \text{ h} - \frac{s}{60 \text{ km/h}}\right) = 90 \text{ km} - \frac{90 \text{ km/h} \cdot s}{60 \text{ km/h}} = 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s.$$

Teraz, keď poznáme hodnotu s_{si} a vyjadrili sme s_{ba} pomocou s , môžeme vypočítať celkové s ako:

$$\begin{aligned} s &= s_{si} + s_{ba}, \\ s &= 30 \text{ km} + 90 \text{ km} - \frac{3}{2} \cdot s, \\ \frac{5}{2} s &= 120 \text{ km}, \\ s &= 48 \text{ km}. \end{aligned}$$

Vzdialenosť medzi Barborkiným a Šimonovým domom je teda 48 km.

Úloha 19 ... Dvakrát meraj a raz počítaj

Keď sa Tomáš nudí, píše čísla na tabuľu. Najprv napísal dvojku, potom napísal 2 dvojky, potom 3 dvojky, potom 4 dvojky, až kým nakoniec na tabuľu napísal 2024 dvojok. Potom sa rozhodol vynásobiť všetky dvojky na tabuli. Aká je posledná cifra súčinu, ktorý dostane?

Výsledok: 6

Riešenie: Potrebujeme spočítať poslednú cifru súčinu

$$(2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{2024\text{-krát}}.$$

Keďže nás zaujíma iba posledná cifra celého súčinu, môžeme k tejto úlohe pristupovať tak, že vynásobíme posledné cifry súčinov v týchto zátvorkách.

Začnime vypísaním si niekoľkých súčinov, ktoré budú v prvých zátvorkách:

$$\begin{aligned} &2, \\ &2 \cdot 2 = 4, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128, \\ &2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256, \dots \end{aligned}$$

Všimnime si, že sa v tejto postupnosti čísel dookola opakujú tie isté posledné cifry: 2, 4, 8, 6. Poslednú cifru hľadaného súčinu teda dostaneme pomocou opakovaného násobenia týchto posledných cifier: $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \dots$. Ak si vypíšeme posledné cifry medzikrokov tohto súčinu, dostaneme nasledovnú postupnosť: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, 8, 4, 4, 8, 2, $\dots$. Všimnime si, že opäť existuje opakujúca sa postupnosť cifier: 8, 4, 4, 8, 2, 6, 6, 2, tentokrát dlhá 8. Posledná cifra celého súčinu teda bude jedna z cifier v tejto postupnosti. Keďže máme dokopy 2023 násobení medzi 2024 zátvorkami, môžeme 2023 predeliť číslom 8 (dĺžkou opakujúcej sa postupnosti) a zvyšok po tomto delení nám povie, kde v rámci spomínanej postupnosti skončíme po vynásobení všetkých čísel. $2023 : 8 = 252$, zvyšok 7, teda posledná cifra súčinu je 6, pretože to je siedma cifra postupnosti, ktorú sme našli.

Úloha 20 ... Lotéria v rádiu

Istá rádiová stanica organizuje každý deň tombolu. Každý môže poslať SMS na jedno konkrétne telefónne číslo, aby bol zaradený do losovania. Včera dávala každá SMS 1 žreb do tomboly s jedným výhercom. Dnes spravilo rádio špeciálnu akciu a každá SMS dáva 30 žrebov. Janko poslal 1 SMS včera a 1 SMS dnes. Ak organizátori tomboly dostali v oba dni rovnaký počet SMS, koľkonásobne väčšia je Jankova šanca, že vyhrá tombolu dnes, v porovnaní s tým, aká bola jeho šanca, že ju vyhrá včera?

Výsledok: 1

Riešenie: Do dnešnej tomboly dostal Janko 30-krát viac žrebov ako včera. Keďže však každý dostal 30-krát viac žrebov, je aj celkový počet žrebov 30-krát väčší. Preto, aj keď Janko má v tombole 30-krát viac žrebov, jeho žreby tvoria rovnakú časť všetkých zaradených žrebov, ako tvorili včera. Teda pravdepodobnosť Jankovej výhry musí byť rovnaká, ako bola včera. Inými slovami, je 1-krát väčšia.

Úloha 21 ... Odpor k odporom

Matko je veľmi odporný. Vie odporovať aj čítaniu o elektrine. Minule sa dočítal, že ak vytvorí drôt s dĺžkou ℓ a plochou prierezu S z materiálu s merným elektrickým odporom ρ , odpor takéhoto drôtu bude $R = \frac{\rho \ell}{S}$. Rozhodol sa to vyskúšať. Vyrobil medený drôt s odporom R . Potom drôt roztavil a využil všetku túto roztavenú meď na vytvorenie nového drôtu, ktorého polomer bol tretinou polomeru pôvodného drôtu. Odpor tohto nového drôtu je kR . Vypočítajte hodnotu k .

Výsledok: 81

Riešenie: Polomer nového drôtu je tretinou polomeru pôvodného drôtu. Keďže plocha kruhu je priamo úmerná druhej mocnine polomeru, plocha prierezu nového drôtu musí byť $S' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$. Objem drôtu sa nemohol zmeniť, čiže zmena prierezu na jednu deväťtinu spôsobí, že dĺžka drôtu sa musela zvýšiť na $\ell' = 9\ell$. Merný elektrický odpor je vlastnosť látky (v tomto prípade medi), preto musela ostať rovnaká. Teraz môžeme vypočítať, že odpor nového drôtu je

$$R' = \frac{\rho \ell'}{S'} = \frac{\rho \cdot 9\ell}{\frac{1}{9}S} = 81 \frac{\rho \ell}{S} = 81R.$$

Z tohto vidíme, že odpor nového drôtu je 81-krát väčší ako odpor pôvodného drôtu, čiže hodnota k je 81.

Úloha 22 ... Dresy prané v dreze

Tomáš perie dresy svojho futbalového tímu, ale keďže nemá práčku, tak ich perie ručne v dreze. Jeho tím používa 75 dresov, na ktorých je 75 po sebe idúcich kladných celých čísel. Včera ich vyvesil sušiť na šnúru tak, aby viseli vo vzostupnom poradí. Pri vešaní si povšimol, že súčet čísel na posledných 5 dresoch bol presne 6-krát väčší ako súčet čísel na prvých 5 dresoch. Aké číslo je na drese, ktorý visí presne v strede?

Výsledok: 49

Riešenie: Označme číslo dresu, ktorý visí úplne v strede ako x . Pred týmto dresom je $\frac{75-1}{2} = 37$ dresov a tiež aj za ním je 37 dresov. Prvých päť dresov má čísla $x - 37, x - 36, x - 35, x - 34$ a $x - 33$, kým posledných päť dresov má čísla $x + 33, x + 34, x + 35, x + 36$ a $x + 37$. Podmienka zo zadania potom vedie na rovnicu

$$\begin{aligned}(x + 33) + (x + 34) + (x + 35) + (x + 36) + (x + 37) &= 6((x - 37) + (x - 36) + (x - 35) + (x - 34) + (x - 33)), \\5x + 175 &= 6(5x - 175), \\5x + 175 &= 30x - 1050, \\25x &= 1225, \\x &= 49.\end{aligned}$$

Na drese v strede je preto číslo $x = 49$.

Úloha 23 ... Zdravý prášok

Maťa si pripravuje zdravú desiату, na ktorú potrebuje banány. Kúpila si zopár banánov, ktoré obsahujú 75 % vody, a rozhodla sa ich vysušiť. Polovicu z nich sa rozhodla vysušiť teplom, čím znížila podiel vody v nich na 25 %. Druhú polovicu sa rozhodla vysušiť mrazom, čím znížila obsah vody na 10 %. Napokon obe dávky rozdrvila na prášok a tieto prášky zmiešala. Akú časť tohto prášku tvorí voda? Odpovedajte zlomkom v základnom tvare.

Výsledok: $\frac{2}{11}$

Riešenie: Označme m celkovú hmotnosť banánov. Vieme, že obsahujú $\frac{3}{4}m$ vody a $\frac{1}{4}m$ sušiny. Takže každá polovica banánov obsahuje $\frac{1}{8}m$ sušiny. V banánoch sušených teplom tvorí sušina 75 % vysušených banánov, takže tieto banány teraz vážia $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{1}{6}m$ a voda v nich váži $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}m = \frac{1}{24}m$. Podobne banány sušené mrazom teraz vážia $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{5}{36}m$ a voda v nich váži $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{36}m = \frac{1}{72}m$.

Celková hmotnosť práškov je $\frac{1}{6}m + \frac{5}{36}m = \frac{11}{36}m$, z ktorej $\frac{1}{24}m + \frac{1}{72}m = \frac{1}{18}m$ tvorí voda. Takže podiel vody vo výslednom prášku je

$$\frac{\frac{1}{18}m}{\frac{11}{36}m} = \frac{2}{11}.$$

Úloha 24 ... Skákanie vo výťahu

Karol váži 75 kg a za normálnych okolností vie vyskočiť do výšky 1 m. Jedného dňa si zobral váhu do veľkého výťahu. Zistil, že na začiatku pohybu výťahu smerom nadol mu váha ukazuje, že váži iba 60 kg. Do akej najväčšej výšky nad podlahu výťahu v metroch vie Karol vyskočiť na začiatku pohybu tohto výťahu?

Výsledok: 1,25

Riešenie: Pri výskoku Karol získava energiu. Aby Karol s hmotnosťou $m = 75$ kg vyskočil do výšky $h_0 = 1$ m, potrebuje získať energiu $E = mgh_0$. Čo sa ale zmení v pohybujúcom sa výťahu? Váha ukáže Karolovi nižšiu hmotnosť, lebo tiažové zrýchlenie sa zmenilo. Nech je nové tiažové zrýchlenie g' . Preto Karol pôsobí na váhu silou $F_G = mg'$. Avšak váha ukáže hmotnosť $m' = 60$ kg, lebo si „myslí“, že všetko sa deje akoby s klasickým tiažovým zrýchlením. Takže fakt, že ukazuje hmotnosť m' znamená, že na váhu pôsobí sila $m'g$. Ale touto silou je sila F_G , z čoho dostávame

$$\begin{aligned}mg' &= m'g, \\g' &= \frac{m'}{m}g.\end{aligned}$$

Vráťme sa teraz k skákaniu. Keďže sa zmenilo tiažové zrýchlenie, Karol tentoraz vyskočí do výšky h , no stále na to použije len energiu E . Tá sa zmení na potenciálnu energiu $E = m'g'h$. To znamená, že Karol vyskočí do výšky

$$\begin{aligned}mgh_0 &= m'g'h, \\h &= \frac{m}{m'}h_0 = \frac{75 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} \cdot 1 \text{ m} = 1,25 \text{ m}.\end{aligned}$$

Úloha 25 ... Vyhubenie čísla 3

Pre Petra je číslo 3 spojené iba s nešťastím (napríklad vždy nájde tri kosti v rybom jedle, v ktorom by nemali byť žiadne kosti), a tak sa rozhodol vymazať číslo 3 zo svojho života. Nepoužíva žiadne číslo, ktoré obsahuje cifru 3, a ani žiadne číslo, ktoré je deliteľné číslom 3. Koľko z čísel medzi 1 a 100, vrátane, Peter ešte stále používa?

Výsledok: 55

Riešenie: Spočítajme čísla, ktoré Peter nepoužíva. Násobky čísla 3 medzi 1 a 100 sú 3, 6, ..., 99, takže ich je $99 : 3 = 33$. Navyše máme 19 čísel, ktoré obsahujú cifru 3 (10 z nich ju má na mieste jednotiek, 10 z nich na mieste desiatok, ale číslo 33 sme tu započítali dvakrát). Peter nepoužíva žiadne číslo z týchto dvoch skupín. Lenže niektoré čísla sú v oboch skupinách, konkrétne čísla 3, 30, 33, 36, 39, 63, 93, ktoré potrebujeme započítať iba raz. Preto Peter nepoužíva $33 + 19 - 7 = 45$ čísel. Používa všetky ostatné čísla, takže používa $100 - 45 = 55$ čísel.

Úloha 26 ... Pozor, chodci!

Terka šofériuje auto s rýchlosťou 15 m/s. Vtom zbadá chodca na priechode pre chodcov. Terka má reakčný čas 1 s, po ktorom auto začne brzdiť konštantnou silou. Takto bude brzdná dráha auta dlhá 33 m. Koľko metrov by bola dlhá brzdná dráha auta, ak by Terka brzdila z rýchlosti 35 m/s?

Výsledok: 133

Riešenie: Označme v Terkinu rýchlosť. Odkedy Terka zbadala chodca, hýbe sa ešte $t_0 = 1$ s konštantnou rýchlosťou v , takže prejde vzdialenosť $s_1 = vt_0$. Potom začne brzdiť konštantnou silou F . Táto sila pôsobí na dráhe s_2 , takže vykoná prácu $W = Fs_2$. Túto prácu koná auto na úkor svojej vlastnej energie, takže sa zníži kinetická energia $E = \frac{1}{2}mv^2$ auta s hmotnosťou m . Auto zastaví, keď $Fs_2 = \frac{1}{2}mv^2$, takže odkedy auto začne brzdiť, tak zastane na dráhe

$$s_2 = \frac{mv^2}{2F}.$$

Zadanie nám hovorí, že keď Terka šoférovala s rýchlosťou $v_1 = 15$ m/s, jej brzdná dráha $s_1 + s_2$ bola $s = 33$ m. Pomocou tohto vieme vyjadriť neznámy výraz $\frac{m}{F}$ ako

$$s = v_1 t_0 + \frac{mv_1^2}{2F},$$

$$\frac{m}{F} = \frac{2(s - v_1 t_0)}{v_1^2}$$

a dosadiť ho do brzdnéj dráhy $s' = s'_1 + s'_2$ pre rýchlosť $v_2 = 35$ m/s, čím dostaneme

$$s' = v_2 t_0 + \frac{mv_2^2}{2F},$$

$$s' = v_2 t_0 + \frac{(s - v_1 t_0)v_2^2}{v_1^2} = 35 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} + \frac{(33 \text{ m} - 15 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s}) \cdot (35 \text{ m/s})^2}{(15 \text{ m/s})^2} = 133 \text{ m}.$$

To znamená, že Terkina brzdná dráha z rýchlosti $v_2 = 35$ m/s by bola $s' = 133$ m.

Úloha 27 ... Plávajúca podlaha

Organizátori každoročnej Aquatechno párty by na najbližšiu párty chceli mať na parkete skutočnú plávajúcu podlahu. Preto na jazero umiestnia kváder s výškou 10 cm a priemernou hustotou $0,6 \text{ g/cm}^3$, na ktorého hornej stene bude parket. Organizátori by chceli, aby tento kváder udržal na sebe objekty s celkovou hmotnosťou aspoň 4000 kg bez toho, aby sa celý potopil. Aký najmenší môže byť obsah tanečnej plochy parketu v metroch štvorcových, aby sa to organizátorom podarilo?

Výsledok: 100

Riešenie: Nazvime hľadaný obsah plochy parketu S , takže objem celého plávajúceho kvádra bude $V = S \cdot 10 \text{ cm}$. Keď sú na ňom objekty s hraničnou celkovou hmotnosťou, bude horná stena tohto kvádra na úrovni hladiny vody v jazere, takže objem jej ponorenej časti bude tiež V . Preto tento kváder vytlačí vodu s hmotnosťou $V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3$ a podľa Archimedovho zákona toto musí byť rovné hmotnosti kvádra, ktorý má navyše na sebe objekty s celkovou hmotnosťou 4000 kg . Táto hmotnosť bude $V \cdot 600 \text{ kg/m}^3 + 4000 \text{ kg}$. Porovnaním týchto dvoch hmotností dostávame rovnicu pre V s riešením $V = 10 \text{ m}^3$. Preto obsah plochy parketu musí byť $S = \frac{V}{0,1 \text{ m}} = 100 \text{ m}^2$.

Úloha 28 ... Stan

Lucy je na viacdnovej túre. Dnes večer si postavila stan, ktorým je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC . Aby si vysušila svoje oblečenie, natiahla v stane špagát, ktorý tvoril rovnostranný trojuholník DEF , pričom body D , E a F ležali postupne na stranách AB , BC a CA . Lucy zmerala, že $|\angle ADF| = 42^\circ$ a $|\angle EFC| = 24^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla EAC v stupňoch.

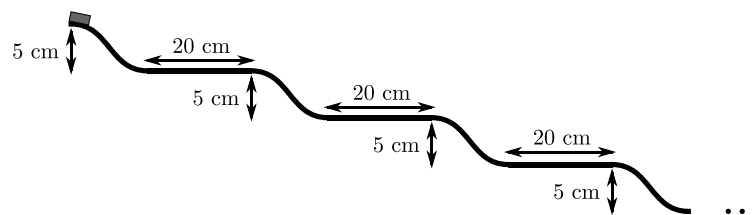
Výsledok: 12

Riešenie: Pozrime sa na uhly pri vrchole F . Vieme, že $|\angle EFC| = 24^\circ$ a keďže trojuholník DEF je rovnostranný, tak aj $|\angle DFE| = 60^\circ$. Preto $|\angle AFD| = 180^\circ - |\angle EFC| - |\angle DFE| = 180^\circ - 24^\circ - 60^\circ = 96^\circ$. V trojuholníku ADF teraz poznáme dva z uhlov, takže $|\angle DAF| = 180^\circ - |\angle ADF| - |\angle DFA| = 180^\circ - 42^\circ - 96^\circ = 42^\circ$. Teraz vidíme, že $|\angle DAF| = |\angle ADF|$, čo znamená, že trojuholník ADF je rovnoramenný, v ktorom $|AF| = |DF|$. Úsečka DF je stranou rovnostranného trojuholníka DEF , čo dáva $|DE| = |EF| = |FD|$. Z tohto vieme, že $|AF| = |EF|$, takže trojuholník AEF je rovnoramenný so základňou AE .

Už vieme, že $|\angle AFE| = |\angle AFD| + |\angle DFE| = 96^\circ + 60^\circ = 156^\circ$. Preto v rovnoramennom trojuholníku AEF vieme dopočítať, že $|\angle EAC| = |\angle EAF| = \frac{180^\circ - 156^\circ}{2} = 12^\circ$.

Úloha 29 ... Horúce kolesá

Nina sa hrá s autíčkom Horúcich kolies. Predstavme si autíčko ako kváder s hmotnosťou 60 g . Nina preň vytvorila dráhu, ktorá pozostávala zo striedajúcich sa šikmých a vodorovných častí. V šikmých častiach zišlo autíčko o 5 cm nadol, a to bez trenia. Vo vodorovných častiach prešlo vodorovnú vzdialenosť 20 cm , pričom trelo s koeficientom šmykového trenia $0,4$. Dráha začína šikmým úsekom a Nina na začiatku udelí autíčku rýchlosť 5 m/s . Aké je poradové číslo vodorovného úseku, na ktorom sa autíčko zastaví?



Výsledok: 42

Riešenie: Na šikmom úseku autíčko získava energiu, kým na vodorovnom úseku ju stráca. Preto sa autíčko zastaví na niektorom z vodorovných úsekov. Stane sa to v momente, keď energia autíčka klesne na 0 J .

Na začiatku je celková energia autíčka rovná súčtu jeho potenciálnej a kinetickej energie. Pre jednoduchosť predpokladajme, že potenciálna energia je na začiatku 0 J . Takže energia autíčka pozostáva čisto iba z jeho kinetickej energie, ktorá je $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, pričom $m = 60 \text{ g}$ je hmotnosť autíčka a $v_0 = 5 \text{ m/s}$ je jeho pôvodná rýchlosť.

Zakaždým, keď autíčko prejde šikmým úsekom, narastie mu energia o zmenu potenciálnej energie. Keďže pri tom zníži svoju výšku o $h_0 = 5 \text{ cm}$, tak získa energiu $E_{p0} = mgh_0$. Vo vodorovných častiach pôsobí trecia

sila $F_t = fmg$, kde $f = 0,4$ je koeficient šmykového trenia. Pôsobí na dráhe $s = 20$ cm, takže vykoná prácu $W = F \cdot s = fmg s$. Z tohto dôvodu klesne energia autíčka o W .

Po každej po sebe idúcej dvojici šikmého a vodorovného úseku klesne energia autíčka o $E_{p_0} - W = mgh_0 - fmg s$. Takže po n takýchto dvojiciach klesne energia o $n(E_{p_0} - W)$. Nás zaujíma najmenšie také n , že $E_0 - n(E_{p_0} - W) \leq 0$. Riešením tejto nerovnice dostávame

$$\begin{aligned} E_0 - n(E_{p_0} - W) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + n(mgh_0 - fmg s) &\leq 0, \\ \frac{1}{2}v_0^2 &\leq n(fgs - gh_0), \\ n &\geq \frac{v_0^2}{2g(fs - h_0)}, \\ n &\geq \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (0,4 \cdot 20 \text{ cm} - 5 \text{ cm})} = \frac{25}{0,6} = \frac{250}{6} \doteq 41,67. \end{aligned}$$

Takže autíčko sa zastaví na 42. vodorovnom úseku.

Úloha 30 ... Nostalgické starnutie

Samo práve oslávil svoje 37. narodeniny, a tak si napísal 2024-ciferné číslo $3737 \dots 37$, ktoré pozostávalo z 1012 cifier 3 a 1012 cifier 7. Nostalgicky spomína na časy, keď mal ešte len 21, a preto toto 2024-ciferné číslo vynásobil číslom 21. Napokon sa rozhodol spočítať ciferný súčet výsledného súčinu. Aké číslo Samo dostal?

Výsledok: 12 153

Riešenie: Ak máme šťastie, môžeme si všimnúť, že $37 \cdot 21 = 777$. Toto nám zjednoduší násobenie. Napodobnime klasický postup ručného násobenia. Zvyčajne pritom násobíme iba jednociferné čísla, ale my už vieme súčin $37 \cdot 21 = 777$, takže môžeme v každom kroku spraviť toto násobenie. Týmto dostaneme násobenie znázornené na tomto obrázku.

$$\begin{array}{r} 37 \dots 7373737 \\ \cdot 21 \\ \hline 777 \\ 777 \\ 777 \\ \dots \\ 777 \\ \hline 784 \dots 4848477 \end{array}$$

Po sebe idúce čísla 777 majú zakaždým jednu cifru 7 v rovnakom ráde, takže ich obvyklým spôsobom sčítame. Takže sa vo výsledku objavia cifry 4 a 8. Z toho, ako prebiehalo násobenie, vieme vidieť, že výsledok je 2025-ciferné číslo. Tri z nich sú cifra 7 a zvyšných $2025 - 3 = 2022$ cifier sa strieda medzi ciframi 4 a 8, takže každá z nich je zastúpená v počte $2022 : 2 = 1011$. Dokopy je tak ciferný súčet výsledku rovný $3 \cdot 7 + 1011 \cdot 4 + 1011 \cdot 8 = 12\,153$.

Úloha 31 ... Dobíjanie bateriek

Majo píše vzorové riešenia tohto ročníka Náboja Junior v čajovni. Na písanie používa notebook s batériou s kapacitou 4000 mAh a smartphone s batériou s kapacitou 3500 mAh. Avšak zabudol si ich vopred nabiť, takže teraz sú nabité len na 20 % svojej kapacity. Majo má len jednu nabíjačku, ktorá vie nabíjať zariadenia tým, že im dodáva prúd 3,25 A. Majo tiež vie, že keď používa svoj plne nabitý notebook, tak sa vybije za 10 hodín,

a tiež aj plne nabitý smartphone sa vybije za 10 hodín používania. Koľko najmenej hodín bude Majovi trvať plné nabitie oboch zariadení, ak ich popri tom stále bude používať na písanie riešení?

Výsledok: 2,4

Riešenie: Kapacita batérie v jednotkách mAh popisuje vzťah medzi výstupným prúdom baterky a časom, ako dlho vie tento prúd poskytovať. Napríklad ak je batéria s kapacitou 4000 mAh plne nabitá, tak vie hodinu poskytovať elektrický prúd 4000 mA alebo štyri hodiny poskytovať prúd 1000 mA alebo čokoľvek podobné. Keďže Majo vie meniť, ktoré zariadenie sa v danom momente nabíja, môžeme notebook a smartphone považovať za jedno zariadenie s batériou s kapacitou $4000 \text{ mAh} + 3500 \text{ mAh} = 7500 \text{ mAh}$. Na začiatku boli obe zariadenia nabité na 20 % svojej kapacity, takže spolu obsahovali náboj $0,2 \cdot 7500 \text{ mAh} = 1500 \text{ mAh}$. Obe zariadenia sa vybíjajú tak, že sa vybijú po 10 hodinách. Každú hodinu sa tak vybijú o $7500 \text{ mAh} : 10 = 750 \text{ mAh}$. V rovnakom čase Majo nabíja zariadenia nabíjačkou, ktorá dodáva prúd $3,25 \text{ A} = 3250 \text{ mA}$, takže po hodine dodá náboj 3250 mAh. Preto sa náboj v batériách zvýši každú hodinu o $3250 \text{ mAh} - 750 \text{ mAh} = 2500 \text{ mAh}$. Majo potrebuje zvýšiť náboj o $7500 \text{ mAh} - 1500 \text{ mAh} = 6000 \text{ mAh}$, takže zariadenia sa plne nabijú za

$$\frac{6000 \text{ mAh}}{2500 \text{ mAh/h}} = 2,4 \text{ h.}$$

Úloha 32 ... Stavanie hradov z piesku je už nuda

Lexi už je znudená zo stavania hradov z piesku, a tak sa teraz hrá s vedrom v jazere. Vedro je veľmi ľahké a má valcovitý tvar s plochou dna 400 cm^2 a výškou 30 cm. Lexi úplne ponorila vedro pod vodu tak, že vrch vedra bol 10 cm pod hladinou vody. Teraz chce pomaly vytiahnuť vedro z vody tak, že jeho dno bude tesne nad hladinou jazera. Akú prácu v Jouloch pri tom Lexi vykoná?

Výsledok: 18

Riešenie: Jediný dôvod, prečo musí Lexi konať prácu, je preto, lebo zvyšuje potenciálnu energiu vody vo vedre. Vedro je valec s plochou dna $S = 400 \text{ cm}^2 = 0,04 \text{ m}^2$ a výškou $h = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$, takže v ňom je voda s hmotnosťou $m = \rho_{\text{voda}} S h$. Ťažisko vody vo vedre je v polovici výšky vedra, čo je $\frac{h}{2}$. Preto musí byť nárast potenciálnej energie a súčasne práca, ktorú Lexi vykoná, rovná

$$W = mg \frac{h}{2} = \frac{\rho_{\text{voda}} S g h^2}{2} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2}{2} = 18 \text{ J.}$$

Úloha 33 ... Nespomína sa Bruno

Bruno je výnimočný dizajnér, takže škoda, že o ňom rozprávame tak málo. Minule nakreslil nové logo pre svoju firmu. Je to veľmi špeciálny šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom $|AB| = 12 \text{ cm}$, $|BC| = 19 \text{ cm}$, $|CD| = 2 \text{ cm}$, $|DE| = 14 \text{ cm}$, $|EF| = 4 \text{ cm}$ a $|FA| = 9 \text{ cm}$. Navyše, dĺžky uhlopriečok AC , CE a EA sú v centimetroch vyjadrené celým číslom a tiež tieto uhlopriečky tvoria trojuholník. Aký najväčší obvod v centimetroch môže mať trojuholník ACE ?

Výsledok: 53

Riešenie: Niekoľkokrát použijeme trojuholníkovú nerovnosť. V trojuholníku ABC nám hovorí, že dĺžka strany AC je väčšia ako $19 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$, no menšia ako $19 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 31 \text{ cm}$. Táto dĺžka má byť celým číslom, takže dĺžka AC môže byť ľubovoľné celé číslo medzi 8 cm a 30 cm. Z rovnakého dôvodu (použitého v trojuholníkoch CDE a EFA) dostaneme, že dĺžka strany CE je celé číslo medzi 13 cm a 15 cm a že dĺžka strany EA je celé číslo medzi 6 cm a 12 cm.

Aby sme dostali čo najväčší obvod trojuholníka ACE , musíme vybrať čo možno najväčšie možné dĺžky jeho strán. Avšak stále musíme splniť trojuholníkovú nerovnosť. Preto hoci by sme aj vybrali najväčšie možné dĺžky strán CE a EA , stále bude musieť byť strana AC kratšia ako $15 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 27 \text{ cm}$. Preto

sa najväčší možný obvod dosahuje pre dĺžky $|AC| = 26$ cm, $|CE| = 15$ cm a $|EA| = 12$ cm, kedy je obvod 26 cm + 15 cm + 12 cm = 53 cm.

Úloha 34 ... Radosť z vynechania

Maťko sa hrá s faktoriálmi. Faktoriál kladného celého čísla je číslo, ktoré dostaneme, ak vynásobíme všetky kladné celé čísla menšie alebo rovné ako dané číslo. Napríklad $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Maťko spočítal súčin $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$, o ktorom zistil, že nie je druhou mocninou nejakého celého čísla. Zistil však, že ak by vynechal člen $k!$, tak už by dostal nejakú druhú mocninu celého čísla. Navyše zistil, že iba jedno kladné celé číslo k má túto vlastnosť. Nájdite túto hodnotu k .

Výsledok: 1012

Riešenie: Súčin dvoch druhých mocnín celého čísla je opäť druhou mocninou celého čísla – ak vynásobíme a^2 s b^2 , dostaneme $(ab)^2$. Toto využijeme, aby sme si zjednodušili úlohu.

Pozrime sa na súčin $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 2023! \cdot 2024!$. Ak popárujeme po sebe idúce členy nasledujúcim spôsobom: $(1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024!)$ a každý faktoriál párneho čísla napíšeme v tvare $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, upraví sa celý súčin do tvaru

$$(1! \cdot 2 \cdot 1!) \cdot (3! \cdot 4 \cdot 3!) \cdot \dots \cdot (2023! \cdot 2024 \cdot 2023!) = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) \cdot ((1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \dots \cdot (2023!)^2).$$

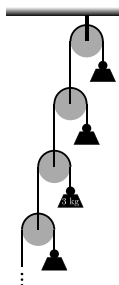
Druhá zátvorka je súčinom druhých mocnín celého čísla, takže aj sama o sebe je druhou mocninou celého čísla. Aby bol aj celý súčin druhou mocninou celého čísla, musíme zabezpečiť, že aj prvá zátvorka je druhou mocninou celého čísla. Táto zátvorka je súčinom párnych čísel, takže celý súčin zjednodušíme, ak z každého čísla vyjmeme dvojku. Týmto spôsobom dostaneme

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2024) = 2^{1012} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1012) = 2^{1012} \cdot 1012!.$$

Číslo 2^{1012} je druhou mocninou celého čísla (keďže exponent je párny). Takže jedinou prekážkou k tomu, aby bol celý súčin druhou mocninou celého čísla, je člen $1012!$. Máme povolené vynechať jeden člen súčinu a toto nám hovorí, že máme vynechať zrovna člen $1012!$. Keďže zadanie nám hovorí, že tento člen je unikátny, môžeme povedať, že sme hľadali hodnotu $k = 1012$.

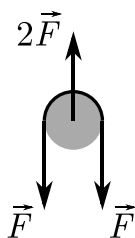
Úloha 35 ... Všade samé kladky

Staviteľ Bob skonštruoval nekonečný kladkostroj ako na obrázku. Hmotnosti jednotlivých závaží nemusia byť nutne rovnaké. Kladkostroj je skonštruovaný tak, že je v pokoji. Hmotnosť tretieho závažia zhora je 3 kg. Aká je celková hmotnosť všetkých všetkých závaží v kilogramoch?



Výsledok: 24

Riešenie: Situácia okolo každej kladky je znázornená na tomto obrázku:



Sily F na lane sú rovnaké, lebo lano je v každom svojom bode napínané rovnako veľkou silou (ktorá samozrejme môže byť rôzna pre rôzne laná). Aby sa kladka nehýbala, musí smerom nahor ešte pôsobiť sila s veľkosťou $2F$. Hoci sa môže zdať, že sa nejako musíme vysporiadať s nekonečnosťou kladkostroja, všimnime si, že nás to až tak nemusí trápiť. Keďže kladky a laná pokladáme za nehmotné, môžeme nájsť celkovú hmotnosť všetkých závaží tým, že sa pozrieme na silu, ktorou kladkostroj pôsobí na strop. To nám povie súčet tiažových síl pôsobiacich na všetky závažia, z čoho už poľahky určíme ich celkovú hmotnosť.

Použijeme pozorovanie z úvodu na to, aby sme určili, akou silou kladkostroj pôsobí na strop.

Začnime tým, že sa pozrieme na tretiu kladku. Vieme, že na jednej jej strane je závažie s hmotnosťou 3 kg , na ktoré pôsobí tiažová sila s veľkosťou $3\text{ kg} \cdot 10\text{ N/kg} = 30\text{ N}$. Takže príslušné lano je napínané tiež silou s veľkosťou 30 N , a preto na kladku musí smerom nahor pôsobiť sila s veľkosťou $2 \cdot 30\text{ N} = 60\text{ N}$.

Teraz sa pozrime na druhú kladku. Sila s veľkosťou 60 N z predošlého odseku vytvára v lane rovnako veľké napätie, takže na druhú kladku musí smerom nahor pôsobiť sila s veľkosťou $2 \cdot 60\text{ N} = 120\text{ N}$. Rovnakým argumentom určíme, že na prvú kladku musí smerom nahor pôsobiť sila s veľkosťou $2 \cdot 120\text{ N} = 240\text{ N}$. Lenže toto je súčasne veľkosť sily, ktorou celý kladkostroj pôsobí na strop, čo sme chceli zistiť.

Celý kladkostroj teda pôsobí na strop silou s veľkosťou 240 N , takže celková hmotnosť všetkých závaží musí byť $240\text{ N} : 10\text{ N/kg} = 24\text{ kg}$.

Úloha 36 ... Cifry sa obrátili

Mirko sa rád hrá s číslami. Vezme si trojčiferné číslo, napíše číslo, ktorého cifry budú v opačnom poradí ako v pôvodnom trojčifernom čísle, a toto číslo odčíta od pôvodného trojčiferného čísla. Napríklad ak by začal s číslom 123 , tak by spočítal $123 - 321 = -198$. Raz toto ukázal Aničke. Spravil to s Aničkiným obľúbeným trojčiferným číslom. Potom zobral číslo o 31 menšie ako Aničkinovo obľúbené trojčiferné číslo, čo bolo stále trojčiferné číslo. Prekvapivo s týmto číslom dostal rovnaký výsledok ako s Aničkiným obľúbeným trojčiferným číslom. Koľko rôznych trojčiferných čísel môže byť Aničkiným obľúbeným trojčiferným číslom?

Poznámka: Trojčiferné číslo nemôže mať na mieste stoviek cifru 0 , avšak číslo získané zápisom cifier v opačnom poradí môže. V takom prípade ignorujeme nuly na začiatku.

Výsledok: 216

Riešenie: Najprv sa pozrime na to, aké rozdiely Mirko dostáva. Trojčiferné číslo vieme napísať v tvare $100A + 10B + C$, kde A , B a C sú jeho cifry. Keď zapíšeme tieto cifry v opačnom poradí, dostaneme číslo $100C + 10B + A$, takže Mirko dostane rozdiel

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99(A - C).$$

Vidíme, že Mirkov rozdiel závisí iba od rozdielu cifier na miestach stoviek a jednotiek v čísle, s ktorým Mirko začal. V úlohe má Mirko pracovať s nejakým číslom a potom s týmto číslom zmenšeným o 31 . Keďže dostal rovnaký výsledok, museli mať tieto dve čísla rovnaký rozdiel cifier na miestach stoviek a jednotiek. Teraz potrebujeme spočítať počet čísel s touto vlastnosťou.

Sú dva prípady toho, čo sa môže stať, podľa cifier na miestach jednotiek v Aničkinom obľúbenom čísle. Keby na mieste jednotiek bola cifra 0 , po odčítaní 31 by sa zmenila na cifru 9 . Preto by sa cifra na mieste stoviek tiež musela zväčšiť o 9 , čo sa však nemohlo stať. Preto Aničkinovo obľúbené číslo nemá na mieste jednotiek cifru 0 , takže po odčítaní 31 sa táto cifra zmenší o 1 . Potom sa ale musí aj cifra na mieste stoviek zmenšiť o 1 . To sa stane iba vtedy, ak posledné dve cifry Aničkinho obľúbeného čísla tvoria niektoré z dvojčiferných čísel 00 , 01 , ..., 30 .

Z tohto zoznamu potrebujeme vymazať tie čísla, ktoré majú na mieste jednotiek cifru 0, čím nám zostane 27 možností. Zostáva už len určiť, ktoré cifry mohli byť na mieste stoviek. Nemôže tam byť cifra 1, lebo po odčítaní 31 by sme nedostali trojciferné číslo. S ciframi 2, 3, ..., 9 ale bude všetko fungovať.

Keď skombinujeme možné cifry na mieste stoviek s možnosťami pre zvyšné dve cifry, dostaneme $8 \cdot 27 = 216$ možností pre Aničino obľúbené trojciferné číslo.

Úloha 37 ... Najväčšie znudenie sveta

Jožko sa tak strašne nudí, že si napísal všetky kladné celé čísla od 1 do svojho obľúbeného čísla 9 876 543 210 (vrátane). Taktiež spočítal súčet cifier vo všetkých týchto číslach. Tým dostal výsledok 443 255 601 330. Teraz by chcel spraviť niečo podobné. Avšak najprv vo všetkých číslach zamení všetky cifry 5 za cifry 6 a naopak, až potom spočíta súčet cifier vo všetkých týchto číslach. Aký výsledok dostane Jožko tentoraz?

Výsledok: 443 256 101 330

Riešenie: Každá zmena cifry 5 na cifru 6 zvýši Jožkov súčet o 1 a podobne každá zmena z 6 na 5 zníži súčet o 1. Toto znamená, že jedna zmena z 5 na 6 sa vie vyrušiť s jednou zmenou z 6 na 5. Preto nás zaujíma iba rozdiel počtu výskytov cifier 5 a 6 medzi kladnými celými číslami od 1 do 9 876 543 210.

Najprv si všimnime, že sa môžeme zamerať iba na výskyty cifier 5 a 6 v rádoch, v ktorých sa niektorá z týchto cifier vyskytuje v čísle 9 876 543 210. Skutočne, ak je cifra 5 vo vyššom alebo nižšom ráde, môžeme túto cifru 5 zameniť za cifru 6 (podobne aj so zámenou cifry 6 na 5). Tým dostaneme nejaké číslo, ktorého cifry Jožko tiež započítal. Preto v týchto rádoch nedostaneme rozdiel v počte cifier 5 a 6.

Teraz sa už zamerajme iba na cifry 5 a 6 v rádoch miliónov a stotisícov. Taktiež, rozdiely v počte výskytov cifier 5 a 6 dostaneme iba v prípade, ak je vo vyšších rádoch trojčísle 987 (ináč by sme mohli argumentovať rovnako ako v predošlom odseku). S touto podmienkou sa cifra 5 vyskytne 1 000 000-krát na mieste miliónov a $6 \cdot 100\,000 + 43\,211 = 643\,211$ -krát na mieste stotisícov. Podobne sa cifra 6 vyskytuje 543 211-krát na mieste miliónov a $6 \cdot 100\,000 = 600\,000$ -krát na mieste stotisícov. Takže počet výskytov cifry 5 je o $(1\,000\,000 + 643\,211) - (543\,211 + 600\,000) = 500\,000$ väčší ako počet výskytov cifry 6.

Preto zmena všetkých cifier 5 na 6 a naopak zvýši súčet cifier o 500 000, a tak Jožko dostane výsledok

$$443\,255\,601\,330 + 500\,000 = 443\,256\,101\,330.$$

Úloha 38 ... Skákanie z vody

Ferb je homogénny hranol, ktorého základne sú pravidelné šesťuholníky so stranou dĺžky 0,9 m, s výškou 0,6 m a s hustotou 125 kg/m^3 . Momentálne je držaný pod vodnou hladinou veľkého jazera tak, že obe jeho základne sú rovnobežné s vodnou hladinou a horná základňa je v rovnakej výške ako hladina vody. Keď ho vypustíme, Ferb vyskočí nad hladinu jazera. Do akej výšky nad vodnú hladinu v metroch sa pri tom dostane Ferbova horná základňa?

Poznámka: Predpokladajte, že Ferbove základne budú v každom momente vodorovne.

Výsledok: 2,4

Riešenie: Označme V Ferbov objem, $h = 0,6 \text{ m}$ jeho výšku a $\rho_{\text{Ferb}} = 125 \text{ kg/m}^3$ jeho hustotu. Po Ferbovom vyskočení sa miesto, kde bol Ferb pôvodne držaný, vyplní vodou. Týmto sa energia vody v jazere zníži o $E = V \rho_{\text{voda}} g \frac{h}{2}$, keďže hmotnosť tejto vody je $V \rho_{\text{voda}}$ a jej ťažisko je v hĺbke $\frac{h}{2}$ (jazero je dostatočne veľké, takže jeho hladina zostane v rovnakej výške). Potrebujeme nájsť výšku H , do ktorej vyskočí Ferb. V najvyššom bode nebude mať Ferb žiadnu kinetickú energiu, takže v tomto prípade sa všetka energia, ktorú stratila voda, musela premeniť na Ferbovu potenciálnu energiu $E = V \rho_{\text{Ferb}} g H$. Porovnaním oboch výrazov pre E zistíme, že

$$V \rho_{\text{voda}} g \frac{h}{2} = V \rho_{\text{Ferb}} g H,$$

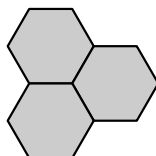
$$H = \frac{\rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{Ferb}}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{125 \text{ kg/m}^3} \cdot \frac{0,6 \text{ m}}{2} = 2,4 \text{ m}.$$

Vidíme, že Ferbova horná základňa sa dostane do výšky 2,4 m.

Úloha 39 ... Vyrezané mnohouholníky

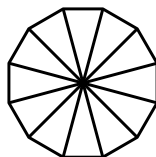
Viktor si zobral hárok papiera a vystrihol z neho tri pravidelné mnohouholníky, pričom žiadne dva nemali rovnaký počet strán, no všetky mali rovnakú dĺžku strán. Prekvapivo vedel položiť tieto mnohouholníky na stôl tak, že všetky mali jeden spoločný vrchol a každá dvojica mnohouholníkov mala jednu stranu spoločnú. Viktor takto dostal (nepravidelný) n -uholník. Aká je najväčšia možná hodnota čísla n ?

Poznámka: Keby sme povolili, že mnohouholníky môžu mať rovnaký počet strán, bola by jedna z možností, ako dostať n -uholník, nakreslená na nasledujúcom obrázku. Takto by Viktor dostal $n = 12$.



Výsledok: 46

Riešenie: Každý pravidelný m -uholník možno rozdeliť na m zhodných rovnoramenných trojuholníkov ako na obrázku.



Uhly oproti základni v týchto trojuholníkoch sa musia nasčítat na 360° . Všetky ostatné uhly prispievajú do súčtu uhlov v m -uholníku. Keďže súčet uhlov v každom trojuholníku je 180° , dostávame, že súčet uhlov v m -uholníku je $m \cdot 180^\circ - 360^\circ = (m - 2) \cdot 180^\circ$. V pravidelnom m -uholníku majú všetky uhly rovnakú veľkosť, takže každý z nich musí mať veľkosť $\frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ$.

Ak chceme uložiť mnohouholníky tak, ako to od nás vyžaduje zadanie, musí byť súčet uhlov pri spoločnom vrchole 360° . Takže ak označíme x , y a z počty strán v jednotlivých pravidelných mnohouholníkoch a použijeme informáciu z predošlého odseku, dostaneme podmienku

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180^\circ + \frac{y-2}{y} \cdot 180^\circ + \frac{z-2}{z} \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Vydeľme celú rovnicu 180° . Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x} + \frac{y-2}{y} + \frac{z-2}{z} &= 2, \\ \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \left(1 - \frac{2}{y}\right) + \left(1 - \frac{2}{z}\right) &= 2, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pokúsme sa nájsť všetky trojice (x, y, z) , ktoré spĺňajú túto rovnicu. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x > y > z$. Ak by platilo $z \geq 6$, potom by muselo platiť $y \geq 7$ a potom aj $x \geq 8$. Lenže vtedy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Preto nemôže platiť $z \geq 6$, čiže z je jedno z čísel 3, 4 alebo 5. Vyriešme každý prípad samostatne.

Prípád $z = 3$. V tomto prípade má podmienka tvar $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. Po vynásobení menovateľmi dostávame $6y + 6x = xy$, čo vieme (po pričítaní 36 k oboj stranám) napísať v tvare $(x - 6)(y - 6) = 36$. Obe zátvorky musia byť kladné. Keďže číslo 36 možno zapísať ako súčin dvoch rôznych čísel štyrmi spôsobmi $36 = 36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4$, dostávame štyri riešenie – že dvojica (x, y) je jedna z dvojíc $(42, 7)$, $(25, 8)$, $(18, 11)$, $(15, 10)$.

Prípád $z = 4$. Postupujeme podobne ako v predošlom prípade. Máme $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, čo po prenasobení prejde na tvar $4y + 4x = xy$. Keď pričítame 16 a roznásobíme ľavú stranu, dostaneme rovnicu $(x - 4)(y - 4) = 16$. Jej riešením (x, y) sú dvojice $(20, 5)$ a $(12, 6)$.

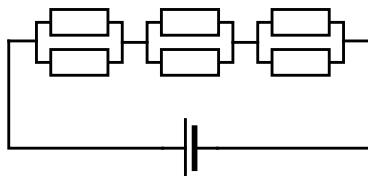
Prípád $z = 5$. Napokon, v tomto prípade máme rovnicu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}$, z ktorej sa stane $10y + 10x = 3xy$. Keď túto rovnicu vynásobíme 3 a pripočítame 100, dostaneme rovnicu $(3x - 10)(3y - 10) = 100$. To vedie k riešeniam (x, y) , ktoré sú $(\frac{110}{3}, \frac{11}{3})$, $(20, 4)$, $(\frac{35}{3}, \frac{14}{3})$, $(10, 5)$. Z týchto nás zaujímajú iba tie bez zlomkov. Navyše, trojicu $(20, 5, 4)$ sme už dostali v predošlom prípade (a v skutočnosti nie je z tohto prípadu). Posledné zostávajúce riešenie $(x, y) = (10, 5)$ zas nespĺňa podmienku $y > z$. Takže z tohto prípadu nemáme žiadne nové riešenia.

Jediné trojice (x, y, z) , ktoré spĺňajú $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ and nerovnosti $x > y > z$, sú trojice $(42, 7, 3)$, $(25, 8, 3)$, $(18, 11, 3)$, $(15, 10, 3)$, $(20, 5, 4)$ a $(12, 6, 4)$.

Možno vidieť, že po uložení mnohouholníkov na stôl, bude mať každý mnohouholník na okraji všetky svoje strany okrem dvoch. To znamená, že musí platiť $n = (x - 2) + (y - 2) + (z - 2) = (x + y + z) - 6$, takže sa snažíme maximalizovať číslo $x + y + z - 6$. Pre trojice, ktoré sme našli, nadobúda výraz $x + y + z - 6$ hodnoty postupne 46, 30, 26, 22, 23 a 16. Takže najväčšia možná hodnota čísla n je 46.

Úloha 40 ... Veľmi odporná úloha

Matej si zostavil elektrický obvod, ktorý vidíš na obrázku. Použil zdroj, ktorý vytváral napätie 3 V, a rezistory s odpormi $2\ \Omega$, $3\ \Omega$, $4\ \Omega$, $5\ \Omega$, $6\ \Omega$ a $7\ \Omega$. Lenže zabudol, ktorý rezistor v obvode na obrázku je ktorý. Vie jedine to, že celým obvodom preteká elektrický prúd $\frac{273}{580}$ A. Aký elektrický prúd v Ampéroch preteká rezistorom s odporom $5\ \Omega$?



Výsledok: $\frac{39}{290}$

Riešenie: Odpor R_0 paralelného zapojenia rezistorov s odpormi R_1 a R_2 je daný vzťahom

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Tri takéto paralelné dvojice sú sériovo zapojené v obvode, takže celkový odpor zapojenia je daný ako súčet troch zlomkov rovnakého tvaru ako v predošlom vzťahu. Celkový odpor R zapojenia vieme spočítať z napätia $U = 3\text{ V}$ na zdroji a elektrického prúdu $I = \frac{273}{580}$ A, ktorý preteká celým obvodom. Je rovný

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3\text{ V}}{\frac{273}{580}\text{ A}} = \frac{580}{91}\ \Omega.$$

Takže potrebujeme, aby platilo

$$\frac{580}{91}\ \Omega = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6},$$

kde R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 a R_6 sú v nejakom poradí $2\Omega, 3\Omega, 4\Omega, 5\Omega, 6\Omega$ a 7Ω . Pozrime sa na túto rovnosť bez jednotiek. Aby sme dostali číslo 91 v menovateli, musí byť najmenší spoločný násobok menovateľov $R_1 + R_2, R_3 + R_4$ a $R_5 + R_6$ násobkom čísla 91. Prvočíselný rozklad čísla 91 je $91 = 7 \cdot 13$, takže aspoň jeden z menovateľov musí byť deliteľný číslom 13. Keďže ho musíme vytvoriť ako súčet dvoch čísel z množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, máme iba jednu možnosť – dostať ho ako $6 + 7$. To znamená, že jednou z dvojíc paralelne zapojených rezistorov musí byť dvojica rezistorov s odpormi 6Ω a 7Ω . Rovnakým argumentom musíme mať aj dvojicu rezistorov, ktorej súčet je násobkom 7. Jediný spôsob, ako to dosiahnuť, je mať dvojicu rezistorov s odpormi 2Ω a 5Ω a dvojicu rezistorov s odpormi 3Ω a 4Ω .

Zostáva už len spočítať elektrický prúd, ktorý preteká rezistorom s odporom 5Ω . Je paralelne zapojený s rezistorom s odporom 2Ω , takže odpor paralelného zapojenia týchto dvoch rezistorov je

$$R_{25} = \frac{2\Omega \cdot 5\Omega}{2\Omega + 5\Omega} = \frac{10}{7}\Omega.$$

Elektrický prúd, ktorý preteká celou touto dvojicou je stále I , takže napätie na oboch rezistoroch v tejto dvojici je

$$U_{25} = R_{25}I = \frac{10}{7}\Omega \cdot \frac{273}{580}\text{A} = \frac{39}{58}\text{V}.$$

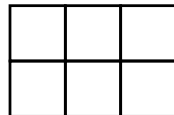
Napokon, elektrický prúd I' pretekajúci rezistorom s odporom $R' = 5\Omega$ je

$$I' = \frac{U_{25}}{R'} = \frac{\frac{39}{58}\text{V}}{5\Omega} = \frac{39}{290}\text{A}.$$

Úloha 41 ... Všade samé obdĺžniky

Majo si nakreslil tabuľku $m \times n$, ktorá bola rozdelená na mn jednotkových štvorčekov. Spočítal, že čiary tejto tabuľky tvoria spolu 141 400 obdĺžnikov. Koľko jednotkových štvorčekov táto tabuľka obsahuje?

Poznámka: Každý štvorec pokladáme za obdĺžnik. Napríklad, v tabuľke 2×3 na obrázku tvoria čiary tabuľky spolu 18 obdĺžnikov.



Výsledok: 700

Riešenie: Potrebujeme vyjadriť počet obdĺžnikov v tabuľke v závislosti od čísel m (počet riadkov) a n (počet stĺpcov). Pozrime sa na zvislé čiary, ktoré idú úplne zhora tabuľky na úplný spodok (tých je $n + 1$), a podobne sa pozrime na vodorovné čiary idúce úplne zľava úplne doprava (tých je $m + 1$). Všimnime si, že každá dvojica zvislých a každá dvojica vodorovných čiar určuje jediný obdĺžnik. Rovnako aj naopak, ak si vezmeme obdĺžnik, tak jeho strany určujú presne dve zvislé a dve vodorovné čiary – tie, ktoré získame predĺžením strán tohto obdĺžnika. Preto existuje jednoznačné priradenie medzi obdĺžnikmi a štvoricami pozostávajúcimi z dvoch zvislých a dvoch vodorovných čiar.

Takže potrebujeme spočítať počet takýchto štvoríc. Pre prvú zvislú čiaru máme na výber z $n + 1$ zvislých čiar a pre druhú zvislú čiaru máme na výber zo zostávajúcich n zvislých čiar. Avšak takto vyberieme každú dvojicu čiar v dvoch rôznych poradiach. Preto vieme dve zvislé čiary vybrať $\frac{(n+1)n}{2}$ spôsobmi. Podobne, dvojicu vodorovných čiar vieme vybrať $\frac{(m+1)m}{2}$ spôsobmi. Takže celkový počet spôsobom, ako vybrať štvoricu čiar, je $\frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$. Preto hľadáme také čísla m, n také, že

$$\frac{(m+1)m(n+1)n}{4} = 141\,400,$$

$$(m+1)m(n+1)n = 565\,600.$$

Môžeme si všimnúť, že číslo 565 600 je deliteľné 101 (keďže $565\,600 = 5600 \cdot 101$), čo je prvočíslo, takže aspoň jeden z deliteľov na ľavej strane vyššie uvedenej rovnice musí byť deliteľný 101. Jedna z možností, ako to dosiahnuť (motivovaná tým, že číslo 565 600 je tiež deliteľné číslom 100), je položiť niektoré z čísel m a n rovné 100. Nech to je napríklad m . Zvyšok rovnice sa upraví na tvar $(n+1)n = 56$, ktorý je splnený pre $n = 7$. Dá sa ľahko ručne overiť, že ak ako jeden z činiteľov zvolíme iný násobok 101, tak už nedostaneme iné riešenie (navyššie pre násobky 808 a vyššie dostaneme určite väčší súčin ako 565 600, pretože tento súčin bude určite väčší ako $800 \cdot 800 = 640\,000$). To znamená, že Majo si musel nakresliť tabuľku 100×7 (alebo 7×100), ktorá obsahuje $100 \cdot 7 = 700$ jednotkových štvorcíkov.

Úloha 42 ... Ostrohrulé satelity

Okolo Zeme obiehajú tri satelity. Ich trajektórie sú kružnice so stredom v strede Zeme a so skoro rovnakými polomermi. Všetky tieto trajektórie navyše ležia v jednej rovine. Satelity majú motory, ktoré im umožňujú udržiavať stále rovnakú uhlovú rýchlosť. Prvý satelit obehne okolo Zeme za 90 minút, druhý za 30 minút, tretí za 15 minút a všetky satelity obiehajú proti smeru hodinových ručičiek. Keď boli satelity vypustené, boli skoro na tom istom mieste. Aká je pravdepodobnosť, že v náhodne zvolenom momente tvoria satelity vrcholy ostrohrulého trojuholníka?

Výsledok: $\frac{7}{30} \doteq 23,3\%$

Riešenie: Prvý satelit obehne Zem za 90 minút, takže každú minútu opíše uhol $\frac{360^\circ}{90} = 4^\circ$. Podobne druhý satelit opíše každú minútu uhol $\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$ a tretí satelit opíše každú minútu uhol $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$.

Namiesto pozerania sa na tri obiehajúce satelity môžeme celú situáciu popisovať v sústave rotujúcej spolu s jedným zo satelitov. Hlavná výhoda tohto je, že budeme môcť jeden zo satelitov pokladať za nehybný. Napríklad povedzme, že prvý satelit je nehybný. V tejto sústave opíše druhý satelit každú minútu uhol $12^\circ - 4^\circ = 8^\circ$ a tretí satelit uhol $24^\circ - 4^\circ = 20^\circ$.

Presuňme sa teraz k otázke ostrohrulosti. Satelity sú na rovnakej kružnici. Ak niektoré dva z nich tvoria nejaký priemer tejto kružnice, potom podľa Talesovej vety tvoria satelity pravouhlý trojuholník. Môžeme si všimnúť, že toto je v nejakom zmysle hraničný prípad medzi tým, či je trojuholník ostrohrulý alebo tupouhlý:

- ak existuje taký priemer kružnice, že všetky tri satelity ležia na rovnakej strane tohto priemeru, potom satelity tvoria tupouhlý trojuholník,
- ak neexistuje taký priemer, ako je popísané v predošlej odrážke, potom satelity tvoria ostrohrulý trojuholník.

Ostrohrulosť či tupouhlilosť sa môžu zmeniť iba vtedy, keď niektoré dva satelity tvoria priemer kružnice alebo keď sú niektoré dva satelity v tom istom bode. Pre dvojicu prvý a druhý satelit sa toto stane každých $\frac{180^\circ}{8^\circ} = 22,5$ minút, pre dvojicu prvý a tretí satelit každých $\frac{180^\circ}{20^\circ} = 9$ a napokon pre dvojicu druhý a tretí satelit každých $\frac{180^\circ}{20^\circ - 8^\circ} = 15$ minút. V násobkoch týchto časov môžu nastať zmeny:

- Od minúty 0 do minúty 9 (prvý a tretí satelit tvoria priemer) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.
- Od minúty 9 do minúty 15 (druhý a tretí satelit tvoria priemer) – satelity tvoria ostrohrulý trojuholník.
- Od minúty 15 do minúty 18 (prvý a tretí satelit sú v rovnakom bode) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.
- Od minúty 18 do minúty 22,5 (prvý a druhý satelit tvoria priemer) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.
- Od minúty 22,5 do minúty 27 (prvý a tretí satelit tvoria priemer) – satelity tvoria ostrohrulý trojuholník.
- Od minúty 27 do minúty 30 (druhý a tretí satelit sú v rovnakom bode) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.
- Od minúty 30 do minúty 36 (prvý a tretí satelit sú v rovnakom bode) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.

- Od minúty 36 do minúty 45 (prvý a druhý satelit sú v rovnakom bode a oba tvoria priemer s tretím satelitom) – satelity tvoria tupouhlý trojuholník.

Kvôli tomu, ako sú rozmiestnené satelity v minúte 45, môžeme vidieť, že od minúty 45 do minúty 90 sa vykonajú rovnaké kroky ako vyššie, akurát v opačnom poradí. To preto, lebo ak by sme sa na pohyby satelitov pozreli v osovej súmernosti podľa priemeru, ktorý satelity tvoria v minúte 45, videli by sme akoby spätný pohyb satelitov z minúty 45 do minúty 0. Preto sa tu už nestane nič zásadne nové, a tak môžeme vypočítať pravdepodobnosti z pohybov od minúty 0 do minúty 45. Počas týchto 45 minút tvorili satelity ostrouhlý trojuholník medzi minútami 9 a 15 a medzi minútami 22,5 a 27. Dokopy to bolo $(15 - 9) + (27 - 22,5) = 10,5$ minút. Takže pravdepodobnosť, že satelity tvoria ostrouhlý trojuholník, je

$$\frac{10,5}{45} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \doteq 23,3\%.$$

Pod'akovanie

Odborný garant súťaže

Marián Poturnay

Námety úloh

Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Michal Farnbauer, Rikkie Gieler, Matej Hrmo, Miroslav Jarý, Anna Koziara, Hai An Mai, Tomas Miskov, Marián Poturnay, Matej Vojvodić

Autori zadaní a řešení úloh

Rikkie Gieler, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Marián Poturnay

Recenzenti

Lance Bakker, Branislav Bubán, Michaela Dluhošová, Michal Farnbauer, Soňa Husáková, Tomas Miskov, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Matej Vojvodić

Preklady

Ezequiel Albentosa Ruiz, Lance Bakker, Gabrijel Čajsa, Anežka Čechová, Eduard Dlabota, Rikkie Gieler, Robin Gludovatz, Walter Hametner, Kornel Howil, Oleksii Iermolenko, Justyna Jaworska, Barbara Kelava, Richard Materna, Anna Matyášková, Tomas Miskov, Azucena Molina Solís, Martina Motyčková, Miroslav Pajger, Gabriela Parka, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Juraj Rosinský, Dmytro Rzhemovskiy, Norbert Schuch, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Hana Tisař, Matej Vojvodić, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinátori

Robin Gludovatz (AT), Terézia Gurová (SK), Justyna Jaworska (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Azucena Molina-Solís (ES), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Organizačné miesta

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biala:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovceva • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Chojnice:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Jarosza Hieronima Derdowskiego • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovéj Tímrahy • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkera • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernoláková • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien & Erwin Schrödinger Institute • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu