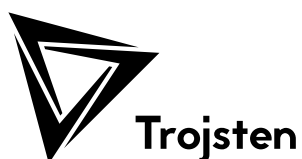


Vzorová řešení
13. ročník Náboje Junior

21. listopadu 2025



Trojsten



matfyz

Ahoj,

Právě se Vám do rukou dostala brožurka zadání a řešení úloh soutěže Náboj Junior 2025. Náboj Junior je matematicko-fyzikální soutěž pro čtyřčlenné týmy žáků druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Soutěž trvá 120 minut, během kterých se týmy snaží vyřešit co nejvíce úloh zaměřených nejen na znalosti z matematiky a fyziky, ale i na schopnost přistupovat k úlohám inovativně a s důvtipem.

Dne 21. listopadu 2025 proběhl 13. ročník Náboje Junior. V České republice se letos zúčastnilo soutěže 403 týmů. Náboj Junior proběhl v 61 městech v Česku, na Slovensku, v Polsku a v Rakousku. Současně se soutěž konala v online verzi v Nizozemí, Belgii a v Chorvatsku.

V českých městech je soutěž organizována nadšenými učiteli a studenty středních škol, kteří věnují svůj čas a energii, aby umožnili mladším žákům z regionu zasoutěžit si a prověřit svoje vědomosti. Cílem Náboje Junior je rozvíjet nadání dětí v oblasti matematiky, fyziky a ukázat širokému spektru žáků, že přírodní vědy skrývají mnoho zajímavostí, výzev a příležitostí.

Soutěž Náboj Junior vznikla jako společný projekt občanského sdružení Trojsten a korespondenčního semináře MFF UK Výfuk. Členové organizací jsou vysokoškolští studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislavě a Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze, kteří se snaží o rozvoj nadání studentů a zvýšení zájmu o přírodní vědy.

Těšíme se na Vás příští rok

Korespondenční seminář Výfuk

Příklad 1 ... Dlouhé vlasy

Locika si všimla, že její vlasy rostou rychlostí 1,5 cm za měsíc. Nedávno však své vlasy darovala, takže jsou nyní dlouhé pouze 20 cm. Chtěla by si ale nechat narůst 2 metry dlouhé vlasy. Kolik let bude muset Locika počkat, než jí takto dlouhé vlasy narostou?

Výsledek: 10

Řešení: Locika potřebuje, aby její vlasy vyrostly o $200 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 180 \text{ cm}$. To bude trvat $180 \text{ cm} : 1,5 \text{ cm/měsíc} = 120 \text{ měsíců} = 10 \text{ let}$. Locika musí počkat 10 let, než jí vlasy dorostou.

Příklad 2 ... Cyklistická

Petr a Pavel se zúčastnili malého cyklistického závodu ve svém městě. Petrovi se tento den dařilo opravdu skvěle, úspěšně dokončil závod a umístil se na čtvrtém místě. Pavel se však tento den příliš dobře nevyspal a skončil druhý od konce. Mezi Petrem a Pavlem dokončilo závod dalších šest účastníků. Kolik cyklistů celkem dokončilo závod?

Výsledek: 12

Řešení: Před Petrem dokončili závod 3 cyklisté, 6 cyklistů dorazilo do cíle mezi Petrem a Pavlem a 1 cyklista dojel až po Pavlovi. To dohromady dává $6 + 3 + 1 = 10$ cyklistů, pokud nepočítáme Petra s Pavlem. Jestliže odpovídáme na celkový počet cyklistů, musíme započítat i Petra a Pavla, což nám dává výsledek $10 + 2 = 12$ cyklistů.

Příklad 3 ... Maraton

Běžec maratonu běží přibližně 42 kilometrů. Během běhu je běžcův výkon 3 kJ energie na každý kilometr. Aby vynahradil vydanou energii, konzumuje běžec pravidelně energetické tyčinky. Každá tyčinka mu dodá energii 1000 J. Kolik energetických tyčinek musí běžec během závodu sníst, aby dokončil závod se stejnou energií, jako měl na začátku?

Výsledek: 126

Řešení: Každým kilometrem ztratí běžec 3000 J energie. Na trase dlouhé 42 km spotřebuje

$$3000 \text{ J/km} \cdot 42 \text{ km} = 126\,000 \text{ J}$$

energie. Každá sněžená tyčinka dodá běžci 1000 J energie. Aby vykompenzoval vydanou energii, musí sníst $\frac{126\,000 \text{ J}}{1000 \text{ J}} = 126$ energetických tyčinek.

Příklad 4 ... Kdo by si dal čokoládu?

Matěj dostal bílou čokoládu složenou ze 35 dílků. Matěj si ale myslí, že bílá čokoláda není opravdová čokoláda, a tak se rozhodl, že ji radši rozdělí mezi své kamarády. Chce, aby každý z jeho kamarádů dostal alespoň 2 dílky čokolády. Zároveň chce, aby každý z jeho kamarádů dostal stejný počet dílků. A protože nerad plýtvá, tak chce, aby žádný kousek čokolády nezbyl. Jaký je největší počet kamarádů, kterým může Matěj dát část čokolády, aby byly všechny podmínky splněny?

Výsledek: 7

Řešení: Číslo 35 může být rozloženo na násobek dvou celých čísel čtyřmi způsoby (když bereme v potaz i pořadí činitelů):

$$1 \cdot 35, \quad 5 \cdot 7, \quad 7 \cdot 5, \quad 35 \cdot 1.$$

První číslo udává počet dílků čokolády, který Matěj dá každému svému kamarádovi. Každý kamarád musí dostat alespoň 2 dílky, proto musíme vyřadit $1 \cdot 35$. Ze získaných tří zbylých možností je největší počet kamarádů 7.

Příklad 5 ... Důležitá návštěva

Tadeáš jede navštívit svou babičku, která bydlí na druhé straně města. Protože celou cestu jede městem, nesmí překročit rychlost 50 km/h. Celá cesta od Tadeášova domu až k babičce je dlouhá 10 km. Jak rychle zvládne Tadeáš dojet za svou babičkou, pokud si chce být jistý, že nepřekročí maximální povolenou rychlost, a tak pro jistotu pojede průměrnou rychlostí 40 km/h? Výsledek uveďte v minutách.

Výsledek: 15

Řešení: Informace o maximální povolené rychlosti není pro řešení úlohy vůbec relevantní. Potřebujeme pouze vědět, že Tadeáš ujede vzdálenost $s = 10$ km a že jeho průměrná rychlost je $v = 40$ km/h. Průměrná rychlost je rovna celkové vzdálenosti dělené celkovým časem. Pokud označíme průměrnou rychlost jako v a celkovou vzdálenost jako s , můžeme dopočítat čas následujícím způsobem.

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = \frac{1}{4} \text{ h.}$$

Po převedení času na minuty zjistíme, že Tadeášovi trvala cesta 15 minut.

Příklad 6 ... Dvakrát měř, jednou řež

Vojta pracuje v továrně zpracovávající dřevo. Jeho práce je poměrně jednoduchá, dostal dřevěné kvádry s rozměry 17 cm $\times$ 42 cm $\times$ 47 cm a měl natřít všechny jejich stěny oranžovou barvou. Vojta je ale tak trochu nešika a omylem všechny strany jednoho kvádru obarvil špatným odstínem oranžové. Chtěl si být jist, že nikdo nepoužije špatně obarvený kvádr, a tak ho rozřezal na menší krychle o délce hrany 1 cm. Kolik nových malých krychlí má obarveno právě 3 strany špatným odstínem oranžové?

Výsledek: 8

Řešení:

Jediné krychle, které mají obarvené právě 3 strany jsou ty, které byly na vrcholech (v rozích) původního velkého kvádrů. Ostatní krychle mají obarvené buď 2 strany (to jsou ty, které byly na hranách velkého kvádrů), 1 stranu (pokud nebyly součástí hrany ale byly na vnějších stěnách kvádrů), nebo 0 stran (pokud nebyly vůbec na povrchu kvádrů). Proto stačí spočítat počet vrcholů kvádrů, kterých je 8. Z kvádrů tedy vzniklo 8 kostek se třemi stranami natřenými špatným odstínem oranžové.

Příklad 7 ... Studený obídek

Markéta si chce k obědu ve škole ohřát své jídlo, a tak ho dala do mikrovlnky s konstantním výkonem. Po nějaké době se její jídlo ohřálo na 26 °C. To ale nebylo pro Markétu dost teplé, a tak vložila jídlo do mikrovlnky znovu, tentokrát ale pouze na 70 % času prvního ohřívání. Tentokrát se už teplota jídla zvedla na 40 °C, což bylo pro Markétu tak akorát. Jaká byla původní teplota jídla před začátkem ohřívání?

Poznámka: Předpokládejme, že se z Markétina jídla neodpaří žádná voda a mezi ohříváními nevychladne.

Výsledek: 6

Řešení: Výkon mikrovlnky je konstantní. To znamená, že energie, kterou je jídlo ohříváno je přímo úměrná času ohřívání. Hmotnost ani tepelná kapacita jídla se během ohřevu nemění. Zvýšení teploty je tedy úměrné pouze době ohřevu.

Při druhém ohřevu se jídlo ohřeje o 40 °C – 26 °C = 14 °C. Tento ohřev ale trval pouze 70 % času toho předchozího. Při prvním ohřívání se tedy teplota jídla musela zvednout o

$$\frac{100 \%}{70 \%} \cdot 14 ^\circ\text{C} = 20 ^\circ\text{C}.$$

Původní teplota Markétina jídla byla 26 °C – 20 °C = 6 °C.

Příklad 8 ... Tichá pošta

Ve státu Nábojstán žije přesně 2025 obyvatel a jeden král. Nedávno byl přijat nový zákon a král musí všechny informovat o nových pravidlech. Zpráva se šíří každý den v poledne. Prvního dne král předá novinku jediné osobě. V každém následujícím dni každý obyvatel (kromě krále), který zprávu znal den předtím nebo dříve, ji předá přesně jedné další dosud neinformované osobě (pokud taková osoba ještě existuje). Kolik dní potrvá, než k večeru onoho dne budou všichni obyvatelé seznámeni s novým zákonem?

Výsledek: 12

Řešení:

Na konci prvního dne zná zákon právě 1 osoba. V každém dalším dni se počet osob, které znají zákon, zdvojnásobí. Víme tedy, že šíření informace bude probíhat následujícím způsobem:

2. v poledne druhého dne znají zákon $2 \cdot 1 = 2$ osoby;
3. v poledne třetího dne znají zákon $2 \cdot 2 = 4$ osoby;
4. v poledne čtvrtého dne zná zákon $2 \cdot 4 = 8$ osob;
5. v poledne pátého dne zná zákon $2 \cdot 8 = 16$ osob;
6. v poledne šestého dne zná zákon $2 \cdot 16 = 32$ osob;
7. v poledne sedmého dne zná zákon $2 \cdot 32 = 64$ osob;
8. v poledne osmého dne zná zákon $2 \cdot 64 = 128$ osob;
9. v poledne devátého dne zná zákon $2 \cdot 128 = 256$ osob;
10. v poledne desátého dne zná zákon $2 \cdot 256 = 512$ osob;
11. v poledne jedenáctého dne zná zákon $2 \cdot 512 = 1024$ osob;
12. v poledne dvanáctého dne zná zákon $2 \cdot 1024 = 2048$ osob.

Jelikož $2048 \geq 2025$, šíření nového zákona skončí na konci dvanáctého dne.

Příklad 9 ... Efektivní řešení

Štěpán si koupil solární panel a chce ho použít k napájení své oblíbené hračky – vláčku. Jako první použije solární panel k přeměně solární energie na elektřinu s účinností 0,2. Touto elektřinou Štěpán následně nabije baterii, která je schopna uchovat $\frac{5}{6}$ energie získané ze solárního panelu. Nakonec dá baterii do vláčku, který je schopen převést 30 % chemické energie z baterie na svou vlastní kinetickou energii. S kolikaprocentní účinností mění Štěpánův systém solární energii na kinetickou energii vlaku?

Výsledek: 5

Řešení:

Pro získání celkové účinnosti převodu energie musíme mezi sebou vynásobit jednotlivé účinnosti, které při procesu probíhají. Výsledek nejjednodušeji získáme převedením účinností z procent na zlomek:

$$0,2 = \frac{1}{5}, \quad 30\% = \frac{3}{10}.$$

Celkový výsledek pak získáme po vynásobení a zkrácení zlomku:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}.$$

Vzhledem k tomu, že naše odpověď má být ve formě procent, musíme zlomek rozšířit na zlomek se jmenovatelem 100. Získaný výsledek tedy vynásobíme zlomkem $\frac{5}{5}$ a dostaneme výsledek $\frac{1}{20} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{100}$. Efektivita převodu energie je 5 %.

Příklad 10 ... Šachový král poprvé

Dan se snaží vyřešit zajímavý problém na nekonečné šachové desce. Dan ví, že král se může vždy pohybovat do všech políček, které s jeho původním políčkem sdílí hranu nebo vrchol (tzn. sousedí svisle, vodorovně nebo diagonálně s původním polem). Zamyslí se tedy nad tím, kolik různých tahů (tedy různých cest) může král provést, pokud se pohne právě 3krát?

Výsledek: 512

Řešení:

Pokaždé, když se král pohne, tak má 8 možných políček, na která se může přesunout dál. Pro cestu složenou přesně ze tří tahů jsou volby nezávislé, takže celkový počet takových cest je $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Příklad 11 ... Závod v parku

Honza a Sofie šli běhat do parku, ve kterém našli krásnou 1 km dlouhou běžeckou dráhu. Každý z nich si tedy stoupnul na jeden konec dráhy a ve stejném momentě vystartovali směrem ke druhému konci dráhy. Potkali se přesně po 2 minutách, během kterých Sofie uběhla 600 m. O kolik sekund dřív než Honza dorazí Sofie na druhý konec běžecké dráhy?

Výsledek: 100

Řešení: Sofie uběhla $s_S = 600$ m za $t = 2$ minuty, takže její průměrná rychlost je $v_S = \frac{s_S}{t} = \frac{600 \text{ m}}{2 \text{ minute}} = 5 \text{ m/s}$. Uběhnout celou délku běžecké dráhy $s = 1000$ m jí bude trvat $t_S = \frac{s}{v_S} = \frac{1000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 200 \text{ s}$.

Podobně uběhne Honza vzdálenost $s_H = 400$ m za $t = 2$ minuty, což znamená, že jeho průměrná rychlost je $v_H = \frac{s_H}{t} = \frac{400 \text{ m}}{2 \text{ minute}} = \frac{10}{3} \text{ m/s}$. Na uběhnutí celé dráhy, která měří $s = 1000$ m potřebuje Honza $t_H = \frac{s}{v_H} = \frac{1000 \text{ m}}{\frac{10}{3} \text{ m/s}} = 300 \text{ s}$. Z výpočtu vidíme, že Sofie proběhne celou trasu o $t_H - t_S = 300 \text{ s} - 200 \text{ s} = 100 \text{ s}$ rychleji než Honza.

Příklad 12 ... Narozeniny s tělesem

Májina mladší sestra bude mít narozeniny. Mája ví, že oblíbené číslo její sestřičky je 30, proto se rozhodla jí dát k narozeninám těleso s povrchem 30 cm^2 . Toto těleso vytvoří slepováním dřevěných kostiček o délce hrany 1 cm a to tak, že dvě sousední kostky k sobě slepí vždy celými stranami. Jaký je nejmenší možný počet kostiček, které Mája potřebuje k vytvoření narozeninového dárku (tělesa) pro svou sestru?

Výsledek: 7

Řešení: Chceme, aby povrch tělesa byl co největší za použití co nejmenšího množství kostiček. Proto potřebujeme, aby každá krychle byla spojena s celým tělesem co nejmenším počtem stran. Z tohoto důvodu slepíme krychle do jedné dlouhé řady (vytvoříme tak kvádr). Dvě krychle na koncích této řady budou mít 5 odkrytých stran a všechny krychle mezi nimi budou mít 4 odkryté strany. Jelikož strany kostiček mají plochu 1 cm^2 a chceme, aby celkový povrch byl 30 cm^2 , dostaneme rovnici $5 \text{ cm}^2 + x \cdot 4 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$, kde x je počet kostek mezi dvěma koncovými kostkami. Po úpravě dostaneme

$$x \cdot 4 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2.$$

Jednoduše dopočítáme výsledek $x = 5$. Kromě těchto pěti kostek máme ještě 2 koncové, proto nejmenší možný počet kostek je $2 + 5 = 7$ kostek.

Příklad 13 ... Sbírání vojáků

Matylda je opravdu vášnivá sběratelka cínových vojáků. Jednoho dne se rozhodla, že všechny své vojáčky dá na čtverečkový papír se stejným počtem řad a sloupců. Víme, že normální voják zabere právě jeden čtvereček, zatímco generál zabere plochu 3×3 čtverečky. Matylda spočítala své vojáčky a zjistila, že jich má celkem 1929. Dala své vojáčky na čtverečkový papír tak, že žádný čtvereček není prázdný a žádní dva vojákci spolu nesdílejí své místo. Jaký je nejmenší počet řad čtverečků, které potřebujeme k tomu, abychom splnili všechna kritéria?

Výsledek: 45

Řešení: V rámci řešení úlohy potřebujeme najít nejmenší možnou druhou mocninu (číslo které získáme vynásobením dvou stejných celých čísel), která může být napsána jako součet celkem 1929 čísel – jedniček a devítek. Správná odpověď pak bude odmocninou tohoto součtu. Představme si, že mezi vojáčky není žádný generál. V tomto případě obsadí 1929 čtverečků. Vzhledem k tomu, že odmocněním tohoto čísla nezískáme celé číslo, tak musíme nahradit nějaké vojáčky většími generály. Tímto způsobem zvýšíme číslo obsazených políček o $9 - 1 = 8$. Můžeme tedy takto všechny možné způsoby obsazení pole vojáků napsat ve formě $1929 + 8k$, kde k je nějaké nezáporné celé číslo. Hledáme nejmenší mocninu celého čísla, která je větší než 1929 a může být zapsána výše zmíněným způsobem. První následující mocnina je $44 \cdot 44 = 1936$. Toto číslo je ale sudé, proto určitě nemůže být zapsáno jako $1929 + 8k$. Následující celá mocnina je $45 \cdot 45 = 2025$, která může být zapsána v potřebném tvaru ($1929 + 8k = 2025$ pokud $k = 12$). Tímto způsobem tedy jasně můžeme vojáčky poskládat na čtverečkový papír, a to za použití $(2025 - 1929) : 8 = 12$ generálů, kteří zabírají větší plochu. Pozice generálů na čtverečkovém papíře neovlivní potřebný počet políček. Odmocněním počtu zabraných políček zjistíme, že minimální počet řad na Matyldině čtverečkovém papíře je $\sqrt{2025} = 45$.

Příklad 14 ... Zbytečná práce

Skupina kamarádů se snaží napustit bazén, který má rozměry $15\text{ m} \times 6\text{ m} \times 2\text{ m}$. Ella se snaží vodu nosit hrníčkem, do kterého může vždy nabrat 250 ml. Umyvadlo, kde nabírá vodu je ale od bazénu daleko, a proto jí cesta k umyvadlu a zpátky trvá vždy dohromady 30 sekund. Josef je o něco chytřejší a vodu nosí v PET lahvi, která má objem 0,5 l. Vzhledem k tomu, že tuto láhev trvá déle napustit, tak ji zvládne do bazénu nalít každou 1 minutu. Markéta nosí do bazénu vodu z nedalekého potoka kyblíkem o objemu 10 dm^3 . Potok je ale od bazénu o trochu dále, a tak ho zvládne do potoka nalít každých 5 minut. Po chvíli, kdy to vypadá, že napouštění bude trvat opravdu dlouho to kamarádi vzdají, ale i tak by je zajímalo, jak dlouho by jim to trvalo. Pomozte kamarádům vypočítat, kolik hodin by jim napouštění bazénu trvalo?

Výsledek: 1000

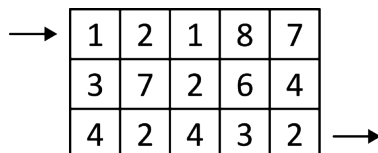
Řešení: Objem bazénu je $V = 15\text{ m} \cdot 6\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 180\text{ m}^3$. Nejrychleji k výsledku dojdeme, když si vypočteme, jaký objem vody donese každý z přátel do bazénu za určitou jednotku času, v našem případě 1 hodinu.

- Ella napustí svůj hrníček $\frac{3600\text{ s}}{30\text{ s}} = 120$ krát za hodinu. Každou hodinu tedy do bazénu donese $120 \cdot 250\text{ ml} = 30\,000\text{ ml} = 30\text{ l}$ vody.
- Josef napustí svou PET láhev $\frac{60\text{ min}}{1\text{ min}} = 60$ krát za hodinu. Takto každou hodinu zvětší objem vody v bazénu o $60 \cdot 0,5\text{ l} = 30\text{ l}$.
- Markéta v potoce nabere vodu $\frac{60\text{ min}}{5\text{ min}} = 12$ krát za hodinu. Tímto způsobem je schopna přinést do bazénu $12 \cdot 10\text{ dm}^3 = 120\text{ l}$ za hodinu.

Celkově napustí skupina kamarádů do bazénu každou hodinu $30\text{ l} + 30\text{ l} + 120\text{ l} = 180\text{ l} = 0,18\text{ m}^3$ vody. To znamená, že jejich rychlost napouštění vody do bazénu je $v = 0,18\text{ m}^3/\text{h}$. Celkově by jim tedy napouštění vody do bazénu trvalo $t = \frac{V}{v} = \frac{180\text{ m}^3}{0,18\text{ m}^3/\text{h}} = 1000\text{ h}$.

Příklad 15 ... Magický park

Anežka ráda chodí po parku a sbírá květiny. Park, který navštívila dnes, je složen z 15 oddělených záhonů způsobem, který je zobrazen na obrázku. Číslo napsané v políčku označujícím záhon značí počet květin, které na daném záhonu rostou a Anežka je tedy může posbírat. Anežka vejde do parku vchodem na záhon označený šipkou, na kterém roste 1 květina. Při procházce parkem může Anežka přecházet pouze zmezi záhony, kterým spolu sdílí společnou stranu (nelze přecházet ze záhonu na jiný, pokud spolu sdílí pouze vrchol). Anežka na své procházce nemusí navštívit všechny záhony, ale z parku odejde východem označeným šipkou ven přes záhon s počtem květin 2. Anežka také nesmí navštívit žádný záhon více než jednou. Anežka ví, že park je magický a že vždy když nasbírala sudý počet květin, tak rázem všechny zmizely a musela je začít sbírat z její nové pozice od znova. Jaký je maximální počet květin, které může mít Anežka po procházce?

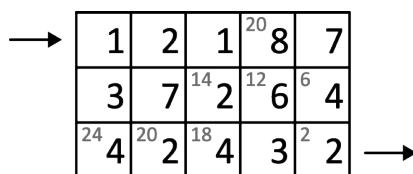


1	2	1	8	7
3	7	2	6	4
4	2	4	3	2

Výsledek: 27

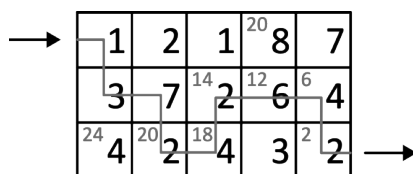
Řešení:

U východu z parku musí Anežka mít lichý počet květin (aby jí nezmizely). Vzhledem k tomu, že sudé + liché číslo = liché číslo, tak Anežka potřebuje na začátku sebrat liché číslo květin a následně může projít jakýkoliv počet sudých políček. Hledáme tedy sekvenci, která začne lichým číslem a následně pokračuje přes sudá políčka až do východu. Vzhledem k tomu, že nevíme, na jakém lichém políčku naše sekvence začne, je pro nás nejvýhodnější začít u východu a postupovat po sudých políčkách zpět ke vstupu do parku. Cestou si šedými čísly budeme značit, kolik květin tímto způsobem bude moct Anežka posbírat.



			²⁰	
		¹⁴	¹²	
²⁴	²⁰	¹⁸		²

Nyní hledáme takový lichý záhon, který sousedí s jedním z označených záhonů, u kterého platí, že pokud sečteme šedé číslo na označeném záhoně a číslo na lichém záhoně, dostaneme maximální možný součet. Pokud zkontrolujeme všechny záhony (naše možnosti jsou záhony s čísly 1, 3 a 7), zjistíme, že maximální součet je 27. Pak už zbývá jen zkontrolovat, zda můžeme opravdu začít u vchodu a poté sesbírat květiny z požadovaných záhonů s lichým číslem tak, abychom před jejich sbíráním měli sudý počet květin (aby nám neunikly květiny ze záhonu s lichým číslem). Jedna z možných tras je znázorněna na obrázku.

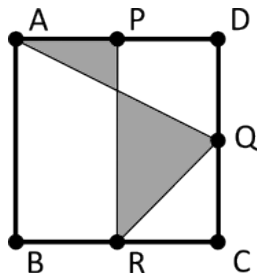


			²⁰	
		¹⁴	¹²	
²⁴	²⁰	¹⁸		²

Tímto způsobem si může Anežka odnést maximálně 27 květin

Příklad 16 ... Vybarvování loga

Anička vytváří logo pro svoji nově založenou společnost. Začala tak, že nakreslila čtverec $ABCD$ o délce strany 12 dm. Následně vybrala 3 speciální body P , Q , R , kde bod P je středem strany DA , Q je střed strany CD a bod R je střed strany BC . Potom se Anička rozhodla, že zakreslí úsečky AQ , PR , a RQ . Ve svém finálním logu se rozhodla, že použije jen plochu vybarvenou šedou barvou.



Anička nyní chce vybarvit logo oranžovou barvou, kterou může koupit jenom v tubách, z nichž je každá schopná pokrýt 5 decimetrů čtverečních jejího loga. Kolik tub barvy musí Anička koupit, aby jí vystačily na vybarvení celého loga?

Výsledek: 8

Řešení:

Jako první musíme spočítat plochu šedé části, která je složená ze dvou trojúhelníků. Na spočtení plochy trojúhelníku potřebujeme znát délku jedné ze stran a také její výšku, které mezi sebou vynásobíme a následně ještě vydělíme dvěma. Pro náš případ je nejjednodušší jako podstavu počítat stranu ležící na úsečce PR . Jednoduše také můžeme zjistit výšku na tuto stranu a to díky tomu, že úsečka, na které strany leží spojuje 2 středy úseček. Výška, kterou hledáme, je tedy $12 \text{ dm} : 2 = 6 \text{ dm}$.

Součet plochy dvou trojúhelníků se stejnou výškou je stejný jako součet jejich základů vynásobených výškou jednoho z nich a následně vydělený 2. Součet základů je jednoduchý na vypočtení – je to délka úsečky PR , která má stejnou délku jako strana čtverce (12 dm). Společná výška je 6 dm, takže součet obarvené plochy trojúhelníků je $\frac{12 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm}}{2} = 36 \text{ dm}^2$.

Anička potřebuje koupit tubu barvy na každých 5 dm^2 , což znamená, že potřebuje alespoň $\frac{36 \text{ dm}^2}{5 \text{ dm}^2} = 7,2$ tub barvy. Vzhledem k tomu, že nemůže koupit neceločíselný počet tub barvy, musela Anička koupit 8 tub barvy na obarvení svého nového loga.

Příklad 17 ... Volná hodina

Jonáš se zaradoval, že mu ve škole odpadla poslední hodina tělocviku. Protože ale bydlí na vesnici za městem, kam jezdí autobusy jen občas, musel zavolat své mamince, aby ho přijela vyzvednout dříve. Aby si Jonáš vynahradil pohyb, o který přišel, rozhodl se, že poběží své mamince naproti. Jonášův dům je od školy vzdálen 2,5 km. Jonáš je rychlý a vytrvalý běžec, takže zvládne celou dobu, než se potká se svou maminkou, běžet rychlostí 10 km/h. Jonášova maminka je ale opatrná řidička a jede tedy konstantní rychlostí 50 km/h. O kolik sekund dříve se Jonáš dostane domů dříve, když poběží své mamince naproti a nebude na ni čekat u školy?

Poznámka:

Počítejme, že Jonáš vyběhne hned, když zavěsí telefonát se svou maminkou. Maminka také z domu vyjede hned v momentě, kdy jí Jonáš zavěsí telefon. Zanedbejme čas, kdy Jonáš bude nastupovat do auta. Zanedbejme také zrychlování a zpomalování auta (počítejme, že jede stále konstantní rychlostí)

Výsledek: 60

Řešení:

V řešení budeme vzdálenost ze školy k Jonášovi domů označovat jako d , rychlost maminky v autě jako v_m a Jonášovu rychlost jako v_J . Jako první najdeme čas t_1 , který by Jonáš potřeboval, aby se dostal domů, pokud by neběžel naproti své mamince. V tomto případě by maminka musela ujet vzdálenost $2d$, a to kvůli cestě do školy a zpět, což by jí trvalo $t_1 = \frac{2d}{v_m}$. Dosazením získáme

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0,1 \text{ h} = 6 \text{ min.}$$

Nyní pojďme zjistit čas t_2 , který Jonáš strávil na cestě domů, pokud běžel naproti své mamince. Tento čas můžeme najít jako $t_2 = t_{2A} + t_{2B}$, kde t_{2A} je čas, který Jonáš stráví na cestě, dokud se nepotká s maminkou a t_{2B} je čas od momentu, kdy se setkají, do té doby, než se dostanou domů. Relativní rychlost maminky a Jonáše je $v_m + v_J$. Proto pokud chceme vědět, kdy se potkají, můžeme si představit situaci jakože jeden z nich potřebuje ujet/uběhnout vzdálenost d rychlostí $v_m + v_J$. Z této informace zjistíme čas t_{2A} jako:

$$t_{2A} = \frac{d}{v_m + v_J} = \frac{2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h} + 10 \text{ km/h}} = \frac{1}{24} \text{ h.}$$

Čas t_{2A} je ten, který potřebuje maminka na to, aby se dostala na místo setkání. Vzhledem k tomu, že se ale její rychlost v průběhu nemění, tak můžeme počítat že jí bude trvat stejně dlouho se dostat z tohoto místa i domů. Čas t_2 tedy vyjádříme jako:

$$t_2 = t_{2A} + t_{2B} = 2 \cdot t_{2A} = \frac{2}{24} \text{ h} = \frac{1}{12} \text{ h} = 5 \text{ min}$$

Rozdíl od prvního scénáře je $t_1 - t_2 = 6 \text{ min} - 5 \text{ min} = 1 \text{ min}$, což je 60 s.

Příklad 18 ... Levné vytápění

Vašek, jehož tělesná teplota je 37°C , stojí uprostřed izolované a plně uzavřené místnosti. Všechn vzduch, který je také v místnosti, váží 6 kg a má počáteční teplotu 20°C . Po dvou minutách stání v místnosti si Vašek všimne, že teplota vzduchu vzrostla na 22°C , ale jeho tělesná teplota stále zůstala stejná. Jaký je průměrný výkon přenosu tepla ve wattech mezi Vaškovou kůží a okolním vzduchem?

Poznámka: Přesná tepelná kapacita vzduchu záleží na tom, jestli objem nebo tlak zůstává konstantní. Pokud je tlak konstantní, tak je tepelná kapacita vzduchu $c_p = 1005 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$. Pokud zůstává objem konstantní, tak je tepelná kapacita vzduchu $c_V = 718 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$.

Výsledek: 71,8

Řešení: Pokoj s Vaškem je perfektně uzavřený, objem vzduchu se tedy určitě nebude měnit. Musíme tedy použít tepelnou kapacitu s konstantním objemem c_V . Vzduch o hmotnosti $m = 6 \text{ kg}$ se oteplí z $t_0 = 20^\circ\text{C}$ na $t_1 = 22^\circ\text{C}$. To tedy znamená, že vzduch přijme z okolí teplo $Q = c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$. Vzhledem k tomu, že se teplota Vaškova těla nezměnila, bude platit vztah $W = Q$. Celý proces výměny tepla probíhal $\tau = 120 \text{ s}$. Nakonec můžeme průměrný tepelný výkon Vaškova těla vypočítat jako:

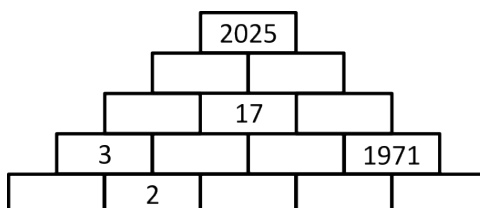
$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)}{\tau} = \frac{718 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C}) \cdot 6 \text{ kg} \cdot (22^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{120 \text{ s}} = 71,8 \text{ W.}$$

Příklad 19 ... Kleopatřina pyramida

Kleopatra přikázala Egyptanům, aby jí postavili slušné místo k posmrtnému odpočinku. Samozřejmě chce, aby bylo ve tvaru pyramidy. Pro stavitele nakreslila plán, který vidíte na obrázku. Kleopatra má ráda matematiku, chce proto, aby byla každá cihla vyplněná kladným celým číslem. Má také následující požadavky:

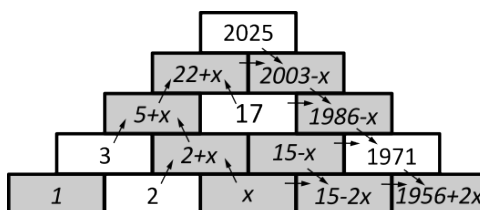
- žádné dvě cihly nemají mít stejné číslo;
- číslo na každé cihle (kromě cihel ve spodní řadě) má být součet čísel dvou cihel, na kterých daná cihla leží.

Stavitelům se splnění Kleopatřiných požadavků podařilo. Jaký je součet čísel ve spodní řadě pyramidy?

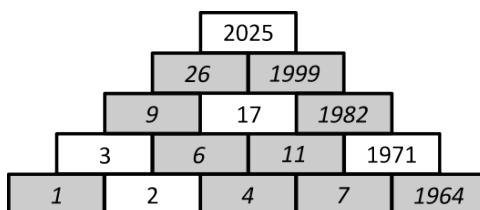


Výsledek: 1978

Řešení: Je jasné, že jediné kladné číslo, které můžeme napsat do cihly nejvíce vlevo ve spodní řadě, je číslo $3 - 2 = 1$. Nyní označme číslo uprostřed spodní řady x . Pravidlo součtové pyramidy nyní vyžaduje, aby pro ostatní čísla platily vztahy na následujícím obrázku:



Nyní potřebujeme najít všechny hodnoty x , pro které je každý z prvků pyramidy různé kladné celé číslo. Čísla 1, 2 a 3 jsou již použita, proto $x \geq 4$. Hned si dokážeme, že jiná hodnota než $x = 4$ nesplňuje všechny požadavky. Předpokládejme, že $x \geq 5$. V takovém případě $15 - 2x \leq 5$. Kdybychom použili $x = 5$, číslo $15 - 2x$ by také bylo rovno 5 – dochází ke sporu. Kdyby bylo $x > 5$, číslo $15 - 2x$ by bylo nejvýše 3 – aby bylo kladné, muselo by mít jednu z hodnot 1, 2, nebo 3, které jsou již použity – opět dochází ke sporu. Ukázali jsme, že $x = 4$. Nyní jednoduše dopočítáme celou pyramidu a můžeme se ujistit, že se od sebe všechny prvky pyramidy skutečně liší:



Nakonec už jen spočítáme součet spodní řady: $1 + 2 + 4 + 7 + 1964 = 1978$.

Příklad 20 ... Pod tlakem

Anička s Maruškou milují odměrné válce. Anička má odměrný válec s poloměrem podstavu 5 cm, zatímco Maruška poloměr podstavu svého válce nezná. Anička proto Marušce slíbila, že jí poloměr pomůže najít. Sice nemá pravítko, vlastní ale přístroj, který umožňuje změřit hydrostatický tlak u dna válců. Když Anička do svého odměrného válce nalila určité množství neznámé kapaliny, zjistila, že je u dna hydrostatický tlak 50 000 Pa. Potom stejný objem této kapaliny nalila do Maruščina válce a zjistila, že je u dna hydrostatický tlak 12 500 Pa. Jaký je poloměr Maruščina válce v centimetrech?

Poznámka: Oba válce byly dostatečně vysoké na to, aby zvolený objem kapaliny nepřetekl.

Výsledek: 10

Řešení: Vzorec pro výpočet hydrostatického tlaku je $p = \rho_{\text{kapalina}}gh$. Jak ρ_{kapalina} , tak g byly v obou případech stejné, jejich součin tedy můžeme označit za konstantu $k = \rho_{\text{kapalina}}g$. Pokud tedy označíme Aniččin válec indexy A a Maruščin válec indexy M , získáváme rovnice:

$$p_A = k \cdot h_A, \quad p_M = k \cdot h_M,$$

kde h_A a h_M jsou výšky kapaliny ve válcích. Jelikož je konstanta k stejná v obou rovnicích, můžeme tyto dvě rovnice přepsat do jedné:

$$\frac{p_A}{h_A} = \frac{p_M}{h_M}.$$

Nyní můžeme výšky h_A a h_M vyjádřit pomocí objemu tekutiny V a poloměrů r_A a r_M podstav válců:

$$h_A = \frac{V}{\pi r_A^2}, \quad h_M = \frac{V}{\pi r_M^2}.$$

Dosadíme-li toto do rovnice, získáme:

$$\begin{aligned} \frac{p_A \cdot \pi r_A^2}{V} &= \frac{p_M \cdot \pi r_M^2}{V}, \\ p_A \cdot r_A^2 &= p_M \cdot r_M^2. \end{aligned}$$

Odsud už jen vyjádříme r_M a dostaneme tak výsledek:

$$r_M = \sqrt{\frac{p_A \cdot r_A^2}{p_M}} = r_A \sqrt{\frac{p_A}{p_M}} = 0,05 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{50\,000 \text{ Pa}}{12\,500 \text{ Pa}}} = 0,1 \text{ m}.$$

Podstava Maruščina válce má poloměr 10 cm.

Příklad 21 ... Lichá pohádka

Julie dostala od své babičky knihu obsahující 50 pohádek. Každá z pohádek měla jiný počet stran a to od 1 až do 50. Julie si všimla, že každá pohádka vždy začíná na nové straně a že první pohádka začíná na straně 1. Jaký je největší možný počet pohádek, které začínají na liché straně?

Výsledek: 38

Řešení:

Knihy se skládá z 25 pohádek se sudým počtem stran a 25 pohádek s lichým počtem stran. Každá pohádka se sudým počtem stran nemění paritu počáteční strany následující pohádky, což znamená, že pokud začíná na sudé straně, další pohádka také začíná na sudé straně. Abychom maximalizovali počet pohádek začínajících na lichých stranách, chceme, aby každá pohádka se sudým počtem stran začínala na liché straně. Potom všech 25 pohádek se sudým počtem stran začne na lichých stranách.

Situace je odlišná u pohádek s lichým počtem stran. Každá z nich mění paritu počáteční strany následující pohádky. Abychom maximalizovali počet pohádek začínajících na lichých stranách, můžeme začít první pohádku s lichým počtem stran na liché straně, po čemž se počáteční strana každé následující pohádky s

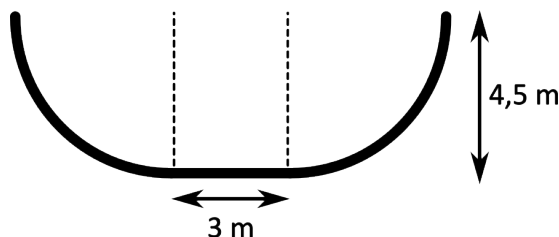
lichým počtem stran střídá mezi lichou a sudou. Proto mezi 25 pohádkami s lichým počtem stran začne 13 na lichých stranách a 12 na sudých stranách.

Proto maximálně $25 + 13 = 38$ pohádek může začínat na liché straně.

Příklad 22 ... U-rampa

Snowboardisté jezdí na svých snowboardech po U-rampě. Ta se skládá ze dvou čtvrtkruhových částí s poloměrem 4,5 m, které jsou od sebe vzdáleny 3 m. Předpokládejme, že snowboard je prkno, jehož koeficient tření s kruhovými částmi U-rampy je 0 a s vodorovnou částí U-rampy je 0,05. Snowboardista o hmotnosti 80 kg sjede po takové U-rampě z úplného vrcholu rampy, avšak bez žádného odrazu (tedy žádné počáteční rychlosti). Kolikrát projede vodorovnou část U-rampy (v libovolném směru), než se zastaví?

Poznámka: Předpokládejme, že na snowboardistu nepůsobí žádné jiné síly než tíhová a třecí síla.



Výsledek: 30

Řešení:

Na začátku je celková energie snowboardisty rovna jeho potenciální energii. Ta je rovna $E_p = mgr$, kde $m = 80$ kg je jeho hmotnost a $r = 4,5$ m je poloměr čtvrtkruhových částí (zároveň i výška nad zemí, ze které začíná).

Snowboardista neztrácí energii na čtvrtkruhových částech. Energii ztrácí pouze na vodorovných částech kvůli tření. Koeficient tření je $f = 0,05$, takže velikost třecí síly je $F_f = mgf$. Tato síla působí po celé délce vodorovné části o délce $s = 3$ m. Síla vykoná práci $W = Fs = mgfs$ na snowboardu. Případně snowboardista musí vykonat tuto práci, aby překonal tření. Proto se jeho energie při každém průjezdu vodorovnou částí sníží o W .

Po n průjezdech se energie snowboardisty sníží o nW . Hledáme nejmenší číslo n , pro které rozdíl $E_p - nW$ klesne pod 0 – protože to určuje průjezd, během kterého se snowboardista zastaví. Získáme tak rovnici:

$$\begin{aligned} E_p - nW &\leq 0, \\ E_p &\leq nW, \\ n &\geq \frac{E_p}{W} = \frac{mgr}{mgfs} = \frac{r}{fs} = \frac{4,5 \text{ m}}{0,05 \cdot 3 \text{ m}} = 30. \end{aligned}$$

Snowboardista se tedy zastaví po 30. průjezdu vodorovnou částí.

Příklad 23 ... Kámen, nůžky, papír

Marie a Mirko hrají hru Kámen, nůžky, papír. Hra probíhá tak, že Marie a Mirko ukáží ve stejný moment jeden ze symbolů: kámen, nůžky nebo papír. Pokud ukáží stejný symbol, hra končí remízou. V opačném případě kámen porazí nůžky, nůžky porazí papír a papír porazí kámen. Marie a Mirko si v průběhu hry dělají statistiku výsledků. Během hry zahráli v součtu kámen 27krát, nůžky 24krát a papír 25krát. Celkem 19 her dopadlo remízou. Kámen vyhrál v 10 případech a prohrál v 7 případech. Kolikrát vyhrály nůžky nad papírem?

Výsledek: 2

Řešení: Celkový počet symbolů za hru byl $27 + 25 + 24 = 76$. V každé hře se vždy ukáží dva symboly, takže se hrálo $76 : 2 = 38$ her. V 19 z nich byla remíza, v ostatních $38 - 19 = 19$ vždy jeden ze symbolů vyhrál. Z těchto her kámen vyhrál desetkrát a prohrál sedmkrát. Ve zbylých $19 - 10 - 7 = 2$ hrách se vyskytovaly pouze symboly papíru a nůžek. Jelikož nůžky vždy vyhrávají nad papírem, vyhrály přesně pouze v těchto hrách, tedy dvakrát. Pozn.: Můžeme si ověřit, že je opravdu možné, aby tato situace nastala. Z předchozích znalostí o výhrách můžeme odvodit, že remíza kamenů byla pětkrát, remíza nůžek sedmkrát a remíza papírů osmkrát.

Příklad 24 ... Pirátská truhla

Čtyři piráti našli truhlu s pokladem. Hned se začali hádat o to, komu truhla připadne. Hádky nakonec vyvrcholila v to, že se o truhlu začali přetahovat. Jack táhl truhlu směrem na sever silou 75 N. Barbara táhla truhlu na východ silou 120 N. Clark táhl truhlu směrem na jih silou 100 N. A poslední z pirátů, Davy, táhl truhlu směrem na západ silou 60 N. Jaká bude velikost výsledné síly působící na truhlu v Newtonech?

Výsledek: 65

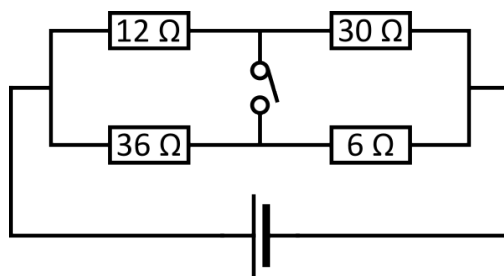
Řešení: Nejprve se podívejme na síly v severním a jižním směru. Truhla je tažena na sever silou 75 N a na jih silou 100 N. Výslednice těchto dvou sil bude mít velikost $100 \text{ N} - 75 \text{ N} = 25 \text{ N}$ směrem na jih. Podobně se podíváme i na síly ve východním a západním směru. Truhla je tažena na východ silou 120 N a na západ silou 60 N. Výslednicí bude síla o velikosti $120 \text{ N} - 60 \text{ N} = 60 \text{ N}$ působící směrem na východ. Výslednice veškerých sil bude přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami velikosti 25 N a 60 N. Pythagorovou větou můžeme sílu dopočítat jako

$$F = \sqrt{(25 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2} = 5\sqrt{5^2 + 12^2} \text{ N} = 5 \cdot 13 \text{ N} = 65 \text{ N}.$$

Výsledná síla působící na truhlu bude mít velikost 65 N.

Příklad 25 ... Odporná změna

Ludvík jednou vyklízel půdu a narazil na krabici se starými hračkami svého dědečka. Mimo jiné našel v této krabici také rezistory s odpory 6Ω , 12Ω , 30Ω a 36Ω . Také našel zdroj s napětím 3 V. Ludvík součástky použil k vytvoření obvodu (viz obrázek) a změřil proud protékající obvodem. Poté zapnul spínač. O kolik ampérů se zvýšil proud, který obvodem protéká? Výsledek uveďte ve formě zlomku v základním tvaru.



Výsledek: $\frac{1}{14}$

Řešení: Odpory rezistorů si označme jako $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ a $R_4 = 36 \Omega$. Spočítáme proud, který protéká obvodem v jednotlivých případech. Nejprve uvažujme případ s otevřeným vypínačem (elektrina jím tedy neprotéká). V tomto případě máme paralelní zapojení dvou částí. V horní části bude odpor $R_h = R_2 + R_3 = 42 \Omega$, ve spodní části bude odpor $R_s = R_1 + R_4 = 42 \Omega$. Celkový odpor těchto dvou částí bude $R'_1 = \frac{R_h \cdot R_s}{R_h + R_s} = \frac{42 \Omega \cdot 42 \Omega}{42 \Omega + 42 \Omega} = 21 \Omega$. Protože napětí zdroje je $U = 3 \text{ V}$, proud protékající obvodem musí být

$$I_1 = \frac{U}{R'_1} = \frac{3 \text{ V}}{21 \Omega} = \frac{1}{7} \text{ A}.$$

Podobně můžeme postupovat i v případě, kdy je spínač spojen (elektrina jím tedy proudí). V takovém případě máme dvě paralelní větve zapojené do série. První část má odpor $R'_{21} = \frac{36 \Omega \cdot 12 \Omega}{36 \Omega + 12 \Omega} = 9 \Omega$. Druhá část má

odpor $R'_{22} = \frac{30\Omega \cdot 6\Omega}{30\Omega + 6\Omega} = 5\Omega$. Dopočítáme celkový odpor, který je $R'_2 = R'_{21} + R'_{22} = 9\Omega + 5\Omega = 14\Omega$. Proud protékající obvodem se sepnutým spínačem tudíž bude

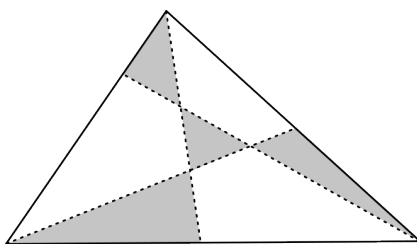
$$I_2 = \frac{U}{R'_2} = \frac{3\text{ V}}{14\Omega} = \frac{3}{14}\text{ A}.$$

Po spojení obou částí spínače se tedy proud zvýší o

$$\Delta I = I_2 - I_1 = \frac{3}{14}\text{ A} - \frac{1}{7}\text{ A} = \frac{1}{14}\text{ A}.$$

Příklad 26 ... Plocha hřiště

Zastupitelstvo města Nábojníkov se rozhodlo postavit nové dětské hřiště. Než však začnou přemýšlet o prolézačkách, potřebují vymyslet, jak bude vypadat plocha hřiště. Hřiště bude mít trojúhelníkový tvar s obvodem 27 m. Budou ho křížovat rovné cestičky, které ho rozdělí na několik částí způsobem, jak je znázorněno na obrázku. Šedé části budou obsahovat štěrk a součet jejich obvodů bude 30 m. Bílé části budou pokryté tartanem a součet jejich obvodů bude 33 m. Jaký je součet délek všech cest (tečkované čáry) na hřišti v metrech?



Výsledek: 18

Řešení:

Na obrázku jsou dva typy úseček:

- 1) ty, které znázorňují cestu (tečkované);
- 2) ty, které zobrazují okraj hřiště.

Úloha nás žádá o nalezení součtu délek úseček prvního typu. Víme, že součet délek úseček druhého typu je obvod hřiště, což je 27 m.

Trik spočívá v tom, že si spočítáme součet celkového obvodu šedých částí a celkového obvodu bílých částí, což je $30\text{ m} + 33\text{ m} = 63\text{ m}$. Všimněte si, že každá úsečka prvního typu přispívá k tomuto součtu dvojnásobkem své délky, zatímco každá úsečka druhého typu přispívá pouze jednou. Pokud tedy z našeho součtu odečteme obvod hřiště, o kterém víme, že je součtem délek úseček druhého typu, dostaneme, že $63\text{ m} - 27\text{ m} = 36\text{ m}$ je dvojnásobkem součtu délek úseček cest.

Posledním krokem musí být vydělení výsledku dvěma, abychom získali součet délek cest, který tedy je $36\text{ m} : 2 = 18\text{ m}$.

Příklad 27 ... Hydrostatická hádanka

Eliška si nedávno koupila nové kvádrové akvárium pro své rybičky. Teď přemýšlí, jakým způsobem ho nejlépe položit na stůl. Akvárium naplnila vodou do $\frac{2}{3}$ jeho objemu a uzavřela ho. Poté akvárium položila na stůl třemi různými způsoby a v každém případě změřila hydrostatický tlak na dně akvária. Tímto způsobem naměřila tlaky 4000 Pa, 10 000 Pa a 20 000 Pa.

Ačkoliv se Eliška o rybičkách nic nového nedozvěděla (není biologka a vůbec netuší, jak na ně tlak působí), tato měření jí překvapivě umožnila spočítat objem akvária. Jaký je objem akvária v litrech?

Výsledek: 2700

Řešení: Uvažujme, že a , b a c jsou rozměry akvária. Musíme tedy nějakým způsobem vyjádřit objem $V = abc$. Při řešení úlohy budeme tlaky, které Eliška naměřila, označovat $p_1 = 4000$ Pa, $p_2 = 10\,000$ Pa a $p_3 = 20\,000$ Pa.

Akvárium je naplněno vodou do $\frac{2}{3}$ svého objemu. Tím pádem vždy, když Eliška položí akvárium na jinou stranu, tak voda dosáhne vždy do $\frac{2}{3}$ aktuální výšky akvária. Máme tedy 3 možnosti, jak získat rovnici pro hydrostatický tlak:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{3}a\rho_{\text{voda}}g, \\ p_2 &= \frac{2}{3}b\rho_{\text{voda}}g, \\ p_3 &= \frac{2}{3}c\rho_{\text{voda}}g. \end{aligned}$$

Můžeme tedy vyjádřit rozměry akvária jako:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3p_1}{2\rho_{\text{voda}}g}, \\ b &= \frac{3p_2}{2\rho_{\text{voda}}g}, \\ c &= \frac{3p_3}{2\rho_{\text{voda}}g}. \end{aligned}$$

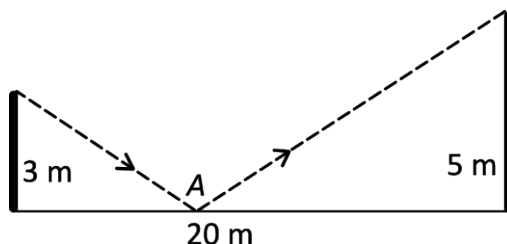
Objem akvária tedy je

$$V = abc = \frac{27p_1p_2p_3}{8\rho_{\text{voda}}^3g^3} = \frac{27 \cdot 4000 \text{ Pa} \cdot 10\,000 \text{ Pa} \cdot 20\,000 \text{ Pa}}{8 \cdot (1000 \text{ kg/m}^3)^3 \cdot (10 \text{ N/kg})^3} = 2,7 \text{ m}^3.$$

Úloha po nás chtěla, abychom vyjádřili objem akvária v litrech. Převedením na litry tedy získáme, že objem akvária je 2700 L.

Příklad 28 ... Laserová show

Ve městě Nábojníkov právě probíhá venkovní výstava moderního umění. Jedná se o instalaci dvou věží, z nichž první je vysoká 3 m a druhá měří 5 m. Věže jsou vzdáleny 20 m od sebe. Na vrcholu menší věže je umístěn laser, který je namířen na malé zrcadlo ležící na zemi (bod A na obrázku), od něhož se paprsek odráží a naprosto přesně zasahuje vrchol vyšší z věží (viz obrázek). Jaká je vzdálenost zrcadla od menší z věží? Výsledek uveďte v metrech.

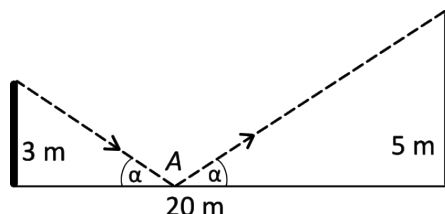


Poznámka: Obrázek není v měřítku zadaných hodnot.

Výsledek: 7,5

Řešení:

Světelný paprsek z laseru se odráží podle zákona odrazu, takže jeho úhel dopadu a úhel odrazu musejí mít stejnou velikost. Díky tomu se úhly označené α na následujícím obrázku vzájemně rovnají:



Můžeme vidět, že se nám na obrázku utvořily dva trojúhelníky. Oba mají jeden úhel o velikosti α a jeden pravý úhel. Jedná se tedy o podobné trojúhelníky. Proto můžeme říct, že vodorovná úsečka o délce 20 m je rozdělena na dvě části ve stejném poměru, jaký je poměr výšek věží, tedy 3 : 5. Kratší část bude dlouhá $\frac{3}{3+5} \cdot 20 \text{ m} = 7,5 \text{ m}$. Jinými slovy, zrcadlo musí být umístěno ve vzdálenosti 7,5 m od nižší věže.

Příklad 29 ... Střelba na terč

Když byl Joska mladý, byl moc šikovný ve střelbě na terč ze střechy jedoucího vlaku. Protože vlaky jsou dnes mnohem rychlejší než byl zvyklý, chtěl by tuto schopnost znovu trénovat. Postavil si tedy nepohybující se terč do vzdálenosti 48 metrů od rovné železniční trati. Potom vyskočil na střechu rychlíku projíždějícího po této trati, který se chystal kolem jeho terče projet konstantní rychlostí 56 m/s. Joska střílí kolmo k vlaku a jeho puška dokáže vystřelit náboje s rychlostí 192 m/s relativně k hlavní pušky. Kolik metrů od terče musí Joska být, když zmáčkne spoušť, aby zasáhl cíl? Předpokládejte, že na náboj nepůsobí žádný odpor vzduchu a že terč a Joska jsou přibližně ve stejné výšce nad zemí.

Poznámka: Tento pokus určitě nezkoušejte, mohla by vás poranit elektřina.

Výsledek: 50

Řešení: V tomto příkladu si rozdělíme problém na dva směry – po směru jízdy vlaku a směr na jízdu vlaku kolmý. V kolmém směru musí náboj urazit vzdálenost $s_k = 48 \text{ m}$. Protože náboj má rychlost ve směru kolmém na směr jízdy vlaku $v_k = 192 \text{ m/s}$, bude mu let trvat

$$t = \frac{s_k}{v_k} = \frac{48 \text{ m}}{192 \text{ m/s}} = 0,25 \text{ s}.$$

Nicméně náboj má i nenulovou rychlost ve směru jízdy vlaku. Za čas t , po který se vlak pohybuje rychlostí $v_v = 56 \text{ m/s}$, urazí vzdálenost

$$s_v = v_v t = 56 \text{ m/s} \cdot 0,25 \text{ s} = 14 \text{ m}.$$

Pokud chce Joska trefit terč, musí vystřelit ve vzdálenosti 14 m před tím, než vlak mine bod na trati, od kterého je terč nejbližší. V tomto okamžiku je tedy ve vrcholu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 14 m a 48 m. Podle Pythagorovy věty bude délka přepony tohoto trojúhelníku $\sqrt{(14 \text{ m})^2 + (48 \text{ m})^2} = 50 \text{ m}$. Toto je tedy vzdálenost Josky od terče, ve které musí vystřelit, aby terč trefil.

Příklad 30 ... Je to jednoduché, dokud...

Vendelín se o přestávce nudil, tak začal psát na tabuli čísla $1 + 2 + 3 + \dots + 101$ a pokoušel se je sečíst. Za chvíli vešla do třídy jeho učitelka matematiky, při pohledu na napsanou řadu čísel se usmála a řekla: „Zajímavé... Co kdybychom změnili některá znaménka plus na znaménka mínus? Mohli bychom takto získat výsledek 2025?“ To už tak snadné nebylo! Jaký je nejmenší možný počet kladných znamének, která musíme změnit na záporná, aby nám vyšel výsledek přesně 2025?

Výsledek: 17

Řešení: Použitím jednoduchého vzorečku z tabulky můžeme spočítat, že $1 + 2 + 3 + \dots + 101 = 5151$. Každým změněním znaménka $+$ na znaménko $-$ zmenšíme tento výsledek o dvojnásobnou hodnotu čísla, jehož znaménko změníme. Abychom změnili 5151 na 2025 nejmenším počtem změněných znamének, musíme začít u nejvyšších čísel. Výsledek součtu musíme snížit o $5151 - 2025 = 3126$. Součet čísel, u kterých změníme znaménko musí být $3126 : 2 = 1563$ (vyděleno dvěma, protože každá změna z $+$ na $-$ nám změní výsledek o dvojnásobek hodnoty změněného čísla). Změněná čísla jsou v průměru jistě menší než 100, takže potřebujeme změnit alespoň $1563 : 100 = 15,63$, tudíž alespoň 16 znamének. Pokud bychom změnili znaménka 16 nejvyšších čísel, dostaneme číslo $5151 - 2 \cdot (86 + 87 + \dots + 101) = 5151 - 2 \cdot (187 \cdot 8) = 5151 - 2992 = 2159$. To je však stále více než 2025, konkrétně o $2159 - 2025 = 134$. Abychom ještě odečetli 134, musíme změnit znaménko u čísla $134 : 2 = 67$. Takto dostaneme výsledek $2025 -$ po změnění $16 + 1 = 17$ plusových znamének na minusové.

Příklad 31 ... Neobvyklé topení

Anička si hraje s hopíkem s teplotou 20°C a měrnou tepelnou kapacitou $1250 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$. Hopík nejprve vyzvedne do výšky 2,5 m nad vodorovnou podložku a nechá ho padat a odrážet se. Pokaždé, když se hopík odrazí, ztratí nárazem polovinu své rychlosti. Uvažujme, že polovina energie ztracené při nárazu se přemění na teplo (a hopík neztrácí žádné teplo do okolí). Po nějakém čase zůstane hopík ležet na zemi. Jaká je teplota hopíku ve stupních Celsia v tomto okamžiku?

Výsledek: 20,01

Řešení: Označme m hmotnost hopíku. Jeho původní potenciální energie je $E_p = mgh$, kde $h = 2,5 \text{ m}$. Hopík postupně nárazy ztrácí energii, s každým odrazem nějakou její část. Pouze polovina ztracené energie se přemění na teplo, čímž přispívá k ohřívání hopíku. Protože hopík nakonec ztratí veškerou svou mechanickou energii a zastaví na zemi, přesně polovina původní potenciální energie se přemění na tepelnou energii hopíku. Tepelná energie přijatá hopíkem je tedy přesně $E_p/2$. Tato energie způsobí zvýšení teploty míčku s měrnou tepelnou kapacitou $c = 1250 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ o rozdíl Δt vyjádřený jako:

$$\begin{aligned} E_p/2 &= cm\Delta t, \\ \frac{mgh}{2} &= cm\Delta t, \\ \Delta t &= \frac{gh}{2c} = \frac{10 \text{ N/kg} \cdot 2,5 \text{ m}}{2 \cdot 1250 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})} = 0,01^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Teplota hopíku se tedy zvýší z původní teploty $t = 20^\circ\text{C}$ na novou teplotu $t' = t + \Delta t = 20^\circ\text{C} + 0,01^\circ\text{C} = 20,01^\circ\text{C}$.

Příklad 32 ... Mikádo

Alice hraje mikádo. Nejprve vzala 4 tyčky a hodila je na stůl. Náhodou se jí podařilo tyčky umístit takovým způsobem, že při pohledu shora se všechny setkávají v jednom bodě. Při pohledu shora také změřila ostré úhly mezi každou dvojicí tyček. Takto získala 6 úhlů. Pět z nich mělo velikosti 16° , 40° , 45° , 56° , a 61° . Alice vyprávěla o své hře Míše, která si všimla, že šestý úhel může mít za daných podmínek dvě různé velikosti, a tak se rozhodla spočítat tu větší z nich. K jaké velikosti úhlu ve stupních se Míša dostala?

Výsledek: 79

Řešení: Vezměme nejprve libovolnou trojici tyček a zamysleme se, co můžeme říct o ostrých úhlech mezi nimi. Nejprve dokážeme, že musí platit alespoň jedno z následujících tvrzení:

- Jeden z ostrých úhlů je součtem dvou zbývajících
- Všechny tři ostré úhly mají součet 180° .

Tři čáry rozdělí plný úhel na 3 dvojice úhlů se stejnými velikostmi. Maximálně jedna z těchto dvojic úhlů mohou být tupé nebo pravé úhly, jinak by plný úhel musel být větší než 360° . Můžeme z této skupiny tedy vybrat dvě dvojice ostrých úhlů. tyto dvě dvojice ostrých úhlů tedy jednoznačně předpovídají velikost třetího ostrého úhlu mezi třemi tyčkami. Nyní zbývá otázka, jaká je jeho velikost. Dva ostré úhly určitě sdílí jednu společnou přímkou. Nejprve předpokládejme, že jejich součet je menší než 90° , tedy jde o ostrý úhel a platí případ a). V opačném případě je jejich součet tupý úhel. Třetí ostrý úhel pak může být spočítán jako rozdíl tohoto tupého úhlu do 180° , což je případ b). Nyní se můžeme pustit do původního příkladu, ve kterém známe 5 ze 6 úhlů, tedy jistě musí existovat taková trojice, ve které známe všechny tři úhly. Tyto tři úhly musí splňovat jednu z výše uvedených podmínek. Žádná trojice úhlů nesplňuje podmínku b) vzhledem k tomu, že maximální součet tří úhlů je $45^\circ + 56^\circ + 61^\circ = 162^\circ < 180^\circ$. Dokážeme ale najít dvě trojice splňující podmínku a), konkrétně, $16^\circ + 40^\circ = 56^\circ$ a $16^\circ + 45^\circ = 61^\circ$. Vidíme tedy, že jistě máme dvě tyčky svírající úhel 16° . Máme tedy dvě trojice tyček obsahující tyčky s úhlem 16° a jednu další tyčku. Dále budeme používat obě nalezené trojice. Na úvod nakreslíme dvě čáry svírající úhel 16° . Nyní musíme přidat čáru tvořící úhly 40° a 45° s původními čarami tvořícími úhel 16° , přičemž tyto úhly se nesmí s úhlem 16° překrývat. Budeme tedy uvažovat dva následující případy:

Případ 1. Oba tyto úhly jsou na stejné straně. V tomto případě určitě vznikne ostrý úhel o velikosti $45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$. Nicméně, můžeme zkontrolovat, že všechny úhly jsou takové, jaké mají být.

Případ 2. Tyto dva úhly jsou na opačných stranách. V tomto případě existuje dvojice čar, která svírá úhel $45^\circ + 16^\circ + 40^\circ = 101^\circ$. Tento úhel je však tupý, tedy musíme vzít doplňkový úhel k tomuto úhlu 180° což je $180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$. Znovu můžeme snadno ověřit, že všechny ostatní úhly splňují zadané podmínky.

Nakonec tedy vidíme, že větší z dvou možností velikosti šestého úhlu je 79° .

Příklad 33 ... Průměrná děvčata

Květa a Kačka se učí o průměrech. Obě dívky napsaly na papír 8 různých přirozených čísel a spočítaly jejich aritmetické průměry. Květa dostala aritmetický průměr 45 a Kačka dostala aritmetický průměr 65. Potom si porovnaly čísla na svých papírech a zjistily, že právě jedno číslo mají napsané obě dvě. Rozhodly se tedy vzít druhý kus papíru a napsaly na něj všech 15 unikátních čísel, které se nacházely na původních papírech. Nakonec spočítaly aritmetický průměr čísel na tomto papíře a dostaly výsledek 57. Jaké je číslo, které měly původně napsané obě dvě?

Výsledek: 25

Řešení: Květa napsala 8 čísel s aritmetickým průměrem 45. Součet těchto 8 čísel musel být $8 \cdot 45 = 360$. Podobně Kačka napsala 8 čísel s aritmetickým průměrem 65, jejich součet tedy musel být $8 \cdot 65 = 520$. Součet všech čísel napsaných oběma dívkami tedy je $360 + 520 = 880$. Na třetí papír dívky napsaly $8 + 8 - 1 = 15$ čísel (číslo které měly původně obě napsaly jen jednou) s aritmetickým průměrem 57. Součet čísel na třetím papíře tedy byl $15 \cdot 57 = 855$, které je odlišné od součtu všech původních čísel 880. To znamená, že obě dívky původně měly společné číslo $880 - 855 = 25$.

Příklad 34 ... Bójky

Viktorova firma se rozhodla vyrábět bójky. Dokážou vyrobit červenou bójku jako balón s objemem 40 l a průměrnou hustotou 50 kg/m^3 . Z důvodů stability chtějí k bójce připevnit řetěz o zanedbatelném objemu tak, aby bójka měla 20 % objemu ponořeného pod hladinou. Délková hustota řetězu je 3 kg/m . Kolik metrů řetězu potřebuje Viktorova firma připevnit k bójce, aby bójka splňovala požadované parametry?

Výsledek: 2

Řešení: Nejprve si vysvětlíme pojem "délková hustota", kterou označíme λ . Z jednotek kg/m můžeme odhadnout, že řetěz s hmotností m a délkou ℓ má délkovou hustotu $\lambda = \frac{m}{\ell}$. V našem příkladu známe délkovou

hustotu $\lambda = 3 \text{ kg/m}$ a chceme spočítat hmotnost řetězu o délce ℓ . Když se vrátíme k našemu problému, máme bójku ve tvaru balónu s objemem $V = 40 \text{ l} = 0,04 \text{ m}^3$ a průměrnou hustotou $\rho = 50 \text{ kg/m}^3$. Tento balón má tedy hmotnost $m_0 = \rho V = 2 \text{ kg}$. Potřebujeme, aby bylo 20 % balónu ponořeno pod vodou, tedy potřebujeme výslednou průměrnou hustotu 20 % hustoty vody. Potřebujeme tedy hustotu $\rho' = \frac{20}{100} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 200 \text{ kg/m}^3$. Když k balónu připevníme řetěz se zanedbatelným objemem, objem bójky se nezvýší, takže zůstane V . Celková hmotnost bójky tedy musí být $m = \rho' V = 200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^3 = 8 \text{ kg}$. Připevněním řetězu tedy potřebujeme zvýšit hmotnost o $m - m_0 = 6 \text{ kg}$. Aby se tak stalo, musíme použít řetěz o délce

$$\ell = \frac{m - m_0}{\lambda} = \frac{6 \text{ kg}}{3 \text{ kg/m}} = 2 \text{ m}.$$

Příklad 35 ... Odporné rezistory

Kuba našel dva rezistory. Nezná jejich odpor a tak se rozhodl ho změřit. Nejprve je zapojil sériově a zjistil, že odpor tohoto zapojení je 64Ω . Potom je zapojil paralelně a získal zapojení o odporu 7Ω . Jaký je odpor v ohmech rezistoru s větším odporem?

Výsledek: 56

Řešení: Označme si odpory obou rezistorů R_1 a R_2 . Rovnice pro celkový odpor při sériovém zapojení je

$$R_1 + R_2 = 64 \Omega.$$

Podobně pro paralelní zapojení platí

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{7 \Omega}.$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou potřebujeme vyřešit. Pokud lehce upravíme druhou rovnici, můžeme ji zjednodušit pomocí první

$$\begin{aligned} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7 \Omega}, \\ \frac{64 \Omega}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7 \Omega}, \\ R_1 R_2 &= (7 \cdot 64) \Omega^2. \end{aligned}$$

To znamená, že pro čísla vyjadřující velikosti odporů obou rezistorů platí, že jejich součet je 64 a součin 448. Za předpokladu, že velikosti odporů jsou celá čísla, nám stačí z párů čísel, jejichž součin je 448, vybrat dvojici se správným součtem. Minimálně jeden z hledaných dělitelů 448 musí být dělitelný 8 (protože 448 je dělitelné $64 = 8^2$). Protože součet obou hledaných čísel je také dělitelný 8, musí to platit i pro druhé číslo. Tyto podmínky nám dávají jediné možné řešení – použít čísla 8 a 56, která vyhovují oběma zadaným podmínkám. Úloha se ptá na větší hodnotu z odporů obou rezistorů, což je 56Ω .

Příklad 36 ... Červená, nebo modrá

Verča si ráda hraje s čísly. Jednou si vybrala 20 různých celých kladných čísel, jejichž součet je 2025. Tyto čísla si v nějakém pořadí zapsala do kruhu modrou barvou. Poté se jen vždy podívala na sousední čísla a spočítala jejich rozdíl (vždy odčítala menší číslo od většího). Takto vypočítané rozdíly si červeně napsala do mezer mezi modrými čísly. Nakonec všech všech 20 červených čísel sečetla, jaké nejmenší číslo jí mohlo vyjít?

Výsledek: 40

Řešení: Označme si nejmenší modré číslo m a naopak to největší M . Nyní se podívejme na úsek na kružnici mezi těmito čísly (takovéto úseky jsou samozřejmě dva, my se teď ale budeme soustředit pouze na jeden). Nejmenší součet červených čísel v tomto úseku kružnice může být právě $M - m$.

Pokud jsou modrá čísla v daném úseku seřazena ve vzestupném pořadí od m až po M , např. ve tvaru $m < a_2 < \dots < a_n < M$, poté součet všech červených čísel v tomto úseku je

$$(a_1 - m) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (M - a_n) = M - m.$$

V jiném případě může někde hodnota klesnout. Musíme tedy po krocích zvýšit hodnotu z m na M , navíc musíme kompenzovat pokles hodnoty. Tedy se součet červených čísel zvýší nejméně o dvojnásobek poklesu hodnoty, nejedná se proto o optimální případ.

Našli jsme tedy minimální součet červených čísel v jednom úseku kružnice, úseky jsou ale dva a proto nejmenší součet všech červených čísel bude $2(M - m)$.

Teď už nám zbývá pouze najít nejmenší možný rozdíl $M - m$. Nejmenší rozdíl bychom získali, kdyby modrá čísla tvořila 20 po sobě jdoucích čísel (v tomto případě by se $M - m = 19$. To však není tento případ. Je vidět, že součet 20 po sobě jdoucích čísel je vždy roven 10násobku součtu největšího a nejmenšího prvku tedy musí být násobek 10. Číslo 2025 však není násobkem 10.

Na druhou stranu můžeme dojít k závěru, že rozdíl $M - m = 20$ je dosažitelný. Jedním ze způsobů je najít požadovaných 20 čísel. Průměrná hodnota 20 čísel, která sečteme, by měla být přibližně $2025 : 20 = 101,25$. Proto bychom se měli podívat na 20 po sobě jdoucích celých čísel (některá z nich bude třeba vyměnit), tak aby číslo 101,25 bylo mezi desátým a jedenáctým číslem. Těmito dvěma čísly jsou tedy 101 a 102. Pokud bychom vzali čísla 92, 93, ..., 101, 102, ..., 111, dostali bychom součet $10 \cdot (101 + 102) = 2030$. Potřebujeme však získat součet 2025, takže nejmenších 5 čísel (92, 93, 94, 95, 96) snížíme o jednu.

Tímto způsobem získáme dvacet čísel se součtem 2025, pro které platí $M - m = 20$. Minimální součet červených čísel je tedy $2(M - m) = 2 \cdot 20 = 40$.

Příklad 37 ... Hopík

Martina našla hopík, se kterým si začala hrát tak, že ho hodila vodorovně proti zdi. V okamžik hodů je hopík ve výšce 1,6 m a má rychlost 16 m/s. Poté se hopík odrazil od zdi ve výšce 0,8 m, a pak se odrazil od podlahy. Každý odraz splňuje zákon odrazu a lomu, ale hopík při něm ztratí 1/4 své kinetické energie. Do jaké maximální výšky v metrech může hopík doletět po odrazu od podlahy?

Výsledek: 1,05

Řešení: Označme hmotnost míčku m . Na začátku je hopík ve výšce $h_0 = 1,6$ m, tedy má potenciální energii $E_{p0} = mgh_0$. Kromě toho se pohybuje rychlostí $v_0 = 16$ m/s, tedy má kinetickou energii $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Jeho celková energie na počátku tedy je

$$E_0 = E_{p0} + E_{k0} = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \left(10 \text{ N/kg} \cdot 1,6 \text{ m} + \frac{1}{2}(16 \text{ m/s})^2\right) m = 144 \text{ J/kg} \cdot m.$$

První odraz se odehraje ve výšce $h_1 = 0,8$ m. Hopík má v tento okamžik potenciální energii $E_{p1} = mgh_1 = 10 \text{ N/kg} \cdot 0,8 \text{ m} \cdot m = 8 \text{ J/kg} \cdot m$. Jeho kinetická energie před odrazem je tedy $E'_{k1} = E_0 - E_{p1} = 144 \text{ J/kg} \cdot m - 8 \text{ J/kg} \cdot m = 136 \text{ J/kg} \cdot m$. Po odrazu tato kinetická energie poklesne na tři čtvrtiny své původní hodnoty, tedy na $E_{k1} = \frac{3}{4}E'_{k1} = \frac{3}{4}(136 \text{ J/kg} \cdot m) = 102 \text{ J/kg} \cdot m$. Celková energie po prvním odrazu tedy je

$$E_1 = E_{p1} + E_{k1} = 8 \text{ J/kg} \cdot m + 102 \text{ J/kg} \cdot m = 110 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Podobným způsobem si poradíme s druhým odrazem. Situaci máme nyní zjednodušenou tím, že potenciální energie E_{p2} je zde nulová. Celková energie je tedy rovna energii kinetické, tedy tentokrát se přímo celková energie po odrazu sníží na třičtvrtinovou hodnotu. Celková energie po druhém odrazu tedy bude:

$$E_2 = \frac{3}{4}E_1 = \frac{3}{4}(110 \text{ J/kg} \cdot m) = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Nyní potřebujeme najít okamžik, kdy hopík dosáhne po druhém odrazu své maximální výšky. To se stane tehdy, když svislá složka rychlosti bude nulová. Nicméně i v tomto okamžiku může mít hopík stále nenulovou

vodorovnou složku rychlosti, jejíž velikost tedy musíme během pohybu také sledovat. Nyní ji tedy jednoduše spočítáme. Na začátku pohybu má míček vodorovnou rychlost v_0 . Po prvním odrazu klesne celková velikost rychlosti a změní se její směr. Pokles rychlosti je takový, aby kinetická energie klesla na tři čtvrtiny své původní hodnoty. Kinetická energie je úměrná druhé mocnině rychlosti, tedy velikost rychlosti musí po odrazu klesnout na $\sqrt{3/4}$ původní hodnoty. Tato situace se stane dvakrát, tedy po obou odrazech bude mít vodorovná složka rychlosti velikost $v_2 = (\sqrt{3/4})^2 v_0 = \frac{3}{4} v_0 = 12 \text{ m/s}$.

V nejvyšší bodě trajektorie po odrazu má hopík stále vodorovnou rychlost v_2 a tedy kinetickou energii $E_{k3} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} (12 \text{ m/s})^2 \cdot m = 72 \text{ J/kg} \cdot m$. Jeho potenciální energie tedy je $E_{p3} = E_2 - E_{k3} = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m - 72 \text{ J/kg} \cdot m = 10,5 \text{ J/kg} \cdot m$. To tedy znamená, že maximální výška h_3 , do které se hopík odrazí je

$$h_3 = \frac{E_{p3}}{mg} = \frac{10,5 \text{ J/kg} \cdot m}{m \cdot 10 \text{ N/kg}} = 1,05 \text{ m}$$

Příklad 38 ... Polarizovaná společnost

Společnost je tak polarizovaná, že se Tomáš rozhodl zjistit, zda jsou lidé rozdělení úplně ve všem, nebo zda mají alespoň něco společného. Zjistil, že společnost je rozdělena do dvou skupin – jedna má a lidí a druhá b lidí. Aby zjistil, co mají společného, vypočítal největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel a a b . Sečetl největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek a dostal součet 20 250. Kolika různých hodnot může nabývat největší společný dělitel?

Výsledek: 39

Řešení: Z definice největšího společného dělitele víme, že $\text{nsd.}(a, b)$ je dělitelem jak a , tak b . Podobně jsou jak a , tak b dělitelé čísla nejmenšího společného násobku $\text{nsn.}(a, b)$. Z toho vyplývá, že $\text{nsn.}(a, b)$ je dělitelné číslem $\text{nsd.}(a, b)$. Proto můžeme najít kladná celá čísla d , k taková, že

$$d = \text{nsd.}(a, b), \quad kd = \text{nsn.}(a, b).$$

Na druhou stranu, pro každou volbu k a d můžeme najít vhodná čísla a a b . K tomu stačí zvolit $a = d$ a $b = kd$. Protože potřebujeme určit počet vhodných hodnot pro d , můžeme a a b ignorovat a pracovat pouze s d a kd . Podmínka se přepíše do tvaru $d + kd = d(k + 1) = 20\,250$. To je pouze zápis čísla 20 250 jako součinu dvou činitelů, z nichž jeden (konkrétně $k + 1$) je alespoň 2. Proto může být d libovolný dělitel čísla 20 250, kromě samotného čísla 20 250 (protože by to znamenalo $k + 1 = 1$). Úloha se tak redukuje na hledání počtu kladných dělitelů čísla 20 250. Prvočíselný rozklad čísla 20 250 je $20250 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$. Jeho dělitelé mají stejné prvočinitele, ale s menšími exponenty (včetně 0). Máme tedy 2 možnosti pro prvočíslo 2 (0 nebo 1), 5 možností pro prvočíslo 3 (0, 1, 2, 3, 4) a 4 možnosti pro prvočíslo 5 (0, 1, 2, 3). Celkem má číslo 20 250 $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ dělitelů. Musíme vyloučit dělitel 20 250, což nám zanechá $40 - 1 = 39$ možných hodnot pro největší společný dělitel Tomášových čísel.

Příklad 39 ... Sladký problém

Oliver je sice trochu vybíravý, ale miluje bonbóny. Jeho kamarád mu z Číny přivezl 6 různých bonbónů, každý s jinou příchutí. Oliver si dárku od kamaráda váží natolik, že chce sladkosti jíst specifickým způsobem. V každém okamžiku si vybere, zda sní jednu nebo dvě sladkosti (které sní současně). Pokračuje, dokud nesní všechny sladkosti. Kolika způsoby si může Oliver zvolit pořadí, ve kterém bude sladkosti jíst?

Výsledek: 3690

Řešení: Pro každé kladné celé číslo n nechť $p(n)$ označuje počet způsobů, jak může Oliver sníst n sladkostí. Popíšeme způsob, jak vypočítat $p(n)$ z $p(n - 1)$ a $p(n - 2)$. Když zbývá n sladkostí, Oliver si může vybrat, zda sní jednu nebo dvě sladkosti. Pokud zvolí jednu sladkost, může si vybrat jednu z n sladkostí. Poté mu zůstává $p(n - 1)$ možností, jak sníst zbylé sladkosti. To Oliverovi poskytuje $n \cdot p(n - 1)$ možností. Pokud zvolí

dvě sladkosti, může je vybrat $\frac{n(n-1)}{2}$ způsoby. Poté mu zůstává $p(n-2)$ možností, jak sníst zbylé sladkosti. Proto pro obecné $n \geq 3$ máme

$$p(n) = n \cdot p(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot p(n-2).$$

Tento vzorec použijeme k výpočtu $p(6)$. Snadno lze z hlavy spočítat, že $p(1) = 1$, $p(2) = 3$. Dále dostaneme

$$\begin{aligned} p(3) &= 3p(2) + 3p(1) = 9 + 3 = 12, \\ p(4) &= 4p(3) + 6p(2) = 48 + 18 = 66, \\ p(5) &= 5p(4) + 10p(3) = 330 + 120 = 450, \\ p(6) &= 6p(5) + 15p(4) = 2700 + 990 = 3690. \end{aligned}$$

Po vypočtení získáme, že Oliver může sníst svoje bonbóny 3690 způsoby.

Příklad 40 ... Když tření nestačí

Alex je skvělý student. Když si potřebuje odpočinout od učení, hraje si se svými knihami – jedna z nich má hmotnost 0,5 kg a druhá 1 kg. Lehčí knihu položí na vodorovný stůl a těžší knihu na ni. Koeficient tření mezi knihou a stolem je 0,3 a mezi oběma knihami 0,6. Alex začne tahat lehčí knihu vodorovně silou o velikosti F . Určete nejmenší možnou hodnotu síly F v newtonech, při které horní kniha sklouzne z dolní knihy.

Výsledek: 13,5

Řešení:

Označme si hmotnosti a koeficienty tření následujícím způsobem: $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 1$ kg, $f_1 = 0,3$, $f_2 = 0,6$. Nyní potřebujeme popsat síly působící na knihy.

Začneme ve svislém směru. Na knihu s hmotností m_2 působí dvě síly – tíhová síla $F_{g_2} = m_2g$ a síla F_{N_2} od druhé knihy. Protože se tato kniha ve svislém směru nepohybuje, platí $F_{N_2} = F_{g_2}$. Na knihu s hmotností m_1 působí tři síly – tíhová síla F_{g_1} , síla od knihy s hmotností m_2 o velikosti F_{N_2} a nakonec síla F_{N_1} od stolu. Tato kniha se také nepohybuje, takže platí

$$F_{g_1} + F_{N_2} - F_{N_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{N_1} = F_{g_1} + F_{N_2} = F_{g_1} + F_{g_2} = (m_1 + m_2)g.$$

Nyní se podíváme na síly ve vodorovném směru. Předpokládejme, že síla F , kterou Alex táhne, směřuje doprava. Opět začneme knihou s hmotností m_2 . Na tuto knihu působí pouze jedna síla, a to síla třecí. Bez tření by se kniha chtěla sklouznout z druhé knihy. Aby k tomu došlo, musela by se vzhledem k druhé knize pohybovat doleva. Třecí síla působí proti tomuto pohybu, tedy doprava. Její velikost je $F_2 = F_{t_2} \leq f_2 F_{N_2} = f_2 F_{g_2} = f_2 m_2 g$.

Pokračujeme s knihou o hmotnosti m_1 . Zde musíme uvažovat tři síly. První z nich je zjevně F . Druhá je třecí síla mezi knihou a stolem. Tato síla knihu zpomaluje a její velikost je $F_{t_1} \leq f_1 F_{N_1} = (m_1 + m_2)f_1 g$. Třetí silou je reakce na sílu F_{t_2} působící na horní knihu. Tato reakční síla tedy působí na spodní knihu stejnou velikostí, ale doleva. Výsledná síla působící na tuto knihu má tedy velikost:

$$F_1 = F - F_{t_1} - F_{t_2} \geq F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g.$$

V případě, že se kniha s hmotností m_2 začne posouvat, musí být všechny třecí síly maximální možné (protože vše se pohybuje vzhledem k objektům, o které se třou). V takovém případě tedy platí $F_1 = F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g$ a $F_2 = f_2 m_2 g$. Horní kniha sklouzne, pokud $a_1 > a_2$, kde a_1 a a_2 jsou zrychlení jednotlivých knih. Můžeme si to představit tak, že pokud spodní lehčí kniha zrychluje více než horní kniha,

bude horní kniha sklouzávat dolů. Kritický případ tak nastane, když $a_1 = a_2$, pro který dostaneme:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2, \\ \frac{F_1}{m_1} &= \frac{F_2}{m_2}, \\ \frac{F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g}{m_1} &= \frac{f_2 m_2 g}{m_2}, \\ F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g &= m_1 f_2 g, \\ F &= (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2 + m_1 f_2)g, \\ F &= (0,5 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,6 + 0,5 \text{ kg} \cdot 0,6) \cdot 10 \text{ N/kg} = 13,5 \text{ N}. \end{aligned}$$

Dojdeme k závěru, že nejmenší možná síla, kterou musí Alex táhnout knihu, má velikost 13,5 N.

Příklad 41 ... Šachový král podruhé

Dan vyřešil poslední problém s králem na nekonečné šachovnici a teď hledá větší výzvu. Tak si položil druhou otázku s králem na nekonečné šachovnici, kolika různými cestami může jít tak aby přesně po čtyřech krocích skončil na stejném poli jako na začátku?

Výsledek: 216

Řešení: Král se musí vrátit na jeho startovní pozici ve čtyřech tazích. Podívejme se na jeho pozici po dvou tazích. V tomto okamžiku mu zbývá $4 - 2 = 2$ tahů. Říkejme teď této pozici "červený" čtverec. Král může kombinovat jakékoli dvoukrokové cesty do červeného čtverce a z něj, abychom získali validní čtyřkrokovou cestu splňující dané podmínky - použije jednu cestu do červeného čtverce a další cestu (v opačném směru), aby se dostal zpátky na původní políčko.

Teď určíme na jaké políčko se může král dostat ve dvou krocích. Počet cest jak se na tato políčka dostat závisí na počtu cest jak se dostat na jeho sousední políčka v jednom kroku z původní pozice. Tedy počet cest na toto políčko je součet jednokrokových cest na jeho sousední políčka. Na následujícím obrázku označuje čtverec s dalším čtvercem uvnitř původní pozici krále a čísla v každém čtverci označují počet dvoukrokových cest na ně:

	1	2	3	2	1	
	2	2	4	2	2	
	3	4	8	4	3	
	2	2	4	2	2	
	1	2	3	2	1	

Teď použijeme naše předchozí pozorování že král se z každého políčka dostane zpátky tolika cestami jako se dostane na něj. Toto nám dává $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 216$ možných cest.

Příklad 42 ... Na dně

Spiridion je dokonale hladká homogenní krychle s délkou strany 50 cm a hustotou 1200 kg/m^3 . Momentálně se nachází na dokonale hladkém dně akvária naplněného vodou do výšky 2 m. Jaká je velikost síly v newtonech, kterou Spiridion působí na dno akvária.

Poznámka: Přepokládejte, že celá situace se děje za standardních podmínek, tedy při teplotě 20°C a za atmosferického tlaku.

Výsledek: 30250

Řešení: Potřebujeme zanalyzovat síly, které působí na krychli s hranou délky $a = 50\text{ cm}$ a hustotou $\rho = 1200\text{ kg/m}^3$ ponořené na dně akvária s hladinou ve výšce $h = 2\text{ m}$. První z působících sil bude zjevně tíhová síla o velikosti $F_g = mg = a^3 \rho g$.

Dále tu máme síly, kterými na krychli působí voda. Síly které působí na svislé stěny se vyruší, tedy se potřebujeme zabývat pouze vodorovnými stěnami. Nicméně pod spodní stěnou krychle není žádná voda (krychle i akvárium jsou dokonale hladké), tedy zde nepůsobí voda žádnou silou. Na horní stěnu krychle ale voda působí.

Označme tlak ve výšce horní stěny kostky p . Protože má horní stěna plochu $A = a^2$, tlaková síla působící na tuto stěnu bude $F_p = pA$. Nyní nám zbývá spočítat tlak p . Horní stěna kostky je v hloubce $h' = h - a$, tedy hydrostatický tlak vody zde je $p_h = h' \rho_{\text{voda}} g$. Hydrostatický tlak ale není jediný tlak, který musíme vzít v úvahu. V okolí máme standardní podmínky, tedy atmosferický tlak p_A působící na vodní hladinu v akváriu. Z Pascalova zákona víme, že celkový tlak ve vodě je zvýšený o atmosferický tlak. Tlak na horní stěnu krychle tedy je $p = p_A + p_h$. Nyní spojíme všechny předešlé úvahy dohromady a spočítáme celkovou sílu, kterou působí krychle na dno akvária:

$$F = F_g + F_p = a^3 \rho g + (p_A + (h - a) \rho_{\text{voda}} g) a^2,$$

$$F = (0,5\text{ m})^3 \cdot 1200\text{ kg/m}^3 \cdot 10\text{ N/kg} + (100\,000\text{ Pa} + (2\text{ m} - 0,5\text{ m}) \cdot 1000\text{ kg/m}^3 \cdot 10\text{ N/kg}) \cdot (0,5\text{ m})^2,$$

$$F = 30\,250\text{ N}.$$

Poznámka: Výsledek se může zdát opravdu velký. To je hlavně kvůli započtení atmosferického tlaku, jehož tlaková síla působí na všechny předměty (i kdyby bylo akvárium prázdné, působí na něj tato tlaková síla) ze všech stran, tedy se obvykle nezapočítává. Navíc ve skutečnosti nemáme dokonale hladké povrchy, proto je vždy nějaké množství vody pod tělesem, které způsobuje vztlak a těleso není ke dnu "přimáčknuté" touto silou. Protože ale pod tělesem toto těleso nadnáší (tj. působí akcí), působí i těleso na vodu pod sebou, která tuto sílu na nádobu přenese. Nicméně tento problém není až tak přehnaný, jak by se mohlo zdát. Pokud se ponorka dotkne dna moře nebo oceánu, ztráta vztlaku může být tak velká, že se již znovu nedokáže vynořit. Současné ponorky mají systémy, které dokáží tomuto problému předcházet, ale stále se musí vyhýbat kontaktu s dnem, za prvé kvůli riziku poškození a zadruhé protože na spodní straně obvykle mají čerpání vody na chlazení různých systémů.

Poděkování

Odborný garant soutěže

Miroslav Pajger

Návrhy úloh

Rikkie Gieler, Anna Koziara, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Zadání a řešení úloh

Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Korektury

Zvonko Andrijević, Emanuel Bajamić, Patrik Cvetek, Karlo Jokoš, Lucia Kleščová, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Lucija Relić, Martyna Ślusarczyk, Matej Vojvodić

Překlady

Carmen Barriuso, Veronika Bartáková, Kurt Bergler, Kacper Błachut, Patrik Cvetek, Matěj Dudek, Szymon Dziewoński, Rikke Gieler, Johanna Hackl, Walter Hametner, Kornel Howil, Lucia Kleščová, Vojtěch Kubrycht, Kateřina Kučerová, Vít Kupilík, Hartwig Lasser, Maria Lebitsch, Nastazja Lukoszek, Anna Matiašková, Piotr Miernik, Tomáš Miškov, Hannah Mittermayr, Azucena Molina-Solis, Miroslav Pajger, Francesca Papatola, Kacper Piotrowski, Marián Poturnay, David Präsent, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Dmytro Rzhemovskiy, Jakub Savula, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Szymon Tobiasz, Matej Vojvodić, Leonore Wöb, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinátoři

Dmytro Rzhemnovskiy, Kurt Bergler, David Präsent (AT), Veronika Bendíková, Soňa Vasiľová (SK), Martyna Ślusarczyk (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Organizační místa

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biala:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPECe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Elbląg:** Zespół Szkół Mechanicznych • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Gdynia:** Szkoła Podstawowa nr 26 • **Graz:** Universität Graz • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Lebč:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábľa • **Liberec:** Doctrina – Podještětské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovéj Timravy • **Michalovce:** Gymnázium Pavla Horova • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkeru • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien, Erwin Schrödinger Institute, FH Technikum, TU Wien • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu