

Lösungen

13. Náboj Junior

21. November 2025



Hallo,

du hast gerade ein Heft mit Aufgaben und Lösungen des Wettbewerbs “Náboj Junior 2025” in der Hand. Náboj Junior ist ein internationaler Mathematik- und Physikwettbewerb, an dem Teams aus maximal 4 Schüler:innen der 8. und 9. Schulstufe teilnehmen können. Der Wettbewerb dauert 120 Minuten, in denen die Teams versuchen, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen. Bei den Aufgaben geht es nicht nur um mathematische und physikalische Kenntnisse, sondern auch um die Fähigkeit, die Probleme innovativ und einfallsreich anzugehen.

Die 13. Austragung von Náboj Junior fand am 21. November 2025 statt. In diesem Jahr nahmen rund 85 Teams aus Österreich teil. Náboj Junior fand vor Ort in 61 Städten in der Slowakei, der Tschechischen Republik, Österreich und Polen statt. Gleichzeitig wurde der Wettbewerb in einer Online-Version in den Niederlanden, Belgien und Kroatien ausgetragen.

Der Wettbewerb in Österreich wird von Mitarbeiter:innen des Teams von Mathematik macht Freude (MmF) der Universität Wien organisiert, die ihre Zeit und Energie dafür einsetzen, dass Schüler:innen aus ganz Österreich an dem Wettbewerb teilnehmen und ihr Wissen testen können. Ziel von Náboj Junior ist es, die Talente der Kinder in den Bereichen Mathematik und Physik zu fördern und zu zeigen, dass die Naturwissenschaften eine Vielzahl an Interessen, Herausforderungen und Chancen für alle bieten.

Wir freuen uns darauf, euch auch nächstes Jahr wieder beim Wettbewerb begrüßen zu dürfen!

Euer Náboj Junior Team von MmF - Mathematik macht Freude

Aufgabe 1 ... Langes Haar

Rapunzel hat festgestellt, dass ihr Haar mit einer Geschwindigkeit von 1,5 cm pro Monat wächst. Da sie ihr langes Haar gespendet hat, ist es zur Zeit nur noch 20 cm lang. Sie hätte aber gerne wieder 2 Meter langes Haar. Wie viele Jahre muss Rapunzel darauf warten?

Ergebnis: 10

Lösung: Rapunzels Haar muss um $200\text{ cm} - 20\text{ cm} = 180\text{ cm}$ wachsen. Das dauert $180\text{ cm} : 1,5\text{ cm/Monat} = 120\text{ Monate} = 10\text{ Jahre}$. Rapunzel muss also 10 Jahre warten.

Aufgabe 2 ... Fahrradfahren

Mara und Mirijam nahmen an einem kleinen Radrennen für Frauen in ihrer Stadt teil. Mara fühlte sich an diesem Tag großartig und beendete das Rennen erfolgreich auf dem vierten Platz. Mirijam hatte jedoch in der Nacht zuvor schlecht geschlafen und kam daher als Vorletzte ins Ziel. Zwischen Mara und Mirijam erreichten sechs weitere Teilnehmerinnen die Ziellinie. Wie viele Radfahrerinnen haben insgesamt das Ziel dieses Rennens erreicht?

Ergebnis: 12

Lösung: 3 Radfahrerinnen erreichten vor Mara das Ziel, 6 Radfahrerinnen kamen zwischen Mara und Mirijam an, und 1 Radfahrerin beendete hinter Mirijam das Rennen. Zusammen ergibt dies $6 + 3 + 1 = 10$ Radfahrerinnen, ohne Mara und Mirijam selbst. Da die Gesamtzahl der Radfahrerinnen gefragt ist, müssen wir Mara und Mirijam ebenfalls hinzufügen, was $10 + 2 = 12$ Radfahrerinnen ergibt.

Aufgabe 3 ... Marathon

Eine Marathonläuferin läuft ca. 42 Kilometer. Während des Laufs, verbraucht die Läuferin 3 kJ Energie pro Kilometer. Um den Energieverbrauch auszugleichen, isst die Läuferin regelmäßig Energieriegel. Jeder dieser Energieriegel liefert der Läuferin 1000 J. Wie viele Energieriegel muss die Läuferin zu sich nehmen, um den Marathon ohne Energieverlust zu beenden?

Ergebnis: 126

Lösung: Pro Kilometer verbraucht die Läuferin 3000 J Energie. Auf einer 42 km langen Strecke, verbraucht die Läuferin

$$3000\text{ J/km} \cdot 42\text{ km} = 126\,000\text{ J}$$

an Energie. Jeder gegessene Energieriegel gleicht 1000 J an Energie aus. Um das gesamte Energiedefizit auszugleichen, muss die Läuferin $\frac{126\,000\text{ J}}{1000\text{ J}} = 126$ Energieriegel zu sich nehmen.

Aufgabe 4 ... Wer möchte Schokolade?

David hat eine Schokoladentafel bekommen, die aus 35 Stücken besteht. Er mag selbst aber keine Schokolade und möchte die Tafel daher unter seinen Freunden aufteilen. Jeder soll mindestens 2 Stück Schokolade erhalten und jeder soll die gleiche Anzahl an Stücken bekommen. Außerdem darf kein Stück übrig bleiben. Auf wie viele Freunde kann David die Schokoladentafel maximal aufteilen, damit alle seine Bedingungen erfüllt sind?

Ergebnis: 7

Lösung: Die Zahl 35 kann auf vier Arten als Produkt zweier positiver ganzer Zahlen ausgedrückt werden (wobei unterschiedliche Reihenfolgen als unterschiedliche Arten gezählt werden):

$$1 \cdot 35, \quad 5 \cdot 7, \quad 7 \cdot 5, \quad 35 \cdot 1.$$

Der erste Faktor steht für die Anzahl der Stücke, die jeder Freund erhält. Da es mindestens 2 Stücke sein sollen, schließen wir den Fall $1 \cdot 35$ aus. Damit bleiben drei Möglichkeiten, unter denen die maximale Anzahl an Freunden 7 ist.

Aufgabe 5 ... Wichtiger Besuch

Tessa fährt mit dem Auto in einer Stadt, in der eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 50 km/h gilt. Sie möchte ihre Mutter besuchen, die auf der anderen Seite der Stadt wohnt, wofür sie eine Strecke von 10 km zurücklegen muss. Wie viel Zeit benötigt Tessa mindestens in Minuten, um zu ihrer Mutter zu fahren, wenn sie eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h einhalten möchte und die Geschwindigkeitsbegrenzung nicht überschreiten will?

Ergebnis: 15

Lösung: Die Informationen zur Geschwindigkeitsbegrenzung sind für die Lösung der Aufgabe nicht wichtig. Wir benötigen lediglich, dass Tessa die Strecke $s = 10$ km zurücklegen möchte und dass ihre Durchschnittsgeschwindigkeit $v = 40$ km/h betragen soll. Wir wissen, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich der Gesamtstrecke geteilt durch die Gesamtzeit ist. Wenn wir die Durchschnittsgeschwindigkeit mit v und die Strecke mit s bezeichnen, können wir die Zeit t wie folgt ausdrücken:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = \frac{1}{4} \text{ h.}$$

In Minuten umgerechnet erhalten wir als Ergebnis 15 Minuten.

Aufgabe 6 ... Zweimal messen, einmal sägen

John arbeitet in einer Tischlerei. Seine heutige Aufgabe war einfach: Er bekam mehrere Holzquader mit den Maßen $17 \text{ cm} \times 42 \text{ cm} \times 47 \text{ cm}$ und sollte alle Seiten mit oranger Farbe bemalen. Da John jedoch etwas geistesabwesend war, hat er versehentlich alle Seiten von einem der Quader rot statt orange eingefärbt. Um sicherzustellen, dass dieser rote Quader nicht aus Versehen verwendet wird, hat er ihn in kleine Würfel mit einer Seitenlänge von 1 cm zersägt. Wie viele dieser Würfel hatten genau 3 rot gefärbte Seitenflächen?

Ergebnis: 8

Lösung: Die einzigen Würfel, bei denen drei Seiten rot gefärbt sind, sind diejenigen, die aus einer der Ecken des ursprünglichen Quaders herausgesägt wurden. Die anderen Würfel haben nur zwei Seiten, die gefärbt sind (wenn sie aus der Kante zwischen zwei Seiten herausgeschnitten wurden), eine Seite, die gefärbt ist (wenn sie aus der Seite des Quaders herausgeschnitten wurden), oder keine Seite, die gefärbt ist (wenn sie sich überhaupt nicht an der Oberfläche des Quaders befanden). Daher müssen wir nur die Ecken des Quaders zählen, was 8 ergibt. Es gab also 8 Würfel mit drei rot gefärbten Seitenflächen.

Aufgabe 7 ... Kaltes Abendessen

Patrick möchte sein Essen aufwärmen und stellt es daher in die Mikrowelle mit konstanter Leistung. Nach einiger Zeit ist die Temperatur des Essens auf 26°C gestiegen. Das ist Patrick jedoch nicht warm genug, daher stellt er das Essen erneut in die Mikrowelle, diesmal jedoch nur für 70 % der Zeit des ersten Erwärmens. Auf diese Weise steigt die Temperatur des Essens auf 40°C an, was für ihn genau richtig ist. Wie hoch war die ursprüngliche Temperatur von Patricks Essen in Grad Celsius?

Anmerkung: Kein Wasser verdunstet aus Patricks Essen.

Ergebnis: 6

Lösung: Die Leistung der Mikrowelle ist konstant. Das bedeutet, dass die Energie, die das Essen von der Mikrowelle erhält, proportional zur Erhitzungszeit ist. Außerdem ändert sich die Masse und die spezifische Wärmekapazität des Essens während des Erhitzungsprozesses nicht. Daher ist der Temperaturanstieg proportional zur Erhitzungszeit.

Als das Essen ein zweites Mal erhitzt wird, steigt die Temperatur um $40^\circ\text{C} - 26^\circ\text{C} = 14^\circ\text{C}$. Das Essen wurde dabei, nur 70 % der Zeit des ersten Aufwärmens, der Hitze ausgesetzt. Daher muss die Temperatur der Speise, beim ersten Erhitzen um

$$\frac{100\%}{70\%} \cdot 14^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}.$$

gestiegen sein. Daraus folgt, dass die Ursprüngliche Temperatur von Patricks Essen $26^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 6^\circ\text{C}$ betrug.

Aufgabe 8 ... Klatsch und Tratsch

In Naboj-Land gibt es 2025 Einwohner*innen und 1 König. Vor kurzem hat der König ein neues Gesetz erlassen und nun muss er alle über die neuen Bestimmungen informieren. Die Information wird jeden Tag um 12 Uhr mittags weitergegeben. Am ersten Tag teilt der König das neue Gesetz einer Person mit. An jedem folgenden Tag gibt jede*r Einwohner*in, die/der bereits am Vortag oder früher von den neuen Bestimmungen erfahren hat (außer dem König selbst), diese an genau eine Person weiter, die sie noch nicht kennt (solange es solche Personen noch gibt). Wie viele Tage dauert es, bis alle Einwohner am Ende dieses Tages das neue Gesetz kennen?

Ergebnis: 12

Lösung: Am Ende des ersten Tages gibt es nur eine Person, die das neue Gesetz kennt. An jedem folgenden Tag verdoppelt sich die Anzahl der Personen, die das neue Gesetz bereits kennen. Wir wissen also:

2. Am Ende des 2. Tages gibt es $2 \cdot 1 = 2$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
3. Am Ende des 3. Tages gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
4. Am Ende des 4. Tages gibt es $2 \cdot 4 = 8$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
5. Am Ende des 5. Tages gibt es $2 \cdot 8 = 16$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
6. Am Ende des 6. Tages gibt es $2 \cdot 16 = 32$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
7. Am Ende des 7. Tages gibt es $2 \cdot 32 = 64$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
8. Am Ende des 8. Tages gibt es $2 \cdot 64 = 128$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
9. Am Ende des 9. Tages gibt es $2 \cdot 128 = 256$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
10. Am Ende des 10. Tages gibt es $2 \cdot 256 = 512$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
11. Am Ende des 11. Tages gibt es $2 \cdot 512 = 1024$ Personen, die das neue Gesetz kennen;
12. Am Ende des 12. Tages gibt es $2 \cdot 1024 = 2048$ Personen, die das neue Gesetz kennen.

Da $2048 \geq 2025$ ist, endet die Verbreitung des neuen Gesetzes am Ende des 12. Tages.

Aufgabe 9 ... Effektive Lösung

Paul hat ein Solarpanel gebaut und möchte es benutzen, um seine Spielzeugeisenbahn mit Strom zu versorgen. Zunächst wandelt er mit dem Solarpanel Sonnenenergie mit einem Wirkungsgrad von 0,2 in elektrische Energie um. Er kann $\frac{5}{6}$ dieser elektrischen Energie als chemische Energie in einer Batterie speichern. Schließlich setzt er die Batterie in die Spielzeugeisenbahn ein, welche 30 % der chemischen Energie aus der Batterie in ihre eigene kinetische Energie umwandelt. Mit welchem prozentualen Wirkungsgrad wandelt Pauls System Sonnenenergie in kinetische Energie um?

Ergebnis: 5

Lösung: Um den Gesamtwirkungsgrad dieser Energieumwandlung zu erhalten, müssen wir einfach die einzelnen Wirkungsgrade der stattfindenden Umwandlungen multiplizieren. Zuerst setzen wir die Wirkungsgrade, die nicht in Bruchform vorliegen, in Bruchform um:

$$0,2 = \frac{1}{5}, \quad 30\% = \frac{3}{10}.$$

Danach multiplizieren wir alle Wirkungsgrade:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}.$$

Da unsere Antwort in Prozent angegeben werden soll, muss der Nenner des Bruchs gleich 100 sein. Dafür multiplizieren wir den ursprünglichen Bruch mit $\frac{5}{5}$ und erhalten das Ergebnis $\frac{1}{20} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{100}$. Damit beträgt der Wirkungsgrad 5%.

Aufgabe 10 ... Schachkönig Teil 1

Kate sucht nach interessanten mathematischen Aufgaben auf einem unendlichen Schachbrett. Während sie die Schachfiguren aufstellt, hält sie den König in der Hand. Sie weiß, dass der König auf jedes der acht Felder ziehen kann, die eine Seite oder eine Ecke mit dem Feld teilen, auf dem er steht. Die erste Frage, die ihr in den Sinn kommt, lautet: Wenn sie den König auf ein Feld dieses unendlichen Schachbretts setzt, wie viele verschiedene Wege kann der König dann zurücklegen, wenn er genau drei Züge macht?

Ergebnis: 512

Lösung: Jedes Mal, wenn der König zieht, hat er 8 mögliche Felder zur Auswahl. Bei einem Weg, der aus genau drei Zügen besteht, sind die Entscheidungen unabhängig voneinander, sodass die Gesamtzahl solcher Wege $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ beträgt.

Aufgabe 11 ... Rennen im Park

Als Patrick und Kate im Park laufen gingen, entdeckten sie eine 1 km lange gerade Strecke. Sie stellten sich an den gegenüberliegenden Enden dieser Strecke auf und liefen gleichzeitig auf das jeweils andere Ende der Strecke zu. Nach 2 Minuten trafen sie aufeinander, wobei Kate 600 m gelaufen war. Um wie viele Sekunden früher erreichte Kate ihr Streckenende als Patrick seines?

Ergebnis: 100

Lösung: Kate läuft $s_K = 600$ m in $t = 2$ Minuten, ihre Durchschnittsgeschwindigkeit ist daher $v_K = \frac{s_K}{t} = \frac{600 \text{ m}}{2 \text{ min}} = 5 \text{ m/s}$. Um die gesamte Streckenlänge $s = 1000$ m zurückzulegen, benötigt sie $t_K = \frac{s}{v_K} = \frac{1000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 200$ s.

Patrick läuft $s_P = 400$ m in $t = 2$ Minuten, seine Durchschnittsgeschwindigkeit ist daher $v_P = \frac{s_P}{t} = \frac{400 \text{ m}}{2 \text{ min}} = \frac{10}{3} \text{ m/s}$. Um die gesamte Streckenlänge $s = 1000$ m zurückzulegen, benötigt er $t_P = \frac{s}{v_P} = \frac{1000 \text{ m}}{\frac{10}{3} \text{ m/s}} = 300$ s. Wir sehen also, dass Kate ihr Streckenende $t_P - t_K = 300 \text{ s} - 200 \text{ s} = 100 \text{ s}$ früher erreicht als Patrick seines.

Aufgabe 12 ... Kantiger Geburtstag

Armins kleine Schwester hat bald Geburtstag. Auch wenn es kein runder sein wird, soll es aus Armins Sicht doch wenigstens ein kantiger werden. Da ihre Lieblingszahl 30 ist, möchte er ihr einen kantigen Festkörper mit einer Oberfläche von 30 cm^2 schenken. Dazu sägt er von Kantholz Holzwürfel mit der Seitenlänge 1 cm ab und klebt sie an ihren Seitenflächen passgenau zusammen. Wie viele Würfel benötigt Armin mindestens, um sein kantiges Geschenk herzustellen?

Ergebnis: 7

Lösung: Wir möchten, dass die Oberfläche des Körpers so groß wie möglich ist und dabei so wenige Würfel wie möglich verwendet werden. Daher soll jeder Würfel mit möglichst wenigen Seitenflächen mit dem gesamten Körper verbunden sein. Aus diesem Grund kleben wir die Würfel zu einer langen Reihe zusammen, wodurch ein Quader entsteht. Die beiden Würfel an den Enden dieser Reihe haben 5 sichtbare Seitenflächen, und alle Würfel dazwischen haben 4 sichtbare Seitenflächen. Da ihr Flächeninhalt jeweils 1 cm^2 beträgt und wir einen Oberflächeninhalt von 30 cm^2 erreichen wollen, erhalten wir die Gleichung

$$5\text{ cm}^2 + x \cdot 4\text{ cm}^2 + 5\text{ cm}^2 = 30\text{ cm}^2,$$

wobei x die Anzahl der Würfel zwischen den beiden Endwürfeln ist. Wir formen um und erhalten

$$x \cdot 4\text{ cm}^2 = 20\text{ cm}^2.$$

Daher ist $x = 5$. Da wir neben diesen 5 Würfeln noch weitere 2 Würfel an den Enden des Quaders haben, benötigen wir insgesamt (mindestens) $2 + 5 = 7$ Würfel.

Aufgabe 13 ... Ameisensammlung

Matylda sammelt Ameisen. Eines Tages beschloss sie, alle ihre Ameisen auf einem Blatt mit quadratischem Raster mit der gleichen Anzahl von Zeilen und Spalten anzuordnen. Wir wissen, dass eine normale Ameise genau in ein Quadrat passt, während eine Ameisenkönigin ein 3×3 -Quadrat benötigt. Matylda zählte alle ihre Ameisen und stellte fest, dass sie insgesamt 1929 Ameisen hat. Matylda schaffte es, alle Ameisen so auf dem Blatt anzuordnen, dass kein Quadrat leer blieb und kein Quadrat von mehr als einer Ameise besetzt war. Wie viele Zeilen hat das quadratische Rasterblatt von Matylda mindestens?

Ergebnis: 45

Lösung: Wir suchen nach der kleinsten Quadratzahl (eine Zahl, die als Produkt einer ganzen Zahl mit sich selbst geschrieben werden kann), die als Summe aus 1929 Einsen und Neunen geschrieben werden kann. Die Antwort ist die Quadratwurzel dieser Zahl. Angenommen, alle Ameisen besetzen nur ein Feld. Insgesamt würden sie 1929 Quadrate besetzen. Nun können wir einige von ihnen durch eine Ameisenkönigin ersetzen. Auf diese Weise können wir die Anzahl der besetzten Quadrate um $9 - 1 = 8$ erhöhen. Somit erhalten wir eine Anzahl besetzter Quadrate in der Form $1929 + 8k$ für eine nicht-negative ganze Zahl k . Wir suchen die kleinste Zahl dieser Form, die eine Quadratzahl ist. Die erste größere Quadratzahl ist $44 \cdot 44 = 1936$. Sie ist gerade und hat daher eindeutig nicht die Form $1929 + 8k$, die ungerade ist. Die nächste ist $45 \cdot 45 = 2025$, die die gewünschte Form hat ($1929 + 8k = 2025$ für $k = 12$). Offensichtlich können wir die Ameisen gemäß den Regeln in das Gitter setzen. Tatsächlich reicht es aus, $(2025 - 1929) : 8 = 12$ Quadrate der Größe 3×3 auszuwählen. Du kannst diese beispielsweise in den ersten drei Reihen des Gitters unterbringen. Daher ist die kleinstmögliche Anzahl von Reihen in Matylda quadratischem Gitter $\sqrt{2025} = 45$.

Aufgabe 14 ... Sinnlose Arbeit

Mehrere Freund*innen versuchen, einen zunächst leeren Pool zu füllen. Der Pool hat die Maße $15\text{ m} \times 6\text{ m} \times 2\text{ m}$. Alice versucht, ihn mit einem vollen Becher mit einem Volumen von 250 ml zu füllen, den sie alle 30 Sekunden zum Pool bringen kann. Bob versucht, ihn mit einem vollen Krug mit einem Volumen von 0,5 l zu füllen, den er jeweils in 1 Minute an den Pool bringen kann. Cornelia versucht, den Pool mit einem vollen Eimer mit einem Volumen von 10 dm^3 zu füllen, mit dem sie alle 5 Minuten Wasser in den Pool leeren kann. Die Freund*innen probierten das eine Weile lang aus, aber es schien ihnen, dass diese Art des Füllens sinnlos war, also gaben sie ihren Versuch auf. Sie sind aber immer noch neugierig. Wie viele Stunden würden sie brauchen, um den Pool auf diese Weise zu füllen?

Ergebnis: 1000

Lösung: Das Volumen des Pools beträgt $V = 15\text{ m} \cdot 6\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 180\text{ m}^3$. Berechnen wir das Wasservolumen, das jede Person pro Stunde mitbringen kann:

- Alice füllt ihren Becher $\frac{3600\text{s}}{30\text{s}} = 120$ -mal pro Stunde. Auf diese Weise erhöht sie das Wasservolumen im Pool um $120 \cdot 250\text{ ml} = 30\,000\text{ ml} = 30\text{ l}$.
- Bob füllt sein Gefäß $\frac{60\text{ min}}{1\text{ min}} = 60$ -mal pro Stunde. Auf diese Weise erhöht er das Wasservolumen im Pool um $60 \cdot 0,5\text{ l} = 30\text{ l}$.
- Cornelia füllt ihren Eimer $\frac{60\text{ min}}{5\text{ min}} = 12$ -mal pro Stunde. Auf diese Weise erhöht sie das Wasservolumen im Pool um $12 \cdot 10\text{ dm}^3 = 120\text{ l}$.

Insgesamt erhöhen die Freund*innen das Wasservolumen im Pool um $30\text{ l} + 30\text{ l} + 120\text{ l} = 180\text{ l} = 0,18\text{ m}^3$ pro Stunde. Ihre Füllgeschwindigkeit beträgt also $v = 0,18\text{ m}^3/\text{h}$. Um den gesamten Pool zu füllen, benötigen sie schließlich $t = \frac{V}{v} = \frac{180\text{ m}^3}{0,18\text{ m}^3/\text{h}} = 1000\text{ h}$.

Aufgabe 15 ... magische Blumen

Lucy liebt es, im Park spazieren zu gehen und Blumen zu pflücken. Der Park, den sie heute besucht, besteht aus 15 quadratischen Wiesen, wie in der Abbildung unten dargestellt. Die Zahl in jedem Quadrat gibt genau an, wie viele Blumen Lucy pflückt, wenn sie durch diese Wiese geht (sie pflückt exakt die angegebene Menge). Beim Verlassen jeder Wiese legt sie die eben gepflückten Blumen in ihren Korb. Lucy beginnt am Eingang (mit einem Pfeil markiert) auf der Wiese mit einer Blume. Dann spaziert sie durch den Park und geht jedes Mal zu einer Wiese, die eine Seite mit der aktuellen Wiese teilt. Sie muss nicht alle Wiesen durchqueren, aber sie betritt niemals zweimal dieselbe Wiese. Schließlich beendet sie ihren Spaziergang durch den Park am Ausgang (mit dem anderen Pfeil markiert) auf der Wiese mit 2 Blumen.

Lucy weiß, dass dieser Park magisch ist und dass alle Blumen, die sie gerade in ihrem Korb hat, verschwinden, sobald ihre Anzahl gerade ist (und sie muss von vorne anfangen, Blumen zu pflücken). Wie viele Blumen kann Lucy maximal am Ausgang des Parks haben?

→

1	2	1	8	7
3	7	2	6	4
4	2	4	3	2

→

Ergebnis: 27

Lösung: Am Ausgang des Parks möchte Lucy eine ungerade Anzahl von Blumen haben (damit sie keine verliert). Da eine ungerade Zahl + eine gerade Zahl immer eine ungerade Zahl ergibt, kann Lucy, wenn sie zu Beginn eine ungerade Anzahl von Blumen hat, zu einer beliebigen Anzahl von Wiesen mit gerader Nummer gehen, ohne Blumen zu verlieren. Daher suchen wir nach einer Folge von Wiesen mit gerader Nummer, die mit einer Wiese mit ungerader Nummer beginnt und am Ausgang endet. Da wir noch nicht wissen, welche Wiese mit ungerader Nummer diejenige sein wird, auf der die Folge beginnt, gehen wir vorerst einfach vom Ausgang aus durch alle geraden Wiesen und markieren auf jeder Wiese (mit grauen Zahlen), wie viele Blumen Lucy auf dem Weg von dieser Wiese zum Ausgang pflücken wird.

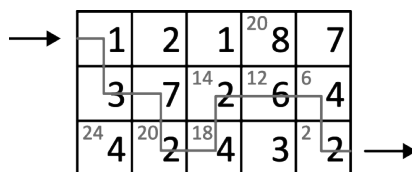
→

1	2	1 ²⁰	8	7
3	7 ¹⁴	2 ¹²	6 ⁶	4
²⁴ 4	²⁰ 2	¹⁸ 4	3	² 2

→

Nun suchen wir nach einer Wiese mit ungerader Blumenzahl, die (i) an eine der markierten Wiesen grenzt und, (ii) wenn wir die graue Zahl auf der markierten Wiese und die Zahl auf der ungeraden Wiese addieren, die maximal mögliche Summe ergibt. Wenn wir alle überprüfen (die Wiesen mit den Zahlen 1, 3 und 7), stellen wir fest, dass die maximale Summe 27 ist. Dann müssen wir nur noch überprüfen, ob wir wirklich

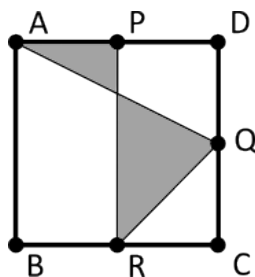
am Eingang beginnen und dann die gewünschte ungerade Wiese so einsammeln können, dass wir vor dem Einsammeln eine gerade Anzahl von Blumen haben (damit wir die Blumen von der ungeraden Wiese nicht verlieren). Ein möglicher Weg dafür ist in der Abbildung dargestellt.



Daher kann Lucy beim Verlassen des Parks maximal 27 Blumen haben.

Aufgabe 16 ... Färben eines Logos

Martina entwirft ein Logo für ihr Unternehmen. Sie beginnt ihren Entwurf mit einem Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 12 dm. Dann wählt sie drei spezielle Punkte P , Q und R aus, sodass P der Mittelpunkt von AD , Q der Mittelpunkt von CD und R der Mittelpunkt von BC ist. Schließlich zeichnet sie die Strecken AQ , PR und RQ . Für das fertige Logo möchte sie nur die Teile verwenden, die in der folgenden Abbildung grau hervorgehoben sind.



Martina möchte ihr neues Logo einfärben. Sie weiß, dass sie für jeweils 5 Quadratdezimeter ihres Logos eine Tube Farbe benötigt. Wie viele Tuben Farbe muss Martina kaufen, damit sie genug Farbe für ihr neues Logo hat?

Ergebnis: 8

Lösung: Zuerst müssen wir den Flächeninhalt des grauen Teils berechnen. Er besteht aus zwei Dreiecken. Um die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, müssen wir die Hälfte des Produkts aus der Länge einer Basis (einer der Seiten) und der zugehörigen Höhe nehmen. In unserem Fall ist es sinnvoll, die auf der Strecke PR liegenden Seiten als Basen zu nehmen. Der Grund dafür ist, dass die Höhe zu dieser Basis die Hälfte der Seitenlänge des Quadrats ist, also $12 \text{ dm} : 2 = 6 \text{ dm}$.

Die Summe der Flächeninhalte zweier Dreiecke mit gleicher Höhe ist gleich der Summe ihrer Basen, multipliziert mit der gemeinsamen Höhe und dividiert durch 2. Die Summe der Basen unserer Dreiecke lässt sich leicht berechnen – sie entspricht der Länge der Strecke PR , die so lang ist wie eine Seite des Quadrats (12 dm). Die gemeinsame Höhe beträgt 6 dm, sodass die Summe der Flächen der grauen Dreiecke $\frac{12 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm}}{2} = 36 \text{ dm}^2$ ist.

Martina muss für je 5 dm^2 eine Tube kaufen, also benötigt sie mindestens $\frac{36 \text{ dm}^2}{5 \text{ dm}^2} = 7,2$ Tuben. Da Martina nur eine ganze Anzahl von Tuben kaufen kann, runden wir diese Zahl auf die nächstgrößere ganze Zahl, also 8 auf. Daher muss Martina 8 Tuben Farbe kaufen.

Aufgabe 17 ... Unterrichtsausfall

Davids Sportunterricht in der Schule wurde heute abgesagt. Daher rief er seine Mutter an, damit sie ihn abholt und nach Hause fährt. Ihr Haus ist 2,5 km von der Schule entfernt, und bevor sie auflegte, sagte seine Mutter, dass sie bereits im Auto sitze und gleich losfahren werde, und zwar mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h. David möchte die ausgefallene Sportstunde nachholen und beschließt, direkt nach dem Telefonat mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h nach Hause zu laufen. Wenn er seine Mutter trifft, wird er in ihr Auto springen und sich den Rest des Weges von ihr fahren lassen. Wie viele Sekunden früher wird er zu Hause sein, verglichen mit jener Variante, bei der er in der Schule auf seine Mutter wartet?

Anmerkung: Vernachlässige die Zeit, die David benötigt, um ins Auto einzusteigen, sowie die Zeit, die zum Beschleunigen oder Anhalten des Autos erforderlich ist.

Ergebnis: 60

Lösung: Wir bezeichnen die Entfernung von der Schule nach Hause mit d , die Geschwindigkeit der Mutter mit v_m und die Geschwindigkeit von David mit v_D . Zunächst berechnen wir die Zeit t_1 , die David benötigen würde, um nach Hause zu kommen, wenn er nicht auf seine Mutter zulaufen würde. In diesem Fall würde die Mutter einfach die Entfernung d von zu Hause zur Schule und dann noch einmal d von der Schule nach Hause fahren, also insgesamt $2d$. Das würde sie $t_1 = \frac{2d}{v_m}$ an Zeit kosten. Wenn wir t_1 berechnen, erhalten wir:

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0,1 \text{ h} = 6 \text{ min.}$$

Nun wollen wir die Zeit t_2 berechnen, die David benötigen wird, wenn er nach Hause läuft. Diese Zeit erhalten wir als $t_2 = t_{2A} + t_{2B}$, wobei t_{2A} die Zeit bis zum Treffen mit seiner Mutter und t_{2B} die Zeit vom Treffen bis zur Ankunft zu Hause ist. Die relative Geschwindigkeit von Mutter und David ist $v_m + v_D$. Wenn wir also wissen wollen, wann sie sich treffen, können wir uns die Situation so vorstellen, als müssten sie die Strecke d mit der Geschwindigkeit $v_m + v_D$ zurücklegen. Daraus können wir die Zeit t_{2A} berechnen zu

$$t_{2A} = \frac{d}{v_m + v_D} = \frac{2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h} + 10 \text{ km/h}} = \frac{1}{24} \text{ h.}$$

Die Zeit t_{2A} ist die Zeit, die Davids Mutter benötigt, um zum Treffpunkt zu gelangen. Da die Mutter die gleiche Geschwindigkeit hat, egal in welche Richtung sie fährt, ist die Zeit t_{2B} , die sie benötigt, um vom Treffpunkt nach Hause zurückzukehren, gleich t_{2A} . Daher können wir t_2 wie folgt berechnen:

$$t_2 = t_{2A} + t_{2B} = 2 \cdot t_{2A} = \frac{2}{24} \text{ h} = \frac{1}{12} \text{ h} = 5 \text{ min}$$

Die Differenz zur ersten Variante beträgt $t_1 - t_2 = 6 \text{ min} - 5 \text{ min} = 1 \text{ min}$, also 60 s.

Aufgabe 18 ... Kostengünstige Heizung

Michael, dessen Körpertemperatur 37°C beträgt, steht in einem vollständig geschlossenen und isolierten Raum, in dem sich Luft mit einer Gesamtmasse von 6 kg und einer Anfangstemperatur von 20°C befindet. Nachdem er 2 Minuten lang in dem Raum gestanden hat, stellt er fest, dass die Luft nun eine Temperatur von 22°C hat. Sein Körper hat jedoch immer noch die gleiche Temperatur von 37°C . Wie hoch war die durchschnittliche Wärmeabgabe von Michaels Körper in Watt, während dieser 2 Minuten?

Anmerkung: Die spezifische Wärmekapazität von Luft hängt davon ab, ob der Druck oder das Volumen konstant ist. Bei konstantem Druck beträgt sie $c_p = 1005 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Bei konstantem Volumen beträgt sie $c_V = 718 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$.

Ergebnis: 71,8

Lösung: Der Raum, in dem sich Michael befindet, ist vollständig geschlossen, sodass sich das Luftvolumen darin nicht ändern kann. Daher müssen wir die spezifische Wärmekapazität für konstantes Volumen c_V

verwenden. Die Luft der Masse $m = 6 \text{ kg}$ im Raum wurde von einer Temperatur von $t_0 = 20^\circ\text{C}$ auf $t_1 = 22^\circ\text{C}$ erhöht. Dazu muss sich die Wärme $Q = c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$ aufgenommen haben. Nur Michael konnte dies bewirken, also hat er die Arbeit $W = Q$ an der Luft verrichtet. Da sich seine Temperatur nicht verändert hat, beträgt die gesamte von Michael verrichtete Arbeit genau W . Er hat dies während des Zeitintervalls $\tau = 120 \text{ s}$ getan. Daher betrug Michaels durchschnittliche Wärmeabgabe

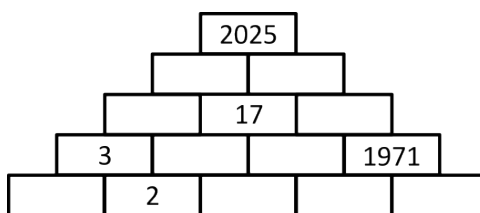
$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)}{\tau} = \frac{718 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C}) \cdot 6 \text{ kg} \cdot (22^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{120 \text{ s}} = 71,8 \text{ W}.$$

Aufgabe 19 ... Kleopatras Grab

Kleopatra befahl den Ägyptern, ihr eine angemessene Ruhestätte für die Zeit nach ihrem Tod zu bauen. Sie soll an die Form einer Pyramide erinnern. Kleopatra zeichnete einen Plan für die Baumeister, den du in der Abbildung sehen kannst. Kleopatra liebt auch Mathematik, also möchte sie, dass jeder Stein mit einer positiven ganzen Zahl beschriftet ist. Sie hat auch zusätzliche Anforderungen:

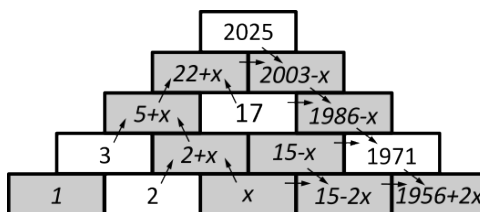
- es soll keine zwei Steine mit derselben Zahl geben;
- die Zahl auf jedem Stein (außer den Steinen in der untersten Reihe) soll die Summe der beiden Steine sein, auf denen er ruht.

Die Baumeister schafften es, Kleopatras Anforderungen zu erfüllen. Was ist die Summe der Zahlen in der untersten Reihe?



Ergebnis: 1978

Lösung: Es ist klar, dass die einzige positive Zahl, die in den Stein ganz links in der untersten Reihe geschrieben werden kann, die Zahl $3 - 2 = 1$ ist. Bezeichnen wir nun die Zahl in der Mitte der untersten Reihe mit x . Die Regel der Summenpyramide erzwingt dann die Werte aller übrigen Steine, wie in der folgenden Abbildung dargestellt:



Nun müssen wir einen passenden Wert für x finden, für den alle Einträge der Pyramide verschiedene positive ganze Zahlen sind. Die ganzen Zahlen 1, 2 und 3 sind bereits verwendet, daher $x \geq 4$. Wir werden zeigen, dass nur $x = 4$ funktioniert. Nehmen wir $x \geq 5$ an und bringen diese Aussage zum Widerspruch. In einem solchen Fall ist $15 - 2x \leq 5$. Hätten wir $x = 5$, wäre die Zahl $15 - 2x$ ebenfalls gleich 5 - ein Widerspruch. Hätten wir $x > 5$, wäre die Zahl $15 - 2x$ höchstens 3 - um positiv zu sein, müsste sie einen der Werte 1, 2 oder 3 annehmen, die bereits verwendet werden - ebenfalls ein Widerspruch. Wir haben also gezeigt, $x = 4$. Jetzt ist es einfach, die gesamte Pyramide zu berechnen und zu überprüfen, dass alle Zahlen verschieden sind:

2025				
26		1999		
9		17	1982	
3	6	11	1971	
1	2	4	7	1964

Schließlich berechnen wir die Summe der untersten Reihe als $1 + 2 + 4 + 7 + 1964 = 1978$.

Aufgabe 20 ... Unter Druck

Anne und Maria lieben Messzylinder. Anne hat einen Messzylinder, dessen Grundfläche einen Radius von 5 cm hat, während Maria einen Messzylinder mit unbekanntem Grundflächenradius hat. Anne hat Maria versprochen, ihr dabei zu helfen, den Radius ihres Zylinders herauszufinden. Sie hat zwar kein Lineal, aber ein Gerät, mit dem sie den hydrostatischen Druck am Boden der beiden Zylinder messen kann. Als Anne eine bestimmte Menge einer unbekannten Flüssigkeit in ihren Zylinder gießt, misst sie am Boden einen hydrostatischen Druck von 50 000 Pa. Dann gießt sie die gleiche Menge derselben Flüssigkeit in Marias Zylinder und stellt fest, dass der hydrostatische Druck am Boden nun 12 500 Pa beträgt. Wie groß ist der Grundflächenradius von Marias Zylinder in Zentimetern?

Anmerkung: Beide Zylinder waren hoch genug, sodass die gewählte Flüssigkeitsmenge nicht überlief.

Ergebnis: 10

Lösung: Die Formel für den hydrostatischen Druck lautet $p = \rho_{\text{Wasser}} g h$. Sowohl ρ_{Wasser} als auch g blieben zwischen den beiden Messungen gleich, daher können wir ihr Produkt als Konstante $k = \rho_{\text{Wasser}} g$ bezeichnen. Wenn wir also Annes Zylinder mit dem Index A und Marias Zylinder mit dem Index M bezeichnen, können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$p_A = k \cdot h_A, \quad p_M = k \cdot h_M.$$

Dabei sind h_A und h_M die Höhen der Flüssigkeit in den Zylindern. Da die Konstanten k in beiden Gleichungen gleich sind, können wir diese beiden Gleichungen zu einer einzigen umschreiben:

$$\frac{p_A}{h_A} = \frac{p_M}{h_M}.$$

Nun können wir die Höhen h_A und h_M anhand des Volumens der Flüssigkeit V und der Radien r_A und r_M der Zylinder ausdrücken:

$$h_A = \frac{V}{\pi r_A^2}, \quad h_M = \frac{V}{\pi r_M^2}.$$

Wenn wir das in die Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{p_A \cdot \pi r_A^2}{V} = \frac{p_M \cdot \pi r_M^2}{V},$$

$$p_A \cdot r_A^2 = p_M \cdot r_M^2.$$

Daraus setzen wir nun einfach r_M aus und erhalten das Ergebnis:

$$r_M = \sqrt{\frac{p_A \cdot r_A^2}{p_M}} = r_A \sqrt{\frac{p_A}{p_M}} = 0,05 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{50\,000 \text{ Pa}}{12\,500 \text{ Pa}}} = 0,1 \text{ m}.$$

Daher hat die Grundfläche von Marias Zylinder einen Radius von 10 cm.

Aufgabe 21 ... Das Märchenbuch

Ola hat von ihrer Großmutter ein wunderschön gedrucktes Buch mit 50 Märchen bekommen. Jedes Märchen hat eine unterschiedliche Seitenanzahl, die von 1 bis 50 reicht. Ola bemerkt, dass jedes Märchen auf einer neuen Seite beginnt und das erste Märchen auf Seite 1 anfängt. Was ist die größtmögliche Anzahl an Märchen, die auf einer ungeraden Seitenzahl beginnen können?

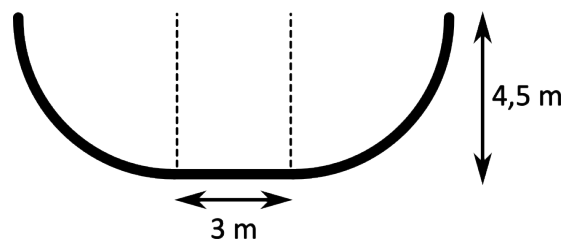
Ergebnis: 38

Lösung: Das Buch besteht aus 25 Märchen gerader Länge und 25 Märchen ungerader Länge. Jedes Märchen mit einer geraden Seitenanzahl ändert nicht die Parität der Startseite des nächsten Märchens; das heißt, wenn es auf einer geraden Seite beginnt, beginnt auch das nächste Märchen auf einer geraden Seite. Um die Anzahl der Märchen, die auf ungeraden Seitenzahlen beginnen, zu maximieren, wollen wir, dass jedes Märchen gerader Länge auf einer ungeraden Seite beginnt. Dann werden alle 25 Märchen gerader Länge auf ungeraden Seitenzahlen beginnen. Anders ist die Situation bei Märchen mit einer ungeraden Seitenanzahl. Jedes von ihnen ändert die Parität der Startseite des nächsten Märchens. Um die Anzahl der Märchen, die auf ungeraden Seitenzahlen beginnen, zu maximieren, können wir das erste Märchen ungerader Länge auf einer ungeraden Seite beginnen lassen, wonach die Startseite jedes folgenden Märchens ungerader Länge zwischen ungerade und gerade abwechselt. Daher werden von den 25 Märchen ungerader Länge 13 auf ungeraden Seitenzahlen und 12 auf geraden Seitenzahlen beginnen. Insgesamt gibt es also $25 + 13 = 38$ solcher Märchen.

Aufgabe 22 ... Snowboarding

Snowboarder:innen fahren mit ihren Snowboards in einer schneebedeckten Halfpipe. Diese besteht aus zwei Viertelkreisen mit einem Radius von 4,5 m, die einen Abstand von 3 m zueinander haben. Nimm an, dass das Snowboard einen Reibungskoeffizienten von 0 auf den Viertelkreisen und 0,05 auf den horizontalen Teilen der Rampe hat. Eine 80 kg schwere Snowboarderin startet ohne Anfangsgeschwindigkeit von der obersten Stelle der Halfpipe. Wie oft überquert sie den horizontalen Teil der Halfpipe (in jede Richtung), bevor sie zum Stillstand kommt?

Anmerkung: Alle auf die Snowboarderin wirkenden Kräfte außer der Schwerkraft und der Reibungskraft können vernachlässigt werden.



Ergebnis: 30

Lösung: Zu Beginn ist die Gesamtenergie der Snowboarderin gleich ihrer potenziellen Energie. Diese ist gleich $E_p = mgr$, wobei $m = 80$ kg ihre Masse ist und $r = 4,5$ m der Radius der Viertelkreise, dieser entspricht auch der Starthöhe.

Die Snowboarderin verliert auf den Viertelkreisen keine Energie. Nur auf dem horizontalen Teil geht aufgrund der Reibung Energie verloren. Der Reibungskoeffizient beträgt $f = 0,05$, und somit ist die Reibungskraft $F_f = mgf$. Diese Kraft wirkt über die gesamte horizontale Strecke mit der Länge $s = 3$ m.

Die Reibungskraft verrichtet eine Arbeit von $W = Fs = mgfs$ am Snowboard. Alternativ kann man sagen, dass das Snowboard diese Arbeit verrichten muss, um die Reibung zu überwinden. Bei jeder Überquerung des horizontalen Teils verringert sich die Energie also um W .

Nach n Überquerungen hat sich die Energie der Snowboarderin um nW verringert. Gesucht ist der kleinste Wert n , für den die Differenz $E_p - nW$ kleiner-gleich 0 wird. Das ist der Punkt, an dem das Snowboard zum Stillstand kommt. Die daraus folgende Ungleichung, die gelöst werden muss, lautet:

$$\begin{aligned} E_p - nW &\leq 0, \\ E_p &\leq nW, \\ n &\geq \frac{E_p}{W} = \frac{mgr}{mgs} = \frac{r}{s} = \frac{4,5 \text{ m}}{0,05 \cdot 3 \text{ m}} = 30. \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Snowboarderin am Ende der dreißigsten Überquerung des horizontalen Abschnitts zum Stillstand kommt.

Aufgabe 23 ... Schere-Stein-Papier

Majo und Mirko spielen Schere-Stein-Papier. Das Spiel läuft wie folgt ab. Gleichzeitig zeigen Majo und Mirko beide eines der Symbole *Schere*, *Stein* oder *Papier*. Wenn sie dasselbe Symbol zeigen, endet das Spiel unentschieden. Andernfalls schlägt Stein Schere, Schere schlägt Papier und Papier schlägt Stein. Majo und Mirko haben während des Spiels Statistiken geführt. Sie stellten fest, dass Stein 27 Mal, Papier 25 Mal und Schere 24 Mal verwendet wurde. Es stellte sich heraus, dass es 19 Mal zu einem Unentschieden kam. Außerdem gewann Stein 10 Mal und verlor 7 Mal. Wie oft hat Schere gegen Papier gewonnen?

Ergebnis: 2

Lösung: Die Gesamtzahl der gezeigten Symbole beträgt $27 + 25 + 24 = 76$. In jedem Spiel werden zwei Symbole gezeigt, also gab es $76 : 2 = 38$ Spiele. In 19 davon gab es ein Unentschieden, in den anderen $38 - 19 = 19$ Spielen gewann eines der Symbole. Von diesen Spielen gewann Stein 10 Mal und verlor 7 Mal. Die verbleibenden $19 - 10 - 7 = 2$ Spiele entfallen auf die Spiele, bei denen genau Schere und Papier gezeigt wurden und Schere gewann. Somit hat Schere 2 Mal gewonnen. Anmerkung: Es ist auch tatsächlich möglich, dass dies geschieht. Abgesehen von den bereits bekannten Siegen müsste das Stein-Stein-Unentschieden 5 Mal, das Papier-Papier-Unentschieden 8 Mal und das Schere-Schere-Unentschieden 7 Mal vorkommen.

Aufgabe 24 ... Mehr Kraft - Mehr Erfolg

Vier Piraten fanden eine Schatzkiste und fingen sofort an zu streiten, wer sie haben kann. Das führte dazu, dass jeder Pirat die Kiste zu sich ziehen wollte. Jack zog die Kiste mit einer Kraft von 75 N nach Norden. Pipi zog die Kiste mit einer Kraft von 120 N nach Osten. Hook zog die Kiste mit einer Kraft von 100 N nach Süden. Schließlich zog Alice die Truhe mit einer Kraft von 60 N nach Westen. Wie groß ist die resultierende Kraft, die auf die Truhe wirkt, in Newton?

Ergebnis: 65

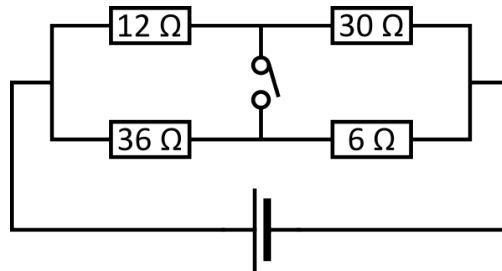
Lösung: Betrachten wir zunächst die Kräfte in Nord-Süd-Richtung. Die Kiste wird mit einer Kraft von 75 N nach Norden und mit einer Kraft von 100 N nach Süden gezogen. Daraus ergibt sich eine Kraft von $100 \text{ N} - 75 \text{ N} = 25 \text{ N}$ nach Süden. Betrachten wir nun die Kräfte in Ost-West-Richtung. Die Kiste wird mit einer Kraft von 120 N nach Osten und mit einer Kraft von 60 N nach Westen gezogen. Daraus ergibt sich eine Kraft von $120 \text{ N} - 60 \text{ N} = 60 \text{ N}$ nach Osten. Die resultierende Kraft auf die Kiste bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 25 N und 60 N. Der Satz des Pythagoras sagt uns nun, dass die Hypotenuse sich wie folgt berechnet:

$$F = \sqrt{(25 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2} = 5\sqrt{5^2 + 12^2} \text{ N} = 5 \cdot 13 \text{ N} = 65 \text{ N}.$$

Die resultierende Kraft beträgt 65 N.

Aufgabe 25 ... Widerstandsänderung

Beim Durchsuchen einer Kiste mit den Spielen ihres Großvaters findet Lena mehrere elektrische Bauteile, darunter Widerstände mit Widerstandswerten von $6\ \Omega$, $12\ \Omega$, $30\ \Omega$ und $36\ \Omega$. Außerdem findet sie eine Stromquelle mit einer Spannung von 3 V . Lena baut mit den Bauteilen eine Schaltung wie in der Abbildung und misst den Strom, der durch die Schaltung fließt. Dann legt sie den Schalter um. Um wie viel Ampere wird sich der Strom, der durch die gesamte Schaltung fließt, erhöhen? Antworte mit einer Bruchzahl in einfachster Form.



Ergebnis: $\frac{1}{14}$

Lösung: Seien die Widerstände mit $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ und $R_4 = 36\ \Omega$. Wir berechnen den Strom, der in beiden Fällen durch den Stromkreis fließt. Betrachten wir zunächst den Fall, in dem der Schalter nicht geschlossen ist. In diesem Fall betrachten wir eine Parallelschaltung von zwei Teilen. Im oberen Teil beträgt der Gesamtwiderstand $R_o = R_2 + R_3 = 42\ \Omega$, während der Widerstand im unteren Teil $R_u = R_1 + R_4 = 42\ \Omega$ beträgt. Daher beträgt der Gesamtwiderstand $R'_1 = \frac{R_o \cdot R_u}{R_o + R_u} = \frac{42\ \Omega \cdot 42\ \Omega}{42\ \Omega + 42\ \Omega} = 21\ \Omega$. Da die Spannung der Quelle $U = 3\text{ V}$ beträgt, bedeutet dies, dass der Strom, der durch den Stromkreis fließt wie folgt berechnet werden kann,

$$I_1 = \frac{U}{R'_1} = \frac{3\text{ V}}{21\ \Omega} = \frac{1}{7}\text{ A}.$$

Ähnlich können wir im Fall eines angeschlossenen Schalters vorgehen. In einem solchen Fall haben wir zwei parallele Verbindungen, die in Reihe geschaltet sind. Der erste Teil hat einen Widerstand von $R'_{21} = \frac{36\ \Omega \cdot 12\ \Omega}{36\ \Omega + 12\ \Omega} = 9\ \Omega$, während der zweite Teil einen Widerstand von $R'_{22} = \frac{30\ \Omega \cdot 6\ \Omega}{30\ \Omega + 6\ \Omega} = 5\ \Omega$ hat. Insgesamt beträgt der Widerstand $R'_2 = R'_{21} + R'_{22} = 9\ \Omega + 5\ \Omega = 14\ \Omega$. Daher beträgt der Gesamtstrom

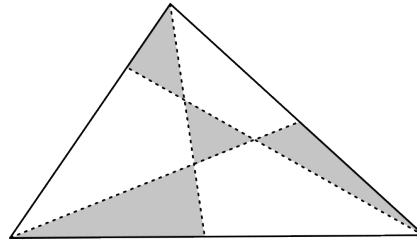
$$I_2 = \frac{U}{R'_2} = \frac{3\text{ V}}{14\ \Omega} = \frac{3}{14}\text{ A}.$$

Nachdem Lena den Schalter umlegt erhöht sich der Strom um,

$$\Delta I = I_2 - I_1 = \frac{3}{14}\text{ A} - \frac{1}{7}\text{ A} = \frac{1}{14}\text{ A}.$$

Aufgabe 26 ... Der Boden des Spielplatzes

Die Bürgermeisterin von Nábojstadt plant einen neuen Spielplatz. Zuerst muss der Boden des Spielplatzes entworfen werden. Der Spielplatz soll eine dreieckige Form mit einem Umfang von 27 m haben. Außerdem wird es schmale Pfade geben, die den Spielplatz in mehrere Teile unterteilen (siehe Abbildung). Graue Teile werden Kies enthalten und die Summe ihrer Umfänge wird 30 m betragen. Weiße Teile werden einen Gummibelag haben und die Summe ihrer Umfänge wird 33 m betragen. Was wird die Summe der Längen aller Pfade (die gestrichelten Linien) innerhalb des Spielplatzes in Metern sein?



Ergebnis: 18

Lösung: Es gibt zwei Arten von Linien in der Abbildung

- 1) Pfade (gestrichelte Linien);
- 2) Linien am Rand des Spielplatzes.

Die Aufgabe fragt uns nach der Summe der Längen der Pfade (Linien vom Typ 1). Andererseits wissen wir, dass die Summe der Längen vom Typ 2 der Umfang des Spielplatzes ist, also 27 m beträgt. Der Trick besteht darin, die Summe des Gesamtumfangs der grauen Teile und des Gesamtumfangs der weißen Teile zu betrachten, was $30\text{ m} + 33\text{ m} = 63\text{ m}$ ist. Beachte, dass in dieser Summe jeder Pfad doppelt gezählt wird, während die Linien am Rand nur einmal vorkommen. Wenn wir also den Umfang des Spielplatzes davon subtrahieren, erhalten wir, dass $63\text{ m} - 27\text{ m} = 36\text{ m}$ das Doppelte der Summe der Längen der Pfade ist. Schließlich müssen wir nur durch 2 dividieren. Die Summe der Längen der Pfade beträgt also $36\text{ m} : 2 = 18\text{ m}$.

Aufgabe 27 ... Finde eine neue Position für das Aquarium

Max hat kürzlich ein neues quaderförmiges Aquarium für seine Fische gekauft. Nun fragt er sich, wie er es am besten auf seinem Schreibtisch aufstellen soll. Er füllt das Aquarium zu $2/3$ seines Volumens mit Wasser und verschließt es. Dann stellte Max das Aquarium auf drei verschiedene Arten auf seinen Schreibtisch und misst jeweils den hydrostatischen Druck am Boden des Aquariums. Auf diese Weise erhält er Werte von 4000 Pa, 10 000 Pa und 20 000 Pa. Max erfährt damit zwar nichts Nützliches für die Fische (er ist kein Biologe und hat keine Ahnung, wie sich Druck auf sie auswirkt), aber die Messungen ermöglichten ihm überraschenderweise, das Volumen des Aquariums zu berechnen. Wie groß ist das Volumen des Aquariums in Litern?

Ergebnis: 2700

Lösung: Seien a , b und c die Abmessungen des Aquariums. Wir müssen das Volumen $V = abc$ berechnen. Die von Max gemessenen Drücke seien $p_1 = 4000\text{ Pa}$, $p_2 = 10\,000\text{ Pa}$ und $p_3 = 20\,000\text{ Pa}$. Das Aquarium ist zu $2/3$ seines Volumens mit Wasser gefüllt. Wenn Max das Aquarium also auf eine seiner Seiten stellt, erreicht das Wasser $2/3$ der derzeit vertikalen Abmessung des Aquariums. Für die drei möglichen Aufstellpositionen des Aquariums erhalten wir daher folgende Gleichungen für den hydrostatischen Druck:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{3}a\rho_{\text{Wasser}}g, \\ p_2 &= \frac{2}{3}b\rho_{\text{Wasser}}g, \\ p_3 &= \frac{2}{3}c\rho_{\text{Wasser}}g. \end{aligned}$$

Damit können wir die Maße des Aquariums berechnen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3p_1}{2\rho_{\text{Wasser}}g}, \\ b &= \frac{3p_2}{2\rho_{\text{Wasser}}g}, \\ c &= \frac{3p_3}{2\rho_{\text{Wasser}}g}. \end{aligned}$$

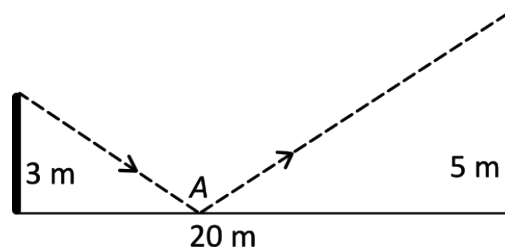
Das Volumen des Aquariums ist:

$$V = abc = \frac{27p_1p_2p_3}{8\rho_{Wasser}^3g^3} = \frac{27 \cdot 4000 \text{ Pa} \cdot 10\,000 \text{ Pa} \cdot 20\,000 \text{ Pa}}{8 \cdot (1000 \text{ kg/m}^3)^3 \cdot (10 \text{ N/kg})^3} = 2,7 \text{ m}^3.$$

Nun müssen wir das Volumen noch in Liter umrechnen. Maxs Aquarium hat somit ein Volumen von 2700 L.

Aufgabe 28 ... Nachtsow

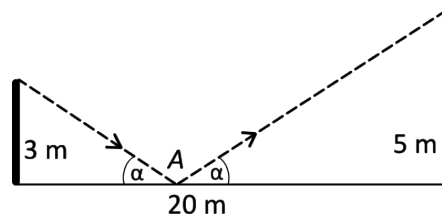
Es gibt eine Kunstinstallation im Freien in Nábojstadt. Die Installation besteht aus zwei Türmen: einer mit einer Höhe von 3 m und dem anderen mit einer Höhe von 5 m. Die Türme stehen 20 m voneinander entfernt. Der Boden zwischen den beiden Türmen ist völlig flach. Auf der Spitze des kleineren Turms befindet sich ein Laserstrahl. Er ist auf einen kleinen Spiegel am Boden gerichtet (im Punkt A in der Abbildung), sodass der Laserstrahl (gestrichelte Linie) reflektiert wird und ein Ziel auf der Spitze des größeren Turms perfekt trifft. Wie groß ist der Abstand des Spiegels von der Basis des kleineren Turms in Metern?



Anmerkung: Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.

Ergebnis: 7,5

Lösung: Der Lichtstrahl reflektiert gemäß dem Reflexionsgesetz. Daher müssen sein Einfallswinkel und sein Reflexionswinkel dieselbe Größe haben. Dies führt auch dazu, dass die in der folgenden Abbildung mit α bezeichneten Winkel dieselbe Größe haben:



Offensichtlich gibt es zwei Dreiecke in der Abbildung. Beide haben einen Winkel der Größe α und einen rechten Winkel. Deswegen sind sie ähnlich. Daraus folgt, dass das horizontale Segment der Länge 20 m im selben Verhältnis geteilt wird wie das Verhältnis der Turmhöhen, welches 3:5 ist. Der kleinere Teil hat daher die Länge $\frac{3}{3+5} \cdot 20 \text{ m} = 7,5 \text{ m}$. Oder anders ausgedrückt, der Spiegel muss in einer Entfernung von 7,5 m von der Basis des kleineren Turms platziert werden.

Aufgabe 29 ... Revolverheld

In seiner Jugend war der Revolverheld Joe sehr geschickt darin, vom Dach eines fahrenden Zuges auf ein Ziel zu schießen. Da die Züge heutzutage viel schneller fahren als früher, möchte er diese Fähigkeit wieder üben. Er stellt ein unbewegtes Ziel in einer Entfernung von 48 Metern zu einer geraden Eisenbahnstrecke auf. Dann springt er auf das Dach eines Schnellzugs, bevor dieser mit einer konstanten Geschwindigkeit von 56 m/s am aufgestellten Ziel vorbeifährt. Joe schießt eine Kugel im rechten Winkel zum Zug. Die Kugel verlässt den Revolver dabei mit einer Geschwindigkeit von 192 m/s (relativ zum Revolver gemessen). Wie groß muss Joes Abstand zum Ziel (in Metern) sein, damit die Kugel das Ziel trifft? Nimm an, dass es keinen Luftwiderstand gibt und dass Joe und das Ziel sich fast auf derselben Höhe über dem Boden befinden.

Anmerkung: Bitte niemals auf Züge klettern! (tödlicher Stromschlag)

Ergebnis: 50

Lösung: Teile das Problem in zwei Richtungen auf - eine in Richtung des Zuges und eine senkrecht dazu. In der senkrechten Richtung muss die Kugel die Strecke $s_p = 48$ m zurücklegen. Da die Kugel einen senkrechten Geschwindigkeitsanteil der Größe $v_p = 192$ m/s hat, dauert der Flug der Kugel

$$t = \frac{s_p}{v_p} = \frac{48 \text{ m}}{192 \text{ m/s}} = 0,25 \text{ s.}$$

Die Kugel hat jedoch auch einen Geschwindigkeitsanteil in Richtung der Zugstrecke. In der Zeit t legt der Zug, der sich mit der Geschwindigkeit $v_t = 56$ m/s bewegt, eine Strecke

$$s_t = v_t t = 56 \text{ m/s} \cdot 0,25 \text{ s} = 14 \text{ m}$$

zurück. Wenn Joe das Ziel treffen soll, muss er aus einer Entfernung von 14 m schießen, bevor seine Position im Zug den Fußpunkt des Lots vom Ziel auf die Eisenbahnstrecke erreicht. Er sollte also schießen, während er sich an einem Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 14 m und 48 m befindet. Der Satz des Pythagoras besagt dann, dass die Hypotenuse $\sqrt{(14 \text{ m})^2 + (48 \text{ m})^2} = 50$ m lang ist. Joe ist bei seinem Schuss also 50 m vom Ziel entfernt.

Aufgabe 30 ... Schluss mit lustig...

Während der Pause schrieb Jake einen langen Term an die Tafel: $1 + 2 + 3 + \dots + 101$. Der Mathelehrer kam vorbei, lächelte und sagte: „Interessant ... was wäre, wenn wir einige der Pluszeichen in Minuszeichen ändern? Könnten wir so das Ergebnis gleich 2025 machen?“ Die Herausforderung war nicht so einfach! Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Pluszeichen, die in Minuszeichen geändert werden müssen, damit die Summe genau 2025 ergibt?

Ergebnis: 17

Lösung: Mit einer Formel aus der Formelsammlung (Formel vom kleinen Gauß) können wir leicht berechnen, dass $1 + 2 + 3 + \dots + 101 = 5151$. Mit jeder Änderung eines Pluszeichens in ein Minuszeichen verringern wir das Ergebnis um das Zweifache der Zahl, vor der das geänderte Zeichen stand. Um die Änderung von 5151 auf 2025 so schnell wie möglich zu vollziehen, müssen wir bei den größten Zahlen mit dem Ändern beginnen. Insgesamt müssen wir das Ergebnis um $5151 - 2025 = 3126$ verringern. Die Summe der subtrahierten Zahlen muss $3126 : 2 = 1563$ sein (dividiert durch 2, da jede Änderung eines $+$ -Zeichens in ein $-$ -Zeichen das Ergebnis um das Zweifache der Zahl verringert, deren Vorzeichen wir geändert haben). Jede subtrahierte Zahl ist höchstens 100, also müssen wir mehr als $1563 : 100 = 15,63$, also mindestens 16 Zahlen, subtrahieren. Wenn wir die obersten 16 Zahlen in eine Zahl mit entgegengesetztem Vorzeichen ändern würden, bekämen wir die Zahl $5151 - 2 \cdot (86 + 87 + \dots + 101) = 5151 - 2 \cdot (187 \cdot 8) = 5151 - 2992 = 2159$. Dies liegt leicht über 2025, nämlich um $2159 - 2025 = 134$ darüber. Um das Ergebnis um 134 zu verkleinern, müssen wir das Vorzeichen vor der Zahl $134 : 2 = 67$ ändern. Auf diese Weise erhalten wir das Ergebnis 2025, nachdem wir $16 + 1 = 17$ Pluszeichen in Minuszeichen geändert haben.

Aufgabe 31 ... Ungewöhnliche Erhitzung

Anna spielt mit einem Gummiball mit einer Temperatur von 20°C und einer spezifischen Wärmekapazität von $1250 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Sie hält ihn in einer Höhe von 2,5 m über einem horizontalen Boden und lässt ihn davon abprallen. Bei jedem Aufprall verliert der Ball die Hälfte seiner Geschwindigkeit. Nehmen wir an, dass die Hälfte der Energie, die der Ball beim Aufprall verliert, zum Erwärmen des Balls verwendet wird (und der Ball keine Wärme an die Umgebung abgibt). Nach einiger Zeit kommt der Ball auf dem Boden zum Stillstand. Wie hoch ist die Temperatur des Balls in diesem Moment in Grad Celsius?

Ergebnis: 20,01

Lösung: Sei m die Masse des Balls. Die ursprüngliche potenzielle Energie des Balls beträgt $E_p = mgh$, wobei $h = 2,5$ m. Mit jedem Aufprall geht ein Teil der Gesamtenergie verloren. Nur die Hälfte dieser verlorenen Energie wird in die vom Ball absorbierte Wärme umgewandelt. Da die gesamte ursprüngliche potenzielle Energie umgewandelt wird, sobald der Ball zum Stillstand kommt, wird genau die Hälfte seiner ursprünglichen potenziellen Energie in die Wärmeenergie des Balls umgewandelt. Die vom Ball aufgenommene Wärme beträgt also $E_p/2$. Dadurch erhöht sich die Temperatur des Balls mit der spezifischen Wärmekapazität $c = 1250 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$ um Δt , gegeben durch:

$$\begin{aligned} E_p/2 &= cm\Delta t, \\ \frac{mgh}{2} &= cm\Delta t, \\ \Delta t &= \frac{gh}{2c} = \frac{10 \text{ N/kg} \cdot 2,5 \text{ m}}{2 \cdot 1250 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C})} = 0,01 ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Somit erhöht sich die Temperatur des Balls von der anfänglichen Temperatur $t = 20 ^\circ\text{C}$ zur Endtemperatur $t' = t + \Delta t = 20 ^\circ\text{C} + 0,01 ^\circ\text{C} = 20,01 ^\circ\text{C}$.

Aufgabe 32 ... Mikado

Anastasia spielt Mikado (auch bekannt als Stäbchen-Aufheben). Sie nahm 4 Stäbchen und warf sie auf einen Tisch. Glücklicherweise gelingt ihr dies auf eine lustige Weise: Von oben betrachtet scheinen alle 4 Stäbchen durch einen gemeinsamen Punkt zu verlaufen. Immer noch von oben blickend, misst Anastasia den spitzen Winkel zwischen jedem Paar von Stäbchen. Auf diese Weise erhält sie 6 Winkel. Fünf davon sind 16° , 40° , 45° , 56° und 61° . Anastasia gibt diese Information an Michael weiter. Michael erkennt, dass er nur mit diesen Informationen den sechsten Winkel nicht eindeutig bestimmen kann – es gibt zwei Möglichkeiten. Wie groß ist der größere der beiden möglichen Winkel?

Ergebnis: 79

Lösung: Nimm drei der Stäbchen und überlege: was können wir über die drei spitzen Winkel zwischen ihnen sagen? Wir werden zeigen, dass mindestens eine der folgenden Aussagen notwendigerweise wahr ist:

- a) Einer der spitzen Winkel ist die Summe der beiden anderen.
- b) Alle drei spitzen Winkel summieren sich zu 180° .

Drei Geraden teilen einen Vollwinkel in 3 Paare von Winkeln gleicher Größe. Höchstens eines dieser Paare kann aus stumpfen (oder rechten) Winkeln bestehen - andernfalls hätte der Vollwinkel mehr als 360° . Wir können also zwei spitze Paare aus den drei Paaren nehmen. Diese beiden Paare spitzer Winkel bestimmen zwei der drei spitzen Winkel, die durch die drei Geraden bestimmt werden. Jetzt ist die Frage, wie der dritte aussieht. Die beiden spitzen Winkel, die wir bereits haben, teilen sich eine gemeinsame Gerade. Nimm zuerst an, dass ihre Summe spitz ist. In einem solchen Fall ist dies der dritte spitze Winkel, womit wir bei a) oben wären. Andernfalls ist ihre Summe stumpf. Der dritte Winkel kann dann als Ergänzung dieser Summe zu 180° gefunden werden. Dies ergibt b) oben. Jetzt sind wir bereit, das ursprüngliche Problem anzugehen. Wir kennen 5 der 6 Winkel, also muss es ein Tripel von Stäbchen geben, für das wir alle Winkel kennen. Sie müssen eine der obigen Bedingungen erfüllen. Keine drei der Winkel erfüllen Teil b), da die maximale Summe der Winkel, die wir erhalten können, $45^\circ + 56^\circ + 61^\circ = 162^\circ < 180^\circ$ ist. Aber wir können zwei Tripel finden, die Teil a) erfüllen. Nämlich $16^\circ + 40^\circ = 56^\circ$ und $16^\circ + 45^\circ = 61^\circ$. Daraus können wir schließen, dass es definitiv zwei Geraden mit dem Winkel 16° gibt. Es gibt zwei Tripel von Winkeln, die durch die beiden Geraden, die den Winkel 16° bilden, und eine weitere Gerade gebildet werden, also müssen beide Tripel, die wir gefunden haben, verwendet werden. Wir können also damit beginnen, zwei Geraden mit einem Winkel von 16° zu zeichnen. Jetzt müssen wir Geraden hinzufügen, um einen 40° - und 45° -Winkel mit den Schenkeln dieses Winkels der Größe 16° zu bilden (und sie dürfen den 16° -Winkel nicht überlappen). Also haben wir zwei Fälle zu betrachten:

- Fall 1. Sie liegen beide auf derselben Seite. In diesem Fall gibt es definitiv einen spitzen Winkel $45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$. Es kann jedoch überprüft werden, dass alle Winkel so sind, wie sie sein sollten.
- Fall 2. Sie liegen auf den anderen Seiten. In diesem Fall gibt es zwei Geraden, die einen Winkel von $45^\circ + 16^\circ + 40^\circ = 101^\circ$ aufspannen. Aber dieser Winkel ist stumpf, also nehmen wir tatsächlich seine Ergänzung zu 180° , was $180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$ ist. Wiederum ist leicht zu überprüfen, dass diese Konfiguration die gewünschten Eigenschaften hat.

Alles in allem haben wir gefunden, dass die größere Möglichkeit für den sechsten Winkel 79° ist, also ist dies der von Michael berechnete Winkel.

Aufgabe 33 ... Überdurchschnittliche Mädchen

Kristine und Katherine haben über das Thema *Mittelwerte* gelernt. Beide Mädchen schrieben 8 verschiedene ganze Zahlen auf ein Blatt Papier und berechneten ihr arithmetisches Mittel. Kristine erhielt das arithmetische Mittel 45 und Kate erhielt das arithmetische Mittel 65. Dann verglichen sie die Zahlen, die sie aufgeschrieben hatten. Es stellte sich heraus, dass es genau eine ganze Zahl gab, die von beiden Mädchen geschrieben wurde. Also beschlossen sie, ein weiteres Blatt Papier zu nehmen und alle 15 eindeutigen Zahlen aufzuschreiben, die sie ursprünglich geschrieben hatten (die Zahl, die von beiden geschrieben wurde, schrieben sie nur einmal auf). Schließlich berechneten sie das arithmetische Mittel aller Zahlen auf diesem Papier. Es ergab sich der Wert 57. Was ist die ganze Zahl, die ursprünglich sowohl von Kristine als auch von Katherine aufgeschrieben wurde?

Ergebnis: 25

Lösung: Kristine schrieb 8 Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 45. Die Summe dieser 8 Zahlen muss also $8 \cdot 45 = 360$ sein. Ähnlich schrieb Kate 8 Zahlen mit dem arithmetischen Mittel 65. Die Summe dieser 8 Zahlen muss also $8 \cdot 65 = 520$ sein. Folglich beträgt die Summe der Zahlen, die von beiden Mädchen geschrieben wurden, $360 + 520 = 880$. Die Mädchen schrieben dann $8 + 8 - 1 = 15$ Zahlen (die Zahl, die sie gemeinsam hatten, schrieben sie nicht) mit dem arithmetischen Mittel 57 auf. Ihre Summe war also $15 \cdot 57 = 855$. Diese Zahl unterscheidet sich von der Zahl 880, die wir zuvor erhalten haben, um die Zahl, die von beiden Mädchen geschrieben wurde, $880 - 855 = 25$ war.

Aufgabe 34 ... Bojen

Eine Firma möchte Bojen herstellen. Sie kann eine rote Boje in Form einer Kugel mit einem Volumen von 40 l und einer durchschnittlichen Dichte von 50 kg/m^3 herstellen. Aus Stabilitätsgründen möchte die Firma eine Kette mit vernachlässigbarem Volumen an der Boje befestigen, sodass 20 % des Volumens der Boje unter Wasser liegt. Die längenbezogene Masse der Kette beträgt 3 kg/m . Wie lang muss die Kette (in Metern) sein, die die Firma an der Boje befestigen muss, um die Anforderungen zu erfüllen?

Ergebnis: 2

Lösung: Zunächst müssen wir die Größe „längenbezogene Masse“ verstehen. Bezeichnen wir sie mit λ . Aus ihrer Einheit kg/m können wir ableiten, dass eine Kette mit der Masse m und der Länge ℓ die längenbezogene Masse $\lambda = \frac{m}{\ell}$ hat. In unserer Aufgabenstellung kennen wir die längenbezogene Masse $\lambda = 3 \text{ kg/m}$ und müssen die Länge ℓ berechnen. Um auf unsere ursprüngliche Frage zurückzukommen: Wir haben eine Kugel mit einem Volumen von $V = 40 \text{ l} = 0,04 \text{ m}^3$ und einer durchschnittlichen Dichte von $\rho = 50 \text{ kg/m}^3$. Diese Kugel hat eine Masse von $m_0 = \rho V = 2 \text{ kg}$. 20 % der Kugel müssen unter Wasser sein, daraus folgt, dass sie eine durchschnittliche Dichte von 20 % der Dichte des Wassers haben muss. Sie muss also die Dichte $\rho' = \frac{20}{100} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 200 \text{ kg/m}^3$ haben. Das Anbringen einer Kette mit vernachlässigbarem Volumen erhöht das Volumen nicht, das Volumen bleibt also V . Daher muss die Gesamtmasse der Boje $m = \rho' V =$

$200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^3 = 8 \text{ kg}$ betragen. Durch das Anbringen der Kette müssen wir also die Masse um $m - m_0 = 6 \text{ kg}$ erhöhen. Dazu benötigen wir eine Kette der Länge

$$\ell = \frac{m - m_0}{\lambda} = \frac{6 \text{ kg}}{3 \text{ kg/m}} = 2 \text{ m}.$$

Aufgabe 35und die Widerstände widerstehen

Kubo hat zwei Widerstände gefunden. Er kennt deren Widerstand nicht und hat beschlossen ihn herauszufinden. Zuerst hat er sie in Reihe geschaltet und festgestellt, dass der Widerstand dieser Schaltung 64Ω beträgt. Dann hat er sie parallel geschaltet und eine Schaltung mit einem Widerstand von 7Ω erhalten. Wie groß ist der größere Widerstand in Ohm der beiden Widerstandsbauelemente?

Ergebnis: 56

Lösung: Seien R_1 und R_2 die Widerstände der beiden Widerstandsbauelemente. Die Bedingung für die Reihenschaltung gibt uns eine Gleichung

$$R_1 + R_2 = 64 \Omega.$$

Gleichermaßen ergibt sich aus der Bedingung für die Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{7 \Omega}.$$

Wir haben also ein System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, das wir nun lösen müssen. Wenn wir die zweite Bedingung etwas umschreiben, können wir sie mithilfe der ersten Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7 \Omega}, \\ \frac{64 \Omega}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7 \Omega}, \\ R_1 R_2 &= (7 \cdot 64) \Omega^2 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Widerstände der Widerstandsbauelemente Werte haben, deren Summe 64 und deren Produkt 448 beträgt. Wenn wir vermuten, dass für die Werte der Widerstände ganze Zahlen gewählt wurden, müssen wir nur ein Paar komplementärer Teiler von 448 finden, deren Summe 64 ist. Mindestens einer der Widerstände muss durch 8 teilbar sein (da 448 durch $64 = 8^2$ teilbar ist). Da die Summe beider Werte ebenfalls durch 8 teilbar ist, muss auch der zweite Wert durch 8 teilbar sein. Damit bleibt uns nur eine Möglichkeit: Die Werte 8 und 56 erfüllen die erforderlichen Bedingungen. Die Aufgabenstellung fragt nach dem Wert des Widerstandsbauelements mit dem größeren Widerstand, diesen haben wir mit 56Ω ermittelt.

Aufgabe 36 ... Ein absolut anderes Problem

Susan spielt mit Zahlen. Sie wählt 20 paarweise verschiedene positive ganze Zahlen (also keine zwei sind gleich) mit der Summe 2025 und schreibt sie in beliebiger Reihenfolge mit einem blauen Stift im Kreis auf. Dann betrachtet sie jedes Paar benachbarter Zahlen, berechnet ihre positive Differenz (d.h. sie subtrahiert die kleinere von der größeren) und schreibt sie mit einem roten Stift zwischen die Zahlen. Dann berechnet sie die Summe aller roten Zahlen. Was ist die minimale Summe aller 20 roten Zahlen?

Ergebnis: 40

Lösung: Sei m die kleinste Zahl unter den geschriebenen Zahlen und M die größte. Sie müssen irgendwo auf dem Kreis geschrieben sein. Betrachten wir die Bögen von m nach M . Es gibt zwei solcher Bögen, wir konzentrieren uns jetzt auf einen von ihnen. Wir behaupten, dass die Summe der roten Zahlen entlang dieses Bogens mindestens $M - m$ beträgt. Wenn die Zahlen entlang des Bogens in aufsteigender Reihenfolge von

m nach M geschrieben sind, z.B. in der Form $m < a_1 < a_2 < \dots < a_k < M$, dann ist die Summe der roten Zahlen

$$(a_1 - m) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (M - a_k) = M - m.$$

Andernfalls gibt es einen Index, bei dem der Wert fällt. In einem solchen Fall müssen wir den Wert nicht nur in Schritten von m auf M erhöhen, sondern zusätzlich den Wertabfall kompensieren. Daher erhöht sich die Summe der roten Zahlen um mindestens das Zweifache des Wertabfalls. Dies erhöht die Gesamtsumme der roten Zahlen, das ist also definitiv nicht der optimale Fall. Bisher haben wir festgestellt, dass die minimale Summe der roten Zahlen entlang jedes Bogens von m nach M $M - m$ beträgt. Es gibt zwei solcher Bögen, also beträgt die minimale Summe der roten Zahlen $2(M - m)$. Das Problem läuft nun darauf hinaus, die kleinstmögliche Differenz $M - m$ zu finden. Wir würden die kleinstmögliche Differenz erhalten, wenn die geschriebenen Zahlen 20 aufeinanderfolgende Zahlen bilden würden (in diesem Fall hätten wir $M - m = 19$). Dies ist jedoch nicht der Fall. Es ist ersichtlich, dass die Summe von 20 aufeinanderfolgenden Zahlen immer das 10-fache der Summe des größten und kleinsten Elements ist. Insbesondere ist sie ein Vielfaches von 10. Die Zahl 2025 ist jedoch kein Vielfaches von 10. Andererseits können wir schlussfolgern, dass die Differenz $M - m = 20$ erreichbar ist. Ein Weg ist, die erforderlichen 20 Zahlen zu finden. Der Durchschnittswert der 20 Zahlen, die wir summieren, sollte ungefähr $2025 : 20 = 101,25$ sein. Deshalb sollten wir 20 aufeinanderfolgende ganze Zahlen betrachten (einige von ihnen müssen geändert werden), sodass die Zahl 101,25 zwischen dem 10. und 11. Glied liegt. Diese beiden Glieder sind also 101 und 102. Wenn wir die Zahlen 92, 93, ..., 101, 102, ..., 111 nehmen würden, erhielten wir die Summe $10 \cdot (101 + 102) = 2030$. Wir müssen aber die Summe 2025 erhalten, also verringern wir die kleinsten 5 Zahlen (92, 93, 94, 95, 96) um eins. Auf diese Weise erhalten wir ein 20-Tupel mit der Summe 2025, für das $M - m = 20$ gilt. Daher beträgt die minimale Summe der roten Zahlen $2(M - m) = 2 \cdot 20 = 40$.

Aufgabe 37 ... Hüpfball

Martyna hat einen Hüpfball, mit dem sie spielt. Sie wirft ihn horizontal gegen eine Wand. Im Moment des Wurfs befindet sich der Ball in einer Höhe von 1,6 m und hat eine Geschwindigkeit von 16 m/s. Dann prallt der Ball in einer Höhe von 0,8 m von der Wand ab und springt anschließend vom Boden zurück. Jeder Sprung erfolgt gemäß dem Reflexionsgesetz, jedoch verliert der Ball dabei $1/4$ seiner kinetischen Energie. Wie hoch ist die maximale Höhe in Metern, die der Ball nach dem Sprung vom Boden erreicht?

Ergebnis: 1,05

Lösung: Sei m die Masse des Hüpfballs. Zu Beginn befindet sich der Ball in einer Höhe von $h_0 = 1,6$ m, er besitzt also eine potenzielle Energie von $E_{p_0} = mgh_0$. Außerdem bewegt er sich mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 16$ m/s, sodass er eine kinetische Energie von $E_{k_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ besitzt. Seine Gesamtenergie zu Beginn beträgt

$$E_0 = E_{p_0} + E_{k_0} = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \left(10 \text{ N/kg} \cdot 1,6 \text{ m} + \frac{1}{2}(16 \text{ m/s})^2\right) m = 144 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Der erste Aufprall erfolgt in einer Höhe von $h_1 = 0,8$ m, der Hüpfball hat also eine potentielle Energie von $E_{p_1} = mgh_1 = 10 \text{ N/kg} \cdot 0,8 \text{ m} \cdot m = 8 \text{ J/kg} \cdot m$. Daher ist seine kinetische Energie vor dem Aufprall gegeben durch $E'_{k_1} = E_0 - E_{p_1} = 144 \text{ J/kg} \cdot m - 8 \text{ J/kg} \cdot m = 136 \text{ J/kg} \cdot m$. Sie verringert sich zu Dreiviertel, sodass sie nach dem Aufprall $E_{k_1} = \frac{3}{4}E'_{k_1} = \frac{3}{4}(136 \text{ J/kg} \cdot m) = 102 \text{ J/kg} \cdot m$ beträgt. Die Gesamtenergie nach dem ersten Aufprall ergibt sich als

$$E_1 = E_{p_1} + E_{k_1} = 8 \text{ J/kg} \cdot m + 102 \text{ J/kg} \cdot m = 110 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Wir verfahren analog mit dem zweiten Aufprall. Jetzt ist es einfacher, da es keine potenzielle Energie E_{p_2} gibt. Die Gesamtenergie ist vollständig kinetisch, sodass nun die Gesamtenergie auf drei Viertel sinkt. Daraus ergibt sich:

$$E_2 = \frac{3}{4}E_1 = \frac{3}{4}(110 \text{ J/kg} \cdot m) = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Jetzt müssen wir den Moment finden, in dem der Hüpfball seine maximale Höhe erreicht. Dies geschieht, wenn der vertikale Teil der Geschwindigkeit null ist. Es gibt jedoch einen horizontalen Teil der Geschwindigkeit, daher sollten wir auch die Informationen darüber im Auge behalten. Aber das lässt sich jetzt leicht berechnen. Zu Beginn betrug der horizontale Teil der Geschwindigkeit v_0 . Nach jedem Aufprall verringert sich die Größe des Geschwindigkeitsvektors (und wird gewissermaßen reflektiert). Die Verringerung gestaltet sich so, dass die kinetische Energie auf drei Viertel sinkt. Die kinetische Energie ist jedoch proportional zur zweiten Potenz der Geschwindigkeit, sodass die Geschwindigkeit auf $\sqrt{3/4}$ der ursprünglichen Größe abnehmen muss. Dies passiert zweimal, nach zwei Sprüngen beträgt der horizontale Teil der Geschwindigkeit $v_2 = (\sqrt{3/4})^2 v_0 = \frac{3}{4} v_0 = 12 \text{ m/s}$.

Am höchsten Punkt hat der Hüpfball noch immer die Geschwindigkeit v_2 und somit die kinetische Energie $E_{k_3} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} (12 \text{ m/s})^2 \cdot m = 72 \text{ J/kg} \cdot m$. Die potenzielle Energie beträgt daher $E_{p_3} = E_2 - E_{k_3} = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m - 72 \text{ J/kg} \cdot m = 10,5 \text{ J/kg} \cdot m$. Dies bedeutet schließlich, dass die maximale Höhe h_3 , bis zu der der Hüpfball springt,

$$h_3 = \frac{E_{p_3}}{mg} = \frac{10,5 \text{ J/kg} \cdot m}{m \cdot 10 \text{ N/kg}} = 1,05 \text{ m}$$

beträgt.

Aufgabe 38 ... Polarisierte Gesellschaft

Die Gesellschaft ist so polarisiert, dass Thomas beschloss herauszufinden, ob die Menschen in allem gespalten sind oder ob sie etwas gemeinsam haben. Er fand heraus, dass die Gesellschaft in zwei Gruppen geteilt ist – eine mit a Personen und die andere mit b Personen. Um herauszufinden, was sie gemeinsam haben, berechnete er den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b . Er addierte den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache und erhielt die Summe 20 250. Wie viele verschiedene Werte kann der größte gemeinsame Teiler annehmen?

Ergebnis: 39

Lösung: Aus der Definition des größten gemeinsamen Teilers wissen wir, dass $\text{gcd}(a, b)$ ein Teiler von sowohl a als auch b ist. Ähnlich sind sowohl a als auch b Teiler von $\text{lcm}(a, b)$. Daraus folgt, dass $\text{lcm}(a, b)$ durch $\text{gcd}(a, b)$ teilbar ist. Wir können also positive ganze Zahlen d, k finden, sodass

$$d = \text{gcd}(a, b), \quad kd = \text{lcm}(a, b).$$

Andererseits können wir für jede Wahl von k und d passende a und b finden. Dafür genügt es, $a = d$ und $b = kd$ zu wählen. Da wir die Anzahl der passenden Werte für d finden müssen, können wir a und b vergessen und nur mit d und kd arbeiten. Die Bedingung lässt sich umschreiben in die Form $d + kd = d(k + 1) = 20\,250$. Das ist nur das Schreiben der Zahl 20 250 als Produkt zweier Faktoren, von denen einer (nämlich $k + 1$) einen Wert von mindestens 2 hat. d kann also jeder Teiler von 20 250 sein, außer 20 250 selbst (was $k + 1$ gleich 1 machen würde). Die ursprüngliche Frage läuft also auf das Problem hinaus, die Anzahl der positiven Teiler der Zahl 20 250 zu finden. Die Primfaktorzerlegung von 20 250 ist $20\,250 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$. Ihre Teiler haben eine Primfaktorzerlegung mit denselben Primzahlen, aber möglicherweise mit kleineren Exponenten (bis hin zu 0). Wir haben also 2 Möglichkeiten für die Primzahl 2 (0 oder 1), 5 Möglichkeiten für die Primzahl 3 (0, 1, 2, 3, 4) und 4 Möglichkeiten für die Primzahl 5 (0, 1, 2, 3). Insgesamt hat die Zahl 20 250 $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ Teiler. Wir müssen den Teiler 20 250 ausschließen, was uns $40 - 1 = 39$ mögliche Werte für den größten gemeinsamen Teiler von Thomas' Zahlen lässt.

Aufgabe 39 ... Chinesische Süßigkeiten

Arthur liebt Süßigkeiten. Sein Freund war in China und hat ihm 6 Süßigkeiten mitgebracht, jede mit einem anderen Geschmack. Arthur schätzt das Geschenk seines Freundes so sehr, dass er die Süßigkeiten auf eine bestimmte Weise essen möchte: Er wählt immer entweder eine oder zwei Süßigkeiten aus, die er gleichzeitig

isst. So macht er weiter, bis er alle Süßigkeiten gegessen hat. Auf wie viele Arten kann Arthur die Reihenfolge des Essens der Süßigkeiten wählen?

Ergebnis: 3690

Lösung: Sei $p(n)$ für jede positive ganze Zahl n die Anzahl der Arten, auf die Arthur n Süßigkeiten essen kann. Wir beschreiben eine Methode, wie $p(n)$ aus $p(n-1)$ und $p(n-2)$ berechnet werden kann. Wenn n Süßigkeiten übrig sind, kann Arthur wählen, ob er eine oder zwei Süßigkeiten isst. Wenn er sich entscheidet, eine Süßigkeit zu essen, kann er eine von n Süßigkeiten wählen. Dann bleiben ihm $p(n-1)$ Möglichkeiten, die restlichen Süßigkeiten zu essen. Das gibt Arthur $n \cdot p(n-1)$ Möglichkeiten. Wenn Arthur sich entscheidet, zwei Süßigkeiten zu essen, kann er die gegessenen Süßigkeiten auf $\frac{n(n-1)}{2}$ Arten auswählen. Ihm bleiben dann $p(n-2)$ Möglichkeiten, die restlichen Süßigkeiten zu essen. Daher haben wir für allgemeines $n \geq 3$

$$p(n) = n \cdot p(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot p(n-2).$$

Wir verwenden diese Formel, um $p(6)$ zu berechnen. Wir können leicht von Hand berechnen, dass $p(1) = 1$, $p(2) = 3$. Des Weiteren erhalten wir

$$\begin{aligned} p(3) &= 3p(2) + 3p(1) = 9 + 3 = 12, \\ p(4) &= 4p(3) + 6p(2) = 48 + 18 = 66, \\ p(5) &= 5p(4) + 10p(3) = 330 + 120 = 450, \\ p(6) &= 6p(5) + 15p(4) = 2700 + 990 = 3690. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass Arthur seine Süßigkeiten auf 3690 Arten essen kann.

Aufgabe 40 ... Purzelnde Bücher

Matthew ist ein großartiger Schüler. Wenn er eine Pause vom Lernen braucht, spielt er mit seinen Büchern, von denen eines eine Masse von 0,5 kg und das andere eine Masse von 1 kg hat. Er legt das leichtere Buch auf einen horizontalen Tisch und das andere Buch darauf. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Buch und dem Tisch beträgt 0,3 und zwischen den beiden Büchern untereinander 0,6. Matthew beginnt dann, horizontal mit einer Kraft F am leichteren Buch zu ziehen. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von F in Newton, bei dem das obere Buch vom unteren Buch herunterrutscht.

Ergebnis: 13,5

Lösung: Bezeichnen wir die Massen und den Reibungskoeffizienten wie folgt: $m_1 = 0,5 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $f_1 = 0,3$, $f_2 = 0,6$. Wir müssen nun die Kräfte, die auf die Bücher wirken, beschreiben.

Beginnen wir mit der vertikalen Richtung. Auf das Buch mit der Masse m_2 wirken zwei Kräfte. Nämlich die Gravitationskraft $F_{g_2} = m_2 g$ und die Kraft F_{N_2} vom anderen Buch. Da sich dieses Buch nicht in vertikaler Richtung bewegt, erhalten wir $F_{N_2} = F_{g_2}$. Auf das Buch mit der Masse m_1 wirken drei Kräfte: die Schwerkraft F_{g_1} , die Kraft F_{N_2} des Buches mit der Masse m_2 und schließlich die Kraft F_{N_1} vom Tisch. Auch dieses Buch bewegt sich nicht, daher erhalten wir

$$F_{g_1} + F_{N_2} - F_{N_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{N_1} = F_{g_1} + F_{N_2} = F_{g_1} + F_{g_2} = (m_1 + m_2)g.$$

Betrachten wir nun die Kräfte in horizontaler Richtung. Nehmen wir an, dass die Kraft F , mit der Matthew zieht, nach rechts gerichtet ist. Wir beginnen wieder mit dem Buch mit der Masse m_2 . Auf dieses wirkt nur eine Kraft – die Reibungskraft. Ohne Reibung würde das Buch vom anderen Buch herunterrutschen. Dazu müsste es sich relativ zum anderen Buch nach links bewegen. Die Reibungskraft wirkt dieser Bewegung entgegen, daher wirkt sie nach rechts. Sie beträgt $F_2 = F_{t_2} \leq f_2 F_{N_2} = f_2 F_{g_2} = f_2 m_2 g$.

Fahren wir mit dem Buch mit der Masse m_1 fort. Es sind drei Kräfte zu berücksichtigen. Die Erste davon ist eindeutig F . Die zweite ist die Reibungskraft zwischen dem Buch und dem Tisch. Sie bremst das Buch mit $F_{t_1} \leq f_1 F_{N_1} = (m_1 + m_2) f_1 g$. Die dritte Kraft ist eine Reaktionskraft auf die Kraft F_{t_2} , die auf das

obere Buch wirkt. Daher wirkt diese Reaktionskraft mit derselben Kraft auf das untere Buch, jedoch nach links. Die resultierende Kraft, die auf dieses Buch wirkt, ergibt sich also als

$$F_1 = F - F_{t_1} - F_{t_2} \geq F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g.$$

Wenn das Buch mit der Masse m_2 herunterrutscht, müssen alle Reibungskräfte so groß wie möglich sein (da sich alles relativ zu den Objekten bewegt, an denen es reibt). In diesem Fall haben wir also $F_1 = F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g$ und $F_2 = f_2 m_2 g$. Das obere Buch rutscht herunter, wenn $a_1 > a_2$, wobei a_1 und a_2 die Beschleunigungen der Bücher sind. Das leuchtet ein – wenn das leichtere Buch zu irgendeinem Zeitpunkt schneller beschleunigt als das schwerere Buch, beginnt das schwerere Buch abzurutschen. Der kritische Fall ist $a_1 = a_2$. Für diesen Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2, \\ \frac{F_1}{m_1} &= \frac{F_2}{m_2}, \\ \frac{F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g}{m_1} &= \frac{f_2 m_2 g}{m_2}, \\ F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g &= m_1 f_2 g, \\ F &= (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2 + m_1 f_2)g, \\ F &= (0,5 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,6 + 0,5 \text{ kg} \cdot 0,6) \cdot 10 \text{ N/kg} = 13,5 \text{ N}. \end{aligned}$$

Wir kommen zu dem Schluss, dass die kleinstmögliche Kraft, mit der Matthew am Buch ziehen muss, 13,5 N beträgt.

Aufgabe 41 ... Schachkönig Teil 2

Kate hat die letzte Aufgabe über den König auf einem unendlichen Schachbrett gelöst, also sucht sie jetzt nach einer größeren Herausforderung. Ihre zweite Frage über den Schachkönig auf einem unendlichen Schachbrett lautet: Wie viele verschiedene Wege von genau vier Zügen kann der König machen, wenn er auf demselben Feld endet, auf dem er gestartet ist?

Ergebnis: 216

Lösung: Der König muss in 4 Zügen zu seiner Ausgangsposition zurückkehren. Schauen wir uns seine Position nach 2 Zügen an. In diesem Moment hat er noch $4 - 2 = 2$ Züge übrig. Nennen wir dies vorerst ein „rotes“ Feld. Der König kann beliebige 2 Wege zum roten Feld kombinieren, um einen gültigen 4-Züge-Weg zu erhalten, der die erforderlichen Eigenschaften erfüllt - er benutzt einen Weg, um zum roten Feld zu gelangen, und einen anderen Weg (in entgegengesetzter Richtung), um zum ursprünglichen Feld zurückzukehren. Bestimmen wir nun, welche Felder der König in zwei Zügen erreichen kann. Die Anzahl der Wege, jedes Feld zu erreichen, hängt von der Anzahl der benachbarten Felder ab, von denen der König in einem Zug ankommen kann. Daher erhält man die Anzahl der Wege, ein gegebenes Feld nach zwei Zügen zu erreichen, indem man die Anzahlen der Wege addiert, die seinen Nachbarn nach einem Zug entsprechen. Wenn die ursprüngliche Position des Königs durch ein Feld mit einem zusätzlichen Kasten markiert ist, zeigt die folgende Tabelle die Anzahl der Wege, jedes Feld in zwei Zügen zu erreichen:

	1	2	3	2	1	
	2	2	4	2	2	
	3	4	8	4	3	
	2	2	4	2	2	
	1	2	3	2	1	

Jetzt nutzen wir unsere frühere Beobachtung, dass der König von jedem Feld auf die gleiche Anzahl von Wegen zum Startfeld zurückkehren kann. Das ergibt $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 216$ mögliche Wege.

Aufgabe 42 ... Auf dem Grund

Spiridion ist ein vollkommen glatter, homogener Würfel mit einer Seitenlänge von 50 cm und einer Dichte von 1200 kg/m^3 . Er befindet sich auf dem vollkommen glatten Boden eines Aquariums, das bis zu einer Höhe von 2 m mit Wasser gefüllt ist. Wie groß ist die Kraft in Newton, mit der Spiridion auf den Boden des Aquariums wirkt?

Anmerkung: Angenommen, dies passiert unter Standardbedingungen -- Temperatur 20°C und atmosphärischer Druck.

Ergebnis: 30250

Lösung: Wir müssen die Kräfte analysieren, die auf den Würfel mit der Seitenlänge $a = 50 \text{ cm}$ und der Dichte $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ wirken, der sich am Boden eines mit Wasser gefüllten Aquariums mit der Höhe $h = 2 \text{ m}$ befindet. Die erste Kraft ist offensichtlich die Schwerkraft $F_g = mg = a^3 \rho g$. Als Nächstes gibt es Kräfte, mit denen das Wasser auf den Würfel wirkt. Die Kräfte, die auf die vertikalen Flächen wirken, heben sich gegenseitig auf, sodass wir nur die Kräfte auf die horizontalen Flächen betrachten müssen. Allerdings befindet sich unter dem Würfel kein Wasser (der Würfel und der Boden des Aquariums sind vollkommen glatt), folglich kann keine Kraft des Wassers auf den Boden des Würfels wirken. Es wirkt jedoch eine Kraft auf die Oberseite des Würfels.

Den Wasserdruck an der Oberseite des Würfels nennen wir p . Da die Oberseite die Fläche $A = a^2$ hat, beträgt die Druckkraft auf die Oberseite $F_p = pA$. Jetzt müssen wir nur noch p berechnen. Die Oberseite befindet sich in der Tiefe $h' = h - a$, der hydrostatische Druck hat also die Größe $p_h = h' \rho_{\text{Wasser}} g$. Dies ist jedoch nicht der einzige Druck, den wir berücksichtigen müssen. Wir befinden uns unter Standardbedingungen, daher wirkt ein atmosphärischer Druck p_A auf die Wasseroberfläche im Aquarium. Nach dem Pascal'schen Gesetz erhöht sich der Gesamtdruck im Wasser um diesen atmosphärischen Druck. Der Druck direkt über der Oberseite des Würfels beträgt demnach $p = p_A + p_h$. Nun können wir alles zusammenfassen, um herauszufinden, dass die Gesamtkraft, mit der der Würfel auf den Boden wirkt,

$$\begin{aligned} F &= F_g + F_p = a^3 \rho g + (p_A + (h - a) \rho_{\text{Wasser}} g) a^2, \\ F &= (0,5 \text{ m})^3 \cdot 1200 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} + (100\,000 \text{ Pa} + (2 \text{ m} - 0,5 \text{ m}) \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg}) \cdot (0,5 \text{ m})^2, \\ F &= 30\,250 \text{ N} \end{aligned}$$

beträgt.

Anmerkung: Es kann einem so vorkommen, als sei das Ergebnis sehr groß. In Wirklichkeit gibt es nichts, was „vollkommen glatt“ ist, sodass zumindest ein wenig Wasser vorhanden ist, das als Medium für den Auftrieb dient. Wenn ein gewisser Auftrieb vorhanden ist, hilft dies dem untergetauchten Festkörper sehr, dadurch ist die Kraft, mit der er auf den Boden wirkt, nicht so groß. Diese Aufgabenstellung ist jedoch nicht so übertrieben, wie es scheint. Wenn ein U-Boot den Meeresboden berührt, kann der Verlust an Auftrieb so groß sein, dass das U-Boot nicht mehr vom Meeresboden aufsteigen kann. Heutzutage verfügen U-Boote über Systeme, um dieses Problem zu umgehen, dennoch vermeiden sie in der Regel den Kontakt mit dem Meeresboden (erstens, um physische Schäden zu verhindern, und zweitens, weil sie oft Kühlungsöffnungen am Boden des U-Boots haben).

Danksagung

Vorsitz des Aufgabenauswahlkomitees

Miroslav Pajger

Aufgabenvorschläge

Rikkie Gieler, Anna Koziara, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Aufgaben und Lösungsformulierung

Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Überarbeitung

Zvonko Andrijević, Emanuel Bajamić, Patrik Cvetek, Karlo Jokoš, Lucia Kleščová, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Lucija Relić, Martyna Ślusarczyk, Matej Vojvodić

Übersetzung

Carmen Barriuso, Veronika Bartáková, Kurt Bergler, Kacper Błachut, Patrik Cvetek, Matěj Dudek, Szymon Dzielowski, Rikke Gieler, Johanna Hackl, Walter Hametner, Kornel Howil, Lucia Kleščová, Vojtěch Kubrycht, Kateřina Kučerová, Vít Kupilík, Hartwig Lasser, Maria Lebitsch, Nastazja Lukoszek, Anna Matiašková, Piotr Miernik, Tomáš Miškov, Hannah Mittermayr, Azucena Molina-Solis, Miroslav Pajger, Francesca Papatola, Kacper Piotrowski, Marián Poturnay, David Präsent, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Dmytro Rzhemovskiy, Jakub Savula, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Szymon Tobiasz, Matej Vojvodić, Leonore Wöß, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Koordinator:innen

Dmytro Rzhemnovskiy, Kurt Bergler, David Präsent (AT), Veronika Bendíková, Soňa Vasilová (SK), Martyna Ślusarczyk (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Wettbewerbsstandorte

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Elbląg:** Zespół Szkół Mechanicznych • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Gdynia:** Szkoła Podstawowa nr 26 • **Graz:** Universität Graz • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkové Timravy • **Michalovce:** Gymnázium Pavla Horova • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolкера • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ludovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien, Erwin Schrödinger Institute, FH Technikum, TU Wien • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu