

Oplossingen
13e Naboj Junior

21 november 2025



Hallo,

u heeft op dit moment het boekje met de opgaven en oplossingen van Náboj Junior 2025 in uw handen. Náboj Junior is een internationale wiskunde- en natuurkundewedstrijd die voornamelijk bedoeld is voor teams van 4 leerlingen uit klas 2 en 3. De wedstrijd duurt 120 minuten, en in die tijd proberen de teams zoveel mogelijk opgaven op te lossen. De vragen streven ernaar niet alleen kennis van wiskunde en natuurkunde te toetsen, maar ook het vermogen om problemen innovatief en vindingrijk te benaderen.

De 13e editie van Náboj Junior vond plaats op 21 november 2025. Dit jaar deden er 35 teams mee in Nederland en 82 teams mee in België. Náboj Junior vond plaats in 61 steden in Slowakije, Tsjechië, Oostenrijk en Polen. Tegelijkertijd werd de wedstrijd in een online vorm gehouden in Nederland, België en Kroatië.

De wedstrijd in Nederland wordt georganiseerd door een team van vrijwilligers die hun tijd en energie besteden om de deelnemers te laten concurreren en hun kennis te laten testen. Het doel van Náboj Junior is om de vaardigheden van leerlingen op het gebied van wiskunde en natuurkunde te ontwikkelen en te laten zien dat de natuurwetenschappen veel interessante uitdagingen en mogelijkheden bieden voor een breed scala aan leerlingen.

De Náboj Junior wedstrijd is ontstaan als een gezamenlijk project van de Trojsten Association (Slowakije) en de MFF UK Výchova (Tsjechië). De leden van de organisaties zijn universiteitsstudenten van de faculteit Wiskunde, Natuurkunde en Informatica van de Comeniusuniversiteit in Bratislava en de faculteit Wiskunde en Natuurkunde van de Kareluniversiteit in Praag, die ernaar streven de talenten van studenten te ontwikkelen en de belangstelling voor natuurwetenschappen te vergroten.

We kijken ernaar uit om je volgend jaar weer te zien,

Tomas Miskov, Hoofdorganisator voor Nederland

Opgave 1 ... Lang haar

Het haar van Rapunzel groeit met een snelheid van 1,5 cm per maand. Ze heeft haar haar gedoneerd, zodat het nu slechts 20 cm lang is. Ze zou graag willen dat haar haar weer 2 meter lang wordt. Hoeveel jaar moet Rapunzel daarop wachten?

Antwoord: 10

Oplossing: Voordat haar haar 2 meter wordt moet er nog $200\text{ cm} - 20\text{ cm} = 180\text{ cm}$ bijkomen. Dat duurt $180\text{ cm} : 1,5\text{ cm/maand} = 120\text{ maanden} = 10\text{ jaar}$. Dus Rapunzel moet 10 jaar wachten.

Opgave 2 ... Fietswedstrijd

Peter en Paul namen deel aan een fietswedstrijd in hun thuisstad. Peter voelde zich superfit en wist de vierde plek te bemachtigen. Paul daarentegen had een slechte nacht gehad en eindigde als voorlaatste. Tussen Peter en Paul bereikten zes andere deelnemers de finish. Hoeveel fietsers bereikten in totaal de finishlijn in deze race?

Antwoord: 12

Oplossing: Er waren 3 fietsers die vóór Peter finishten, 6 fietsers die tussen Peter en Paul finishten, en 1 fietser die achter Paul eindigde. Samen geeft dit $6 + 3 + 1 = 10$ fietsers, zonder Peter en Paul zelf mee te tellen. Aangezien we het totale aantal fietsers willen berekenen, moeten we Peter en Paul nog toevoegen, wat in totaal $10 + 2 = 12$ fietsers geeft.

Opgave 3 ... Marathon

Een marathonloper loopt ongeveer 42 kilometer. Tijdens de loop verbruikt de loper 3 kJ energie per kilometer. Om de verbruikte energie aan te vullen, eet de loper regelmatig energierepen. Elke energiereep levert de loper 1000 J energie op. Hoeveel energierepen moet de loper eten om de marathon te beëindigen zonder per saldo energie te verbruiken?

Antwoord: 126

Oplossing: Per kilometer verbruikt de loper 3000 J. Op het 42 km lange parcours verbruikt hij dus

$$3000\text{ J/km} \cdot 42\text{ km} = 126\,000\text{ J}.$$

Elke gegeten energiereep levert de loper 1000 J energie op. Om het volledige energieverbruik te compenseren, moet hij dus $\frac{126\,000\text{ J}}{1000\text{ J}} = 126$ energierepen eten.

Opgave 4 ... Wie wil er chocolade?

David heeft een chocoladereep gekregen die uit 35 stukjes bestaat. David houdt echter niet van chocolade, dus hij besluit de reep te verdelen onder zijn vrienden. Hij wil dat elk van zijn vrienden minstens 2 stukjes chocolade krijgt, en dat alle vrienden evenveel stukjes ontvangen. Bovendien mag er geen enkel stukje overblijven. Wat is het maximale aantal vrienden waarover David de chocolade kan verdelen, zodat aan al zijn voorwaarden wordt voldaan?

Antwoord: 7

Oplossing: Het getal 35 kan op vier manieren worden geschreven als een product van twee positieve gehele getallen (waarbij verschillende volgordes als verschillend worden beschouwd):

$$1 \cdot 35, \quad 5 \cdot 7, \quad 7 \cdot 5, \quad 35 \cdot 1.$$

De eerste factor geeft het aantal stukjes aan dat elke vriend krijgt, de tweede factor het aantal vrienden. Elke vriend moet minstens 2 stukjes krijgen, dus we moeten de mogelijkheid $1 \cdot 35$ uitsluiten. Er blijven dan drie

mogelijkheden over; de optie die correspondeert met het maximale aantal vrienden is $5 \cdot 7$, dus het antwoord is 7.

Opgave 5 ... Op bezoek

Tessa rijdt met de auto in een stad waar een maximumsnelheid van 50 km/h geldt. Ze wil op bezoek gaan bij haar moeder, die aan de andere kant van de stad woont. Ze moet daarvoor een afstand van 10 km afleggen. Wat is de minimale tijd in minuten die Tessa nodig heeft om naar haar moeder te rijden, als ze wil dat haar gemiddelde snelheid 40 km/h is en ze de maximumsnelheid niet wil overschrijden?

Antwoord: 15

Oplossing: De informatie over de maximumsnelheid is hier niet relevant. We hebben enkel nodig dat Tessa een afstand van $s = 10$ km moet afleggen en dat haar gemiddelde snelheid $v = 40$ km/h moet zijn. We weten dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan de totale afstand gedeeld door de totale tijd. Als we de gemiddelde snelheid aanduiden met v en de afstand met s , dan kunnen we de tijd t uitdrukken als:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = \frac{1}{4} \text{ h.}$$

Als we dit omrekenen naar minuten, zien we dat het antwoord 15 minuten is.

Opgave 6 ... Tweemaal meten, eenmaal zagen

Sjonnie werkt in een houtsnijderij. Hij had vandaag een eenvoudige taak: hij kreeg enkele houten blokken met afmetingen $17 \text{ cm} \times 42 \text{ cm} \times 47 \text{ cm}$ en moest al hun vlakken oranje verven. Maar omdat Sjonnie een beetje onhandig is, verfde hij per ongeluk één van de blokken helemaal rood in plaats van oranje. Om ervoor te zorgen dat dit rode blok niet per ongeluk zou worden gebruikt, zaagde hij het in kleine kubusjes met een zijde van 1 cm. Hoeveel van deze kubusjes hadden precies 3 rode vlakken?

Antwoord: 8

Oplossing: De enige kubusjes die 3 rode vlakken hebben, zijn diegene die uit een van de hoekpunten van het oorspronkelijke blok zijn gezaagd. De andere kubusjes hebben slechts 2 geverfde vlakken (als ze van een rand kwamen), 1 geverfd vlak (als ze van een zijvlak kwamen) of 0 geverfde vlakken (als ze vanuit het midden kwamen). We hoeven dus alleen de hoekpunten van het blok te tellen, en dat zijn er 8. Er waren dus 8 kubusjes met drie rode vlakken.

Opgave 7 ... Koud avondeten

Patrick warmt zijn eten op in een magnetron met een constant vermogen. Na enige tijd is de temperatuur van het eten gestegen tot 26°C . Dat is Patrick nog te koud, dus hij zet het eten terug in de magnetron, maar nu voor maar 70 % van de tijd van de eerste opwarming. Na deze extra opwarmtijd is de temperatuur van het eten gestegen tot 40°C , wat precies goed is. Wat is de oorspronkelijke temperatuur van Patricks eten in graden Celsius?

Opmerking: Ga ervan uit dat er geen water uit Patricks eten verdampt.

Antwoord: 6

Oplossing: Het vermogen van de magnetron is constant. Dit betekent dat de energie die het eten van de magnetron ontvangt, evenredig is met de opwarmtijd. Bovendien veranderen de massa en de soortelijke warmtecapaciteit van het eten niet tijdens het opwarmen. Daarom is de temperatuurstijging evenredig met de opwarmtijd.

Tijdens de tweede opwarming steeg de temperatuur met $40^\circ\text{C} - 26^\circ\text{C} = 14^\circ\text{C}$. Tijdens deze opwarming werd het eten slechts 70 % van de eerste opwarmtijd verwarmd. Dus tijdens de eerste opwarming moest het eten zijn temperatuur verhogen met

$$\frac{100\%}{70\%} \cdot 14^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}.$$

Hieruit volgt dat de oorspronkelijke temperatuur van Patricks eten $26^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C} = 6^{\circ}\text{C}$ was.

Opgave 8 ... Roddels

Nábojlandia heeft 2025 burgers en 1 koning. Er is recent een nieuwe wet ingevoerd en iedereen moet erover geïnformeerd worden. De informatie wordt elke dag om twaalf uur 's middags doorgegeven. Op de eerste dag vertelt de koning het nieuws aan één burger. Op elke volgende dag geeft elke burger (dus niet de koning zelf) die het nieuws al weet het door aan precies één nieuwe persoon die het nog niet weet (zolang er nog zulke personen zijn). Na hoeveel dagen kennen alle burgers de nieuwe wet? (Bijvoorbeeld: als op de avond van de vijfde dag iedereen het weet, is het antwoord 5).

Antwoord: 12

Oplossing: Aan het einde van de eerste dag is er slechts 1 burger die de nieuwe wet kent. Op elke daaropvolgende dag verdubbelt het aantal burgers dat de nieuwe wet kent. We hebben dus:

2. om twaalf uur op de 2^e dag zijn er $2 \cdot 1 = 2$ burgers die de nieuwe wet kennen;
3. om twaalf uur op de 3^e dag zijn er $2 \cdot 2 = 4$ burgers die de nieuwe wet kennen;
4. om twaalf uur op de 4^e dag zijn er $2 \cdot 4 = 8$ burgers die de nieuwe wet kennen;
5. om twaalf uur op de 5^e dag zijn er $2 \cdot 8 = 16$ burgers die de nieuwe wet kennen;
6. om twaalf uur op de 6^e dag zijn er $2 \cdot 16 = 32$ burgers die de nieuwe wet kennen;
7. om twaalf uur op de 7^e dag zijn er $2 \cdot 32 = 64$ burgers die de nieuwe wet kennen;
8. om twaalf uur op de 8^e dag zijn er $2 \cdot 64 = 128$ burgers die de nieuwe wet kennen;
9. om twaalf uur op de 9^e dag zijn er $2 \cdot 128 = 256$ burgers die de nieuwe wet kennen;
10. om twaalf uur op de 10^e dag zijn er $2 \cdot 256 = 512$ burgers die de nieuwe wet kennen;
11. om twaalf uur op de 11^e dag zijn er $2 \cdot 512 = 1024$ burgers die de nieuwe wet kennen;
12. om twaalf uur op de 12^e dag zijn er $2 \cdot 1024 = 2048$ burgers die de nieuwe wet kennen.

Aangezien $2048 \geq 2025$, zal de verspreiding van de nieuwe wet aan het einde van de 12^e dag voltooid zijn.

Opgave 9 ... Efficiënte oplossingen

Paul heeft een zonnepaneel gebouwd en wil het gebruiken om zijn speelgoedtrein van stroom te voorzien. Eerst zet hij met het zonnepaneel zonne-energie om in elektrische energie met een rendement van 0,2. Vervolgens slaat hij $\frac{5}{6}$ van deze elektrische energie op als chemische energie in een batterij. Ten slotte plaatst hij de batterij in de trein, die 30 % van de chemische energie uit de batterij omzet in zijn eigen kinetische energie. Met welk rendement zet Pauls systeem zonne-energie om in kinetische energie? Antwoord in procent rendement.

Antwoord: 5

Oplossing: Om het totale rendement van deze energieomzetting te berekenen, hoeven we enkel de afzonderlijke rendementen van de opeenvolgende omzettingen met elkaar te vermenigvuldigen. Laten we de rendementen die niet als breuk gegeven zijn eerst omzetten naar breuken:

$$0,2 = \frac{1}{5}, \quad 30\% = \frac{3}{10}.$$

Nu vermenigvuldigen we alle rendementen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}.$$

Omdat ons antwoord in procenten moet worden gegeven, willen we dat de noemer van de breuk 100 is. We vermenigvuldigen de oorspronkelijke breuk dus met $\frac{5}{5}$ en krijgen: $\frac{1}{20} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{100}$. Het rendement is dus 5 %.

Opgave 10 ... Schaakkoning deel 1

Kate is op zoek naar interessante wiskundige problemen op een oneindig schaakbord. Terwijl ze de schaakstukken klaarzet voor een nieuw potje komt er een vraag in haar op. Ze weet dat de koning kan bewegen naar elk van de acht vakjes die een zijde of een hoek delen met het vakje waarop hij staat. De vraag van Kate is: als ze de koning op één vakje van dit oneindige schaakbord neer zet, hoeveel verschillende wandelingen kan hij dan maken als hij precies drie zetten doet?

Antwoord: 512

Oplossing: Elke keer dat de koning beweegt, heeft hij 8 mogelijke vakjes om naartoe te gaan. Voor een pad dat precies uit drie zetten bestaat, zijn de keuzes onafhankelijk, dus het totale aantal mogelijke wandelingen is $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Opgave 11 ... Parkloop

Patrick en Kate gaan hardlopen in het park. Daar is een rechte baan van 1 km lang. Ze gaan aan tegenovergestelde uiteinden van deze baan staan. Op hetzelfde moment beginnen ze te rennen naar het andere uiteinde van de baan, tegen elkaar in. Ze ontmoeten elkaar na 2 minuten, als Kate 600 m heeft afgelegd. Hoeveel seconden eerder bereikt Kate het tegenoverliggende uiteinde van de baan dan Patrick?

Antwoord: 100

Oplossing: Kate loopt $s_K = 600$ m in $t = 2$ minuten, dus haar gemiddelde snelheid is $v_K = \frac{s_K}{t} = \frac{600 \text{ m}}{2 \text{ min}} = 5 \text{ m/s}$. Om de volledige baan van $s = 1000$ m af te leggen, heeft ze dus $t_K = \frac{s}{v_K} = \frac{1000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 200$ s nodig.

Net zo loopt Patrick $s_P = 400$ m in $t = 2$ minuten. Zijn gemiddelde snelheid is dus $v_P = \frac{s_P}{t} = \frac{400 \text{ m}}{2 \text{ min}} = \frac{10}{3} \text{ m/s}$ en om de volledige baan van $s = 1000$ m af te leggen heeft hij $t_P = \frac{s}{v_P} = \frac{1000 \text{ m}}{\frac{10}{3} \text{ m/s}} = 300$ s nodig.

We zien dat Kate het tegenoverliggende uiteinde van de baan $t_P - t_K = 300 \text{ s} - 200 \text{ s} = 100$ s eerder bereikt dan Patrick.

Opgave 12 ... Verjaardagscadeau

Alans kleine zusje is bijna jarig. Alan heeft een bijzonder cadeau in gedachten. Omdat haar lievelingsgetal 30 is, wil hij haar een ruimtelijk lichaam geven met een oppervlakte van 30 cm^2 . Alan zal dit lichaam maken door houten kubusjes met een zijde van 1 cm aan elkaar te lijmen (waarbij hij de vlakken van de kubusjes precies op elkaar lijmt). Wat is het kleinste aantal kubusjes dat Alan nodig heeft om het cadeau te maken zoals hij wil?

Antwoord: 7

Oplossing: We willen de oppervlakte van het lichaam zo groot mogelijk maken, terwijl we zo weinig mogelijk kubusjes gebruiken. Daarom willen we dat elk kubusje met zo weinig mogelijk vlakken aan de rest van het lichaam vastgelijmd zit. Het beste is als we de kubusjes in één lange rij aan elkaar lijmen (zodat we een balk krijgen). De twee kubusjes aan de uiteinden van deze rij hebben 5 zichtbare vlakken, en alle kubusjes daartussen hebben 4 zichtbare vlakken. Aangezien elk vlak een oppervlakte heeft van 1 cm^2 en we willen dat het totale oppervlak 30 cm^2 bedraagt, krijgen we de vergelijking

$$5 \text{ cm}^2 + x \cdot 4 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2,$$

waarbij x het aantal kubusjes is tussen de twee uiteinden. We herleiden dit tot

$$x \cdot 4 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2.$$

Daaruit volgt dat $x = 5$. Omdat we naast deze 5 kubusjes ook nog 2 kubusjes aan de uiteinden hebben, hebben we in totaal (minstens) $2 + 5 = 7$ kubusjes nodig.

Opgave 13 ... Mieren verzamelen

Mathilde verzamelt mieren. Op een dag besluit ze al haar mieren te rangschikken op een vierkant rooster, dus met evenveel rijen als kolommen. We weten dat een gewone mier precies in één hokje past, terwijl een koningin een 3×3 blok van hokjes nodig heeft. Mathilde merkt op dat ze in totaal 1929 mieren heeft. Het lukt haar alle mieren op het rooster te plaatsen zodat geen enkel hokje leeg blijft en geen enkel hokje door meer dan één mier wordt bezet. Wat is het kleinste mogelijke aantal rijen van Mathilde's vierkante rooster?

Antwoord: 45

Oplossing: We zoeken het kleinste kwadraat (een getal dat kan worden geschreven als het product van een geheel getal met zichzelf) dat kan worden uitgedrukt als de som van 1929 enen en negens. Het antwoord zal de wortel van dat getal zijn.

Stel dat alle mieren slechts één hokje zouden innemen. In totaal zouden ze dan 1929 hokjes bezetten. Nu kunnen we een aantal gewone mieren vervangen door koninginnen. Op die manier vergroten we het aantal bezette hokjes telkens met $9 - 1 = 8$. We kunnen dus een aantal bezette hokjes krijgen van de vorm $1929 + 8k$ voor een niet-negatief geheel getal k . We zoeken het kleinste getal van deze vorm dat een kwadraat is.

Het eerstvolgende kwadraat groter dan 1929 is $44 \cdot 44 = 1936$. Dat is even, dus duidelijk niet van de vorm $1929 + 8k$, wat oneven is. Het volgende kwadraat is $45 \cdot 45 = 2025$ en deze is wél van de vereiste vorm ($1929 + 8k = 2025$ voor $k = 12$). We kunnen de mieren dus volgens de regels op het rooster plaatsen. Het volstaat om $(2025 - 1929) : 8 = 12$ blokken van 3×3 hokjes te kiezen. Mathilde zou ze bijvoorbeeld in de eerste drie rijen van het rooster kunnen kiezen.

Daarom is het kleinste mogelijke aantal rijen in Mathilde's vierkante rooster $\sqrt{2025} = 45$.

Opgave 14 ... Zinloos werk

Een groep vrienden wil een aanvankelijk leeg zwembad vullen. Het zwembad heeft afmetingen van $15 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Alice brengt elke 30 seconden een volle beker met water van 250 ml. Bob brengt elke minuut een volle pot met water van 0,5 l. Cornelia brengt elke 5 minuten een volle emmer met water van 10 dm^3 . De vrienden proberen het een tijdje, maar al snel hebben ze door dat deze manier van vullen zinloos is, dus ze stoppen ermee. Toch zijn ze nog nieuwsgierig: hoeveel uur zou het hen hebben gekost om het zwembad op deze manier te vullen?

Antwoord: 1000

Oplossing: Het volume van het zwembad is $V = 15 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 180 \text{ m}^3$. Laten we berekenen hoeveel water elke vriend per uur kan brengen.

- Alice vult haar beker $\frac{3600 \text{ s}}{30 \text{ s}} = 120$ keer per uur. Zo voegt ze $120 \cdot 250 \text{ ml} = 30\,000 \text{ ml} = 30 \text{ l}$ water toe aan het zwembad.
- Bob vult zijn pot $\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ min}} = 60$ keer per uur. Zo voegt hij $60 \cdot 0,5 \text{ l} = 30 \text{ l}$ water toe aan het zwembad.
- Cornelia vult haar emmer $\frac{60 \text{ min}}{5 \text{ min}} = 12$ keer per uur. Zo voegt ze $12 \cdot 10 \text{ dm}^3 = 120 \text{ l}$ water toe aan het zwembad.

In totaal verhogen de vrienden het watervolume in het zwembad met $30 \text{ l} + 30 \text{ l} + 120 \text{ l} = 180 \text{ l} = 0,18 \text{ m}^3$ per uur. Hun vulsnelheid is dus $v = 0,18 \text{ m}^3/\text{h}$. Uiteindelijk zou het vullen van het volledige zwembad $t = \frac{V}{v} = \frac{180 \text{ m}^3}{0,18 \text{ m}^3/\text{h}} = 1000 \text{ h}$ duren.

Opgave 15 ... Bloemen zijn oneven

Lucy houdt van wandelen in het park en van bloemen plukken. Het park dat ze vandaag bezoekt bestaat uit 15 vierkante velden, zoals in de onderstaande figuur. Het getal in elk vierkant geeft exact aan hoeveel bloemen Lucy plukt als ze door dat veld loopt (ze mag er niet meer of minder plukken). Lucy start bij de ingang (aangegeven met een pijl) op het veld met 1 bloem. Daarna loopt ze door het park, waarbij ze steeds naar een veld gaat dat een zijde deelt met het huidige veld. Ze hoeft niet door alle velden te gaan, maar ze stapt nooit twee keer op dezelfde weide. Tot slot eindigt ze haar wandeling bij de uitgang (aangegeven met de andere pijl) op het veld met 2 bloemen. Lucy weet dat dit park magisch is: als op enig moment het aantal bloemen dat ze in haar mand heeft even is, verdwijnen ze allemaal (en moet ze opnieuw beginnen met verzamelen vanaf het veld waar ze dan is). Wat is het maximale aantal bloemen dat Lucy bij de uitgang van het park kan hebben?

→	1	2	1	8	7	
	3	7	2	6	4	
	4	2	4	3	2	→

Antwoord: 27

Oplossing: Bij de uitgang wil Lucy een oneven aantal bloemen hebben (zodat ze ze niet verliest). Omdat oneven + even altijd oneven is, kan Lucy, als ze eenmaal een oneven aantal bloemen heeft, vervolgens naar een willekeurig aantal velden met een even getal gaan zonder bloemen te verliezen. We zoeken dus naar een reeks van velden met een even getal, die begint bij een veld met een oneven getal en eindigt bij de uitgang. Aangezien we niet weten op welk oneven veld die reeks zal beginnen, lopen we voorlopig simpelweg vanaf de uitgang via velden met een even getal terug en markeren we op elk van die velden (met grijze getallen) hoeveel bloemen Lucy onderweg van daar naar de uitgang zal plukken.

→	1	2	1	²⁰ 8	7	
	3	7	¹⁴ 2	¹² 6	⁶ 4	
	²⁴ 4	²⁰ 2	¹⁸ 4	3	² 2	→

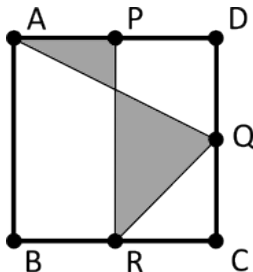
Nu zoeken we een oneven veld dat (i) grenst aan een van de gemarkeerde velden en (ii) waarvoor de som van het grijze getal op de gemarkeerde weide en het getal op het oneven veld maximaal is. Als we ze allemaal controleren (de velden met de getallen 1, 3 en 7), vinden we dat de maximale som 27 is. Dan hoeven we alleen nog te controleren of we echt bij de ingang kunnen starten en vervolgens dat gewenste oneven veld kunnen bereiken op zo'n manier dat we vóór het betreden ervan een even aantal bloemen hebben (zodat we de bloemen van het oneven veld niet verliezen). Een mogelijke route staat in de figuur.

→	1	2	1	²⁰ 8	7	
	3	7	¹⁴ 2	¹² 6	⁶ 4	
	²⁴ 4	²⁰ 2	¹⁸ 4	3	² 2	→

Daarom is het maximale aantal bloemen dat Lucy bij de uitgang kan hebben gelijk aan 27.

Opgave 16 ... Het logo inkleuren

Martine ontwerpt een logo voor haar bedrijf. Ze begint met het tekenen van een vierkant $ABCD$ met zijde 12 dm. Vervolgens kiest ze drie speciale punten P , Q , R , zodanig dat P het midden van DA is, Q het midden van CD en R het midden van BC . Als laatste tekent ze de lijnstukken AQ , PR en RQ . Ze wil voor het logo alleen de in het grijs gemarkeerde delen uit de onderstaande figuur gebruiken.



Martine wil haar nieuwe logo inkleuren. Ze weet dat ze één tube verf nodig heeft per 5 vierkante decimeter van haar logo. Hoeveel verftubes moet Martine kopen om genoeg verf te hebben voor haar nieuwe logo?

Antwoord: 8

Oplossing: Eerst moeten we de oppervlakte van het grijze deel berekenen. Dit bestaat uit twee driehoeken. De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan de helft van het product van de lengte van een basis (een zijde) en de bijbehorende hoogte. In ons geval is het logisch om als basissen de zijden te nemen die op het lijnstuk PR liggen. De reden is dat de hoogte op die basis gelijk is aan de helft van de zijde van het vierkant, dus $12 \text{ dm} : 2 = 6 \text{ dm}$.

De som van de oppervlaktes van twee driehoeken met dezelfde hoogte is gelijk aan de som van hun basissen, vermenigvuldigd met de gemeenschappelijke hoogte en gedeeld door 2. De som van de basissen van onze driehoeken is eenvoudig te bepalen: dat is de lengte van PR , die gelijk is aan de zijde van het vierkant (12 dm). De gemeenschappelijke hoogte is 6 dm, dus de som van de oppervlaktes van de grijze driehoeken is $\frac{12 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm}}{2} = 36 \text{ dm}^2$.

Martine heeft één tube nodig per 5 dm^2 , dus ze heeft minstens $\frac{36 \text{ dm}^2}{5 \text{ dm}^2} = 7,2$ tubes nodig. Aangezien Martine alleen een geheel aantal tubes kan kopen, ronden we dit naar boven af tot 8. Daarom moet Martine 8 verftubes kopen.

Opgave 17 ... Vervangende les

David's les LO op school is vandaag uitgevallen, dus hij belt zijn moeder om hem op te halen en naar huis te brengen. Hun huis ligt op 2,5 km van de school, en zijn moeder zegt dat ze al in de auto zit en net gaat vertrekken, en dat ze een constante snelheid van 50 km/h heeft. David wil de uitgevallen LO-les compenseren, dus hij besluit meteen na het telefoongesprek richting huis te rennen met een constante snelheid van 10 km/h. Wanneer hij zijn moeder tegenkomt, springt hij in de auto en laat hij zich de rest van de afstand brengen. Hoeveel seconden eerder is hij thuis vergeleken met het scenario waarin hij op school op zijn moeder wacht?

Opmerking: Negeer de tijd die David nodig heeft om in te stappen en de tijd die nodig is om te versnellen of te stoppen.

Antwoord: 60

Oplossing: Laten we de afstand van school naar huis aangeven met d , de snelheid van de moeder met v_m en David's snelheid met v_D . Bepaal eerst de tijd t_1 die nodig is als David niet naar zijn moeder toe rent. In dat geval rijdt de moeder eenvoudig de afstand d van huis naar school en daarna nog eens d van school naar huis, dus in totaal $2d$. Dat kost haar $t_1 = \frac{2d}{v_m}$. Als we t_1 uitrekenen, krijgen we:

$$t_1 = \frac{2 \cdot 2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0,1 \text{ h} = 6 \text{ min.}$$

Bepaal nu de tijd t_2 in het geval dat David richting huis rent. We kunnen deze tijd schrijven als $t_2 = t_{2A} + t_{2B}$, waarbij t_{2A} de tijd is tot het moment waarop David en zijn moeder elkaar ontmoeten, en t_{2B} de tijd van de ontmoeting tot thuis. De relatieve snelheid tussen de moeder en David is $v_m + v_D$. Als we willen weten wanneer ze elkaar ontmoeten, kunnen we ons voorstellen dat de afstand d wordt afgelegd met snelheid $v_m + v_D$. Hieruit volgt voor t_{2A} :

$$t_{2A} = \frac{d}{v_m + v_D} = \frac{2,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h} + 10 \text{ km/h}} = \frac{1}{24} \text{ h}.$$

De tijd t_{2A} is de tijd die de moeder nodig heeft om het ontmoetingspunt te bereiken. Omdat de moeder in beide richtingen met dezelfde snelheid rijdt, is de tijd t_{2B} die ze nodig heeft om van het ontmoetingspunt naar huis te rijden gelijk aan t_{2A} . Dus:

$$t_2 = t_{2A} + t_{2B} = 2 \cdot t_{2A} = \frac{2}{24} \text{ h} = \frac{1}{12} \text{ h} = 5 \text{ min}$$

Het verschil met het eerste scenario is $t_1 - t_2 = 6 \text{ min} - 5 \text{ min} = 1 \text{ min}$, oftewel 60 s.

Opgave 18 ... Goedkope verwarming

Michael heeft een lichaamstemperatuur 37°C en hij staat in een perfect gesloten en geïsoleerde kamer, met lucht van totale massa 6 kg en begintemperatuur 20°C . Na 2 minuten in de kamer te hebben gestaan, merkt hij dat de temperatuur van de lucht nu 22°C is. Zijn lichaam heeft echter nog steeds dezelfde temperatuur, 37°C . Wat is het gemiddelde vermogen in watt dat Michaels lichaam tijdens deze 2 minuten aan warmte heeft afgegeven?

Opmerking: De soortelijke warmtecapaciteit van lucht hangt ervan af of de druk of het volume constant is. Bij constante druk is dit $c_p = 1005 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Bij constant volume is dit $c_V = 718 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$.

Antwoord: 71,8

Oplossing: De kamer met Michael is perfect gesloten, dus het luchtvolume is constant. We moeten dus de soortelijke warmtecapaciteit bij constant volume c_V gebruiken. De lucht met massa $m = 6 \text{ kg}$ in de kamer stijgt in temperatuur van $t_0 = 20^\circ\text{C}$ naar $t_1 = 22^\circ\text{C}$. Daarvoor moet de lucht warmte hebben opgenomen ter waarde van $Q = c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)$. Alleen Michael kan daarvoor hebben gezorgd, dus hij heeft arbeid $W = Q$ aan de lucht geleverd. Aangezien zijn temperatuur niet is veranderd, is alle door Michael geleverde arbeid precies W . Hij leverde die gedurende het tijdsinterval $\tau = 120 \text{ s}$. Het gemiddelde vermogen van Michael was dus

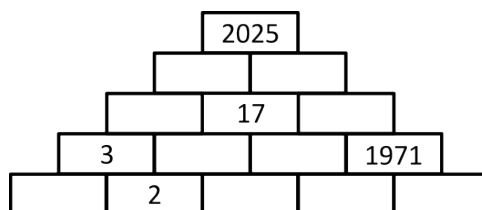
$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{c_V \cdot m \cdot (t_1 - t_0)}{\tau} = \frac{718 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C}) \cdot 6 \text{ kg} \cdot (22^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{120 \text{ s}} = 71,8 \text{ W}.$$

Opgave 19 ... Cleopatra's piramide

Cleopatra gaf de Egyptenaren opdracht om voor haar een geschikte verblijfplaats voor na haar dood te bouwen. Natuurlijk wil ze die in de vorm van een piramide. Ze tekende een plan voor de bouwers, te zien in de figuur. Cleopatra houdt ook van wiskunde, dus wil ze dat op elke steen een positief geheel getal staat. Ze heeft ook extra eisen:

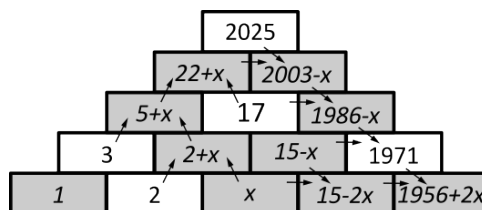
- er mogen geen twee stenen met hetzelfde getal zijn;
- het getal op elke steen (behalve op de stenen in de onderste rij) is de som van de twee stenen waarop hij ligt.

De bouwers slagen erin aan Cleopatra's eisen te voldoen. Wat is de som van de getallen in de onderste rij van Cleopatra's piramide?



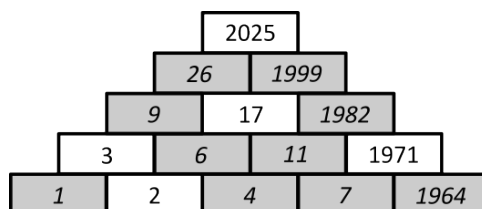
Antwoord: 1978

Oplossing: Het is duidelijk dat het enige positieve getal dat in de meest linkse steen van de onderste rij kan staan $3 - 2 = 1$ is. Laten we nu het getal in het midden van de onderste rij aanduiden met x . De somregel van de piramide dwingt dan de waarden van alle overige stenen af zoals in de volgende figuur:



We moeten nu geschikte waarden van x vinden waarvoor alle vermeldingen in de piramide verschillende positieve gehele getallen zijn. De getallen 1, 2 en 3 zijn al gebruikt, dus $x \geq 4$. We zullen laten zien dat alleen $x = 4$ werkt. Stel, met als doel een tegenspraak af te leiden, dat $x \geq 5$. In dat geval geldt $15 - 2x \leq 5$. Als $x = 5$ is, dan is $15 - 2x$ ook gelijk aan 5, een tegenspraak. Als $x > 5$ is, dan is $15 - 2x$ maximaal 3, en om positief te zijn moet het dan 1, 2 of 3 zijn, die al gebruikt zijn, wederom een tegenspraak.

We hebben dus aangetoond dat $x = 4$. Nu is het eenvoudig om de hele piramide uit te rekenen en te controleren dat alle elementen verschillend zijn:



Ten slotte berekenen we de som van de onderste rij: $1 + 2 + 4 + 7 + 1964 = 1978$.

Opgave 20 ... Onder druk

Anne en Marie houden van maatscilinders. Anne heeft een maatscilinder waarvan de bodem een straal heeft van 5 cm, terwijl Marie een maatscilinder waar de straal van de bodem onbekend is. Anne wil Marie helpen de straal te bepalen. Ze heeft geen liniaal, maar ze beschikt over een apparaat dat de hydrostatische druk op de bodem van de cilinders kan meten. Wanneer Anne een zeker volume van een onbekende vloeistof in haar cilinder giet, meet ze een hydrostatische druk op de bodem van 50 000 Pa. Vervolgens giet ze hetzelfde volume van dezelfde vloeistof in Marie's cilinder en ze meet nu een hydrostatische druk van 12 500 Pa. Wat is de straal van de bodem van Marie's cilinder in centimeter?

Opmerking: Beide cilinders waren hoog genoeg zodat het gekozen volume vloeistof niet overstroomde.

Antwoord: 10

Oplossing: De formule voor hydrostatische druk is $p = \rho_{\text{vloeistof}}gh$. Zowel $\rho_{\text{vloeistof}}$ als g bleven hetzelfde tussen de twee metingen, dus kunnen we hun product als een constante aanduiden: $k = \rho_{\text{vloeistof}}g$. Als we de cilinder van Anne aanduiden met index A en die van Marie met index M , kunnen we de volgende vergelijkingen opschrijven:

$$p_A = k \cdot h_A, \quad p_M = k \cdot h_M.$$

waarbij h_A en h_M de hoogtes van de vloeistof in de cilinders zijn. Aangezien de constante k in beide vergelijkingen gelijk is, kunnen we deze herschrijven tot één vergelijking:

$$\frac{p_A}{h_A} = \frac{p_M}{h_M}.$$

We kunnen nu de hoogtes h_A en h_M uitdrukken met behulp van het volume van de vloeistof V en de stralen r_A en r_M van de cilinders:

$$h_A = \frac{V}{\pi r_A^2}, \quad h_M = \frac{V}{\pi r_M^2}.$$

Als we dit in de vergelijking substitueren, krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{p_A \cdot \pi r_A^2}{V} &= \frac{p_M \cdot \pi r_M^2}{V}, \\ p_A \cdot r_A^2 &= p_M \cdot r_M^2. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we nu r_M uitdrukken en het resultaat vinden:

$$r_M = \sqrt{\frac{p_A \cdot r_A^2}{p_M}} = r_A \sqrt{\frac{p_A}{p_M}} = 0,05 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{50\,000 \text{ Pa}}{12\,500 \text{ Pa}}} = 0,1 \text{ m}.$$

Dus de bodem van Marie's cilinder heeft een straal van 10 cm.

Opgave 21 ... Sprookje der oneven bladzijden

Olivia heeft van haar grootmoeder een prachtig gedrukt boek met 50 sprookjes gekregen. Elk sprookje heeft een verschillend aantal bladzijden, variërend van 1 tot 50. Olivia merkt op dat elk sprookje op een nieuwe bladzijde begint, en dat het eerste sprookje op bladzijde 1 begint. Wat is het grootste mogelijke aantal sprookjes dat op een oneven bladzijde kan beginnen?

Antwoord: 38

Oplossing: Het boek bestaat uit 25 sprookjes met een even aantal bladzijden en 25 sprookjes met een oneven aantal bladzijden. Elk sprookje met een even aantal bladzijden verandert de pariteit van de eerste bladzijde van het volgende sprookje niet; dat wil zeggen, als het op een even bladzijde begint, begint het volgende sprookje ook op een even bladzijde. Om het aantal sprookjes dat op een oneven bladzijde begint te maximaliseren, willen we dat elk sprookje met een even aantal bladzijden op een oneven bladzijde begint. Dan zullen alle 25 sprookjes met even lengte op oneven bladzijden beginnen.

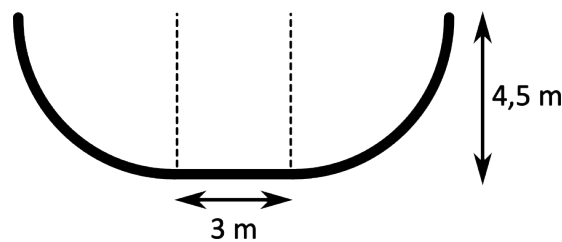
De situatie is anders voor sprookjes met een oneven aantal bladzijden. Elk daarvan verandert de pariteit van de beginbladzijde van het volgende sprookje. Om het aantal sprookjes dat op een oneven bladzijde begint te maximaliseren, kunnen we het eerste sprookje van oneven lengte op een oneven bladzijde laten beginnen. Daarna zal de eerste bladzijde van elk volgend oneven sprookje afwisselen tussen oneven en even. Daarom zullen van de 25 sprookjes van oneven lengte er 13 op een oneven bladzijde beginnen en 12 op een even bladzijde.

In totaal zijn er dus $25 + 13 = 38$ sprookjes die op een oneven bladzijde beginnen.

Opgave 22 ... Halfpipe

Snowboarders rijden met hun snowboard op een halfpipe. Deze bestaat uit twee kwartcirkelvormige delen met straal 4,5 m die 3 m uit elkaar liggen. Veronderstel dat een snowboard een plank is waarvan de wrijvingscoëfficiënt met de cirkelvormige delen van de halfpipe 0 is en met het horizontale deel van de halfpipe 0,05. Een snowboarder met massa 80 kg laat zich vanaf het hoogste punt van de halfpipe naar beneden glijden, zonder beginsnelheid. Hoe vaak passeert hij het horizontale deel van de halfpipe (in welke richting dan ook) totdat hij tot stilstand komt?

Opmerking: Veronderstel dat er geen andere krachten op de snowboarder werken dan de zwaartekracht en de wrijvingskracht.



Antwoord: 30

Oplossing: Aan het begin is de totale energie van de snowboarder gelijk aan zijn potentiële energie. Deze is $E_p = mgr$, waarbij $m = 80$ kg zijn massa is en $r = 4,5$ m de straal van de kwartcirkelvormige delen (en tevens de hoogte boven de grond waarvan hij vertrekt).

De snowboarder verliest geen energie op de kwartcirkelvormige delen. Hij verliest alleen energie op het horizontale deel door wrijving. De wrijvingscoëfficiënt is $f = 0,05$, dus de grootte van de wrijvingskracht is $F_f = mgf$. Deze kracht werkt over het gehele horizontale deel met lengte $s = 3$ m. De kracht verricht arbeid $W = Fs = mgfs$ op het snowboard. Oftewel, de snowboarder moet deze hoeveelheid arbeid leveren om de wrijving te overwinnen. Daarom neemt zijn energie bij elke passage van het horizontale deel met W af.

Na n passages is de energie van de snowboarder met nW afgenomen. We zoeken de kleinste n waarvoor het verschil $E_p - nW$ kleiner dan 0 wordt, want dat is de passage waarbij de snowboarder stopt. Dit geeft de volgend ongelijkheid:

$$\begin{aligned} E_p - nW &\leq 0, \\ E_p &\leq nW, \\ n &\geq \frac{E_p}{W} = \frac{mgr}{mgfs} = \frac{r}{fs} = \frac{4,5 \text{ m}}{0,05 \cdot 3 \text{ m}} = 30. \end{aligned}$$

De snowboarder komt dus tot stilstand aan het einde van de 30^e passage van het horizontale deel.

Opgave 23 ... Steen, papier, schaar

Marjan en Marko spelen steen, papier, schaar. Het spel verloopt als volgt. Op een bepaald moment laten zowel Marjan als Marko één van de gebaren zien: steen, papier of schaar. Als ze hetzelfde gebaar laten zien, eindigt het spel in een gelijkspel. Anders geldt: steen wint van schaar, schaar wint van papier en papier wint van steen. Marjan en Marko hielden tijdens het spel statistieken bij. Ze merkten dat steen 27 keer werd gebruikt, papier 25 keer en schaar 24 keer. Er bleek 19 keer een gelijkspel te zijn geweest. Bovendien won steen 10 keer en verloor 7 keer. Hoe vaak won schaar van papier?

Antwoord: 2

Oplossing: Het totale aantal getoonde gebaren is $27 + 25 + 24 = 76$. In elk spel worden twee gebaren getoond, dus waren er $76 : 2 = 38$ spellen. In 19 daarvan was er een gelijkspel; in de overige $38 - 19 = 19$ spellen won één van de gebaren. Van deze spellen won steen 10 keer en verloor 7 keer. De resterende $19 - 10 - 7 = 2$ spellen zijn precies die waarin schaar en papier werden gekozen en schaar won. Dus schaar won 2 keer.

Opmerking: Dit scenario is ook daadwerkelijk te realiseren. Naast de reeds bekende overwinningen moet het gelijkspel steen-steen 5 keer voorkomen, papier-papier 8 keer en schaar-schaar 7 keer.

Opgave 24 ... De sterkste wint

Vier piraten vonden een schatkist. Ze begonnen onmiddellijk te ruziën over wie hem mocht hebben. Na een hevige maar vruchteloze discussie onstond de situatie dat elke piraat de kist naar zich toe wilde trekken. Anna trok de kist naar het noorden met een kracht van 75 N. Barbara trok de kist naar het oosten met een kracht van 120 N. Chloë trok de kist naar het zuiden met een kracht van 100 N. Ten slotte trok Davy de kist naar het westen met een kracht van 60 N. Wat is de grootte, in Newton, van de resulterende kracht die op de kist werkt?

Antwoord: 65

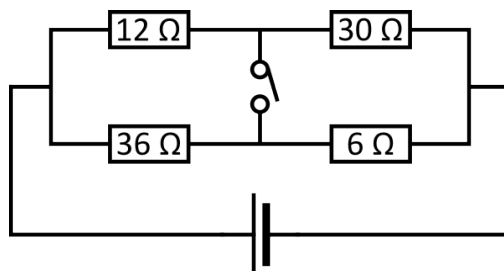
Oplossing: Laten we eerst kijken naar de krachten in de noord-zuidrichting. De kist wordt naar het noorden getrokken met een kracht van 75 N en naar het zuiden met een kracht van 100 N. Dat resulteert in een kracht van $100 \text{ N} - 75 \text{ N} = 25 \text{ N}$ naar het zuiden. Op dezelfde manier bekijken we de krachten in de oost-westrichting. De kist wordt naar het oosten getrokken met een kracht van 120 N en naar het westen met een kracht van 60 N. Dat resulteert in een kracht van $120 \text{ N} - 60 \text{ N} = 60 \text{ N}$ naar het oosten. De resulterende kracht op de kist vormt de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 25 N en 60 N. Volgens de stelling van Pythagoras geldt dan:

$$F = \sqrt{(25 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2} = 5\sqrt{5^2 + 12^2} \text{ N} = 5 \cdot 13 \text{ N} = 65 \text{ N}.$$

De resulterende kracht die op de kist werkt heeft dus een grootte van 65 N.

Opgave 25 ... Schakelaar en weerstand

Jonas ging door een doos met de spelletjes van zijn opa. Hij vond verschillende elektrische componenten, waaronder weerstanden met weerstanden 6Ω , 12Ω , 30Ω en 36Ω . Hij vond ook een bron met spanning 3 V. Jonas gebruikte de componenten om de schakeling uit de figuur te bouwen en mat de stroom die door de schakeling liep. Vervolgens zette hij de schakelaar om. Met hoeveel ampère nam de stroom door de gehele schakeling toe? Antwoord met een breuk in de eenvoudigste vorm.



Antwoord: $\frac{1}{14}$

Oplossing: Noteer de weerstanden als $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ en $R_4 = 36\ \Omega$. We berekenen de stroom door de schakeling in beide gevallen. Beschouw eerst de situatie waarin de schakelaar open is. Dan hebben we een parallelschakeling van twee takken. In de bovenste tak is de totale weerstand $R_b = R_2 + R_3 = 42\ \Omega$, terwijl in de onderste tak de weerstand $R_o = R_1 + R_4 = 42\ \Omega$ is. De totale weerstand is dus $R'_1 = \frac{R_b \cdot R_o}{R_b + R_o} = \frac{42\ \Omega \cdot 42\ \Omega}{42\ \Omega + 42\ \Omega} = 21\ \Omega$. Omdat de bronspanning $U = 3\text{ V}$ is, volgt dat de stroom door de schakeling

$$I_1 = \frac{U}{R'_1} = \frac{3\text{ V}}{21\ \Omega} = \frac{1}{7}\text{ A}$$

is.

Laten we nu het geval bekijken dat de schakelaar gesloten is. Dan hebben we twee parallelschakelingen in serie. De eerste tak heeft weerstand $R'_{21} = \frac{36\ \Omega \cdot 12\ \Omega}{36\ \Omega + 12\ \Omega} = 9\ \Omega$, terwijl de tweede tak weerstand $R'_{22} = \frac{30\ \Omega \cdot 6\ \Omega}{30\ \Omega + 6\ \Omega} = 5\ \Omega$ heeft. In totaal is de weerstand $R'_2 = R'_{21} + R'_{22} = 9\ \Omega + 5\ \Omega = 14\ \Omega$. De totale stroom is dan

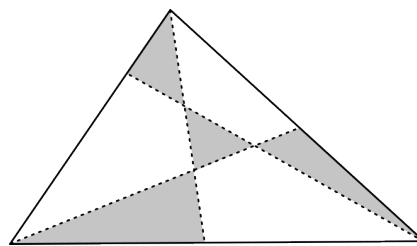
$$I_2 = \frac{U}{R'_2} = \frac{3\text{ V}}{14\ \Omega} = \frac{3}{14}\text{ A}.$$

Dus, nadat Jonas de schakelaar heeft omgezet, neemt de stroom toe met

$$\Delta I = I_2 - I_1 = \frac{3}{14}\text{ A} - \frac{1}{7}\text{ A} = \frac{1}{14}\text{ A}.$$

Opgave 26 ... Ondergrond van de speeltuin

Het stadsbestuur van Náboj-Stad plant een nieuwe speeltuin. Voordat ze met klimtoestellen komen, moeten ze de ondergrond van de speeltuin ontwerpen. De speeltuin krijgt een driehoekige vorm met een omtrek van 27 m. Verder komen er smalle paadjes die de speeltuin in meerdere delen opdelen, zoals in de figuur. De grijze delen krijgen grind, en de som van hun omtrekken is 30 m. De witte delen krijgen een rubberen toplaag, en de som van hun omtrekken is 33 m. Wat is dan de som van de lengtes van alle paadjes (de stippellijnen) binnen de speeltuin, in meter?



Antwoord: 18

Oplossing: Er zijn twee soorten lijnstukken in de figuur:

- 1) lijnstukken die een paadje bevatten (stippellijnen);
- 2) lijnstukken die op de rand van de speeltuin liggen.

De opgave vraagt om de som van de lengtes van de lijnstukken van het eerste type. Anderzijds weten we dat de som van de lengtes van de lijnstukken van het tweede type gelijk is aan de omtrek van de speeltuin, dus 27 m.

De truc is om de som te bekijken van de totale omtrek van de grijze delen en de totale omtrek van de witte delen, namelijk $30\text{ m} + 33\text{ m} = 63\text{ m}$. Merk op dat elk lijnstuk van het eerste type tweemaal bijdraagt aan

deze som, terwijl elk lijnstuk van het tweede type slechts eenmaal bijdraagt. Als we hieruit de omtrek van de speeltuin aftrekken (die gelijk is aan de som van de lengtes van de lijnstukken van het tweede type), krijgen we dat $63\text{ m} - 27\text{ m} = 36\text{ m}$ gelijk is aan tweemaal de som van de lengtes van de lijnstukken van het eerste type.

Ten slotte hoeven we alleen door 2 te delen om te vinden dat de som van de lengtes van de paadjes $36\text{ m} : 2 = 18\text{ m}$ is.

Opgave 27 ... Hydrostatisch onderlegde aquariumhouder

Radek heeft onlangs een nieuw rechthoekig (balkvormig) aquarium voor zijn vissen gekocht. Nu vraagt hij zich af wat de beste manier is om het op een bureau te plaatsen. Hij vulde het aquarium tot $2/3$ van zijn volume met water en maakte de bovenkant dicht. Vervolgens plaatste Radek het aquarium op drie verschillende manieren op het bureau en mat steeds de hydrostatische druk op de bodem van het aquarium. Zo verkreeg hij drukken van 4000 Pa, 10 000 Pa en 20 000 Pa. Hoewel Radek hieruit niets nuttigs kon opmaken wat betreft vissen houden (hij is geen bioloog en heeft geen idee hoe druk hen beïnvloedt), stelden de metingen hem verrassend genoeg in staat het volume van het aquarium te berekenen. Wat is het volume van het aquarium in liter?

Antwoord: 2700

Oplossing: Laat a , b en c de lengte, breedte en hoogte van het aquarium zijn, in een onbepaalde volgorde. We zijn op zoek naar het volume $V = abc$ vinden. Noem de door Radek verkregen drukken respectievelijk $p_1 = 4000\text{ Pa}$, $p_2 = 10\,000\text{ Pa}$ en $p_3 = 20\,000\text{ Pa}$. Het aquarium is gevuld met water tot $2/3$ van zijn volume. Dus als Radek het aquarium op één van zijn zijvlakken zet, reikt het water tot $2/3$ van de op dat moment verticale afmeting van het aquarium. Voor de drie mogelijke plaatsingen van het aquarium krijgen we daarom de volgende vergelijkingen voor de hydrostatische druk:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{3}a\rho_{\text{water}}g, \\ p_2 &= \frac{2}{3}b\rho_{\text{water}}g, \\ p_3 &= \frac{2}{3}c\rho_{\text{water}}g. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we de afmetingen van het aquarium uitdrukken:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3p_1}{2\rho_{\text{water}}g}, \\ b &= \frac{3p_2}{2\rho_{\text{water}}g}, \\ c &= \frac{3p_3}{2\rho_{\text{water}}g}. \end{aligned}$$

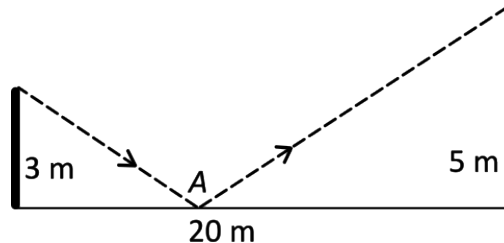
Ten slotte is het volume van het aquarium

$$V = abc = \frac{27p_1p_2p_3}{8\rho_{\text{water}}^3g^3} = \frac{27 \cdot 4000\text{ Pa} \cdot 10\,000\text{ Pa} \cdot 20\,000\text{ Pa}}{8 \cdot (1000\text{ kg/m}^3)^3 \cdot (10\text{ N/kg})^3} = 2,7\text{ m}^3.$$

We moesten het volume in liter uitdrukken, dus zetten we dit om en vinden we dat het volume van Radeks aquarium 2700 L is.

Opgave 28 ... Nachtsow

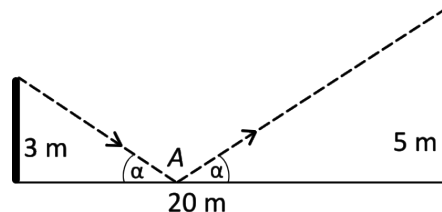
In Náboj-Stad staat een kunstinstallatie in de open lucht. De installatie bestaat uit twee torens, één met een hoogte van 3 m en de andere met een hoogte van 5 m, die 20 m uit elkaar staan. Op de top van de kleinere toren bevindt zich een laser. Deze is gericht op een kleine spiegel op de horizontale grond (weergegeven door punt A in de figuur), zodat de laserstraal (de stippellijn) weerkaatst en precies het doel op de top van de hogere toren raakt. Wat is de afstand van de spiegel tot de voet van de kleinere toren, in meters?



Opmerking: De figuur is niet op schaal getekend.

Antwoord: 7,5

Oplossing: De lichtstraal weerkaatst volgens de spiegelwet. Dat wil zeggen dat de invalshoek en de terugkaatsingshoek dezelfde grootte hebben. Dus de hoeken die met α zijn aangeduid in onderstaande figuur hebben dezelfde grootte:



De twee driehoeken die in de figuur te zien zijn hebben allebei hebben één hoek met grootte α en één rechte hoek. Ze zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt dat het horizontale lijnstuk van 20 m in dezelfde verhouding wordt verdeeld als de verhouding van de hoogtes van de torens, namelijk 3 : 5. Het kleinere deel heeft dus een lengte van $\frac{3}{3+5} \cdot 20 \text{ m} = 7,5 \text{ m}$. Met andere woorden, de spiegel moet op een afstand van 7,5 m van de voet van de kleinere toren worden geplaatst.

Opgave 29 ... Schietoefening

In zijn jeugd was scherpshutter Joe zeer bedreven in het schieten vanaf rijdende treinen. Omdat treinen tegenwoordig veel sneller gaan dan hij gewend is, wil hij dit weer oefenen. Hij plaatst een stilstaand doel op een afstand van 48 meter van een rechte spoorbaan. Vervolgens springt hij op het dak van een sneltrein (rijdend over die spoorbaan) die het doel met constante snelheid van 56 m/s voorbij zal rijden. Joes vuurrichting staat loodrecht op de trein en de kogels met bewegen een snelheid van 192 m/s ten opzichte van de revolver. Hoeveel meter van het doel verwijderd moet Joe zich bevinden op het moment dat hij de trekker overhaalt, zodat de kogel het doel raakt? Neem aan dat er geen luchtweerstand is en dat Joe en het doel zich op vrijwel dezelfde hoogte boven de grond bevinden.

Opmerking: Doe dit niet zelf na, je loopt een grote kans op elektrocutie.

Antwoord: 50

Oplossing: Splits het probleem in twee richtingen — één langs de spoorbaan en één loodrecht daarop. In de loodrechte richting moet de kogel een afstand van $s_p = 48 \text{ m}$ afleggen. Aangezien de kogel in die richting een snelheid heeft van $v_p = 192 \text{ m/s}$, duurt de vlucht

$$t = \frac{s_p}{v_p} = \frac{48 \text{ m}}{192 \text{ m/s}} = 0,25 \text{ s}.$$

De kogel heeft echter ook een component van de snelheid in de richting van de spoorbaan (door de vaart van de revolver op het rijdende dak). In tijd t legt de trein, met snelheid $v_t = 56 \text{ m/s}$, de afstand

$$s_t = v_t t = 56 \text{ m/s} \cdot 0,25 \text{ s} = 14 \text{ m}.$$

Om het doel te raken moet Joe dus vuren op een punt dat 14 m vóór het punt ligt waar zijn positie boven het loodrechte projectiepunt van het doel op de spoorbaan komt. Hij bevindt zich dan in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 14 m en 48 m. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat de schuine zijde

$$\sqrt{(14 \text{ m})^2 + (48 \text{ m})^2} = 50 \text{ m}$$

lang is. Dit is de afstand waarop Joe zich moet bevinden als hij schiet, dus het antwoord is 50 m.

Opgave 30 ... Allemaal leuk en aardig totdat...

In de pauze schreef Jacco een lange uitdrukking op het bord: $1 + 2 + 3 + \dots + 101$. De wiskundeleraar liep langs, glimlachte en zei: “Interessant... wat als we sommige plustekens veranderen in mintekens? Kunnen we de uitkomst gelijk maken aan 2025?” De uitdaging bleek niet zo eenvoudig! Wat is het kleinste aantal plustekens dat in mintekens moet worden veranderd om de som precies gelijk te maken aan 2025?

Antwoord: 17

Oplossing: Met een formule van het formuleblad kunnen we gemakkelijk berekenen dat $1+2+3+\dots+101 = 5151$. Bij elke verandering van een plusteken naar een minteken verlagen we de uitkomst met het dubbele van het betreffende getal. Om zo snel mogelijk van 5151 naar 2025 te gaan, moeten we beginnen met de grootste getallen. In totaal moeten we de uitkomst verlagen met $5151 - 2025 = 3126$. De som van de af te trekken getallen moet dus $3126 : 2 = 1563$ zijn (gedeeld door 2, omdat elke verandering van $+$ naar $-$ de uitkomst verlaagt met het dubbele van het getal waarvan we het teken veranderen). Elk afgetrokken getal is hoogstens 100, dus hebben we meer nodig dan $1563 : 100 = 15,63$, dus ten minste 16 getallen.

Als we de 16 grootste getallen van teken veranderen, krijgen we

$$5151 - 2 \cdot (86 + 87 + \dots + 101) = 5151 - 2 \cdot (187 \cdot 8) = 5151 - 2992 = 2159.$$

Dit ligt iets boven 2025, namelijk $2159 - 2025 = 134$. Om de uitkomst nog met 134 te verlagen, moeten we het teken voor het getal $134 : 2 = 67$ veranderen. Zo verkrijgen we precies 2025 na in totaal $16 + 1 = 17$ plustekens te hebben omgezet in mintekens.

Opgave 31 ... Ongewone opwarming

Ann speelt met een rubberen bal met een temperatuur van 20°C en een soortelijke warmtecapaciteit van $1250 \text{ J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$. Ze houdt de bal op een hoogte van 2,5 m boven een horizontale vloer en laat hem vallen zodat hij stuitert. Bij elke stuit verliest de bal de helft van zijn snelheid bij de botsing. We nemen aan dat de helft van de energie die de bal tijdens de stuit verliest, wordt omgezet in warmte die door de bal wordt opgenomen (en dat de bal geen warmte verliest aan de omgeving). Na enige tijd komt de bal tot stilstand op de vloer. Wat is dan de temperatuur van de bal in graden Celsius?

Antwoord: 20,01

Oplossing: Laat m de massa van de bal zijn. De oorspronkelijke potentiële energie van de bal is $E_p = mgh$, waarbij $h = 2,5 \text{ m}$. De bal blijft tijdens de stuiten energie verliezen. Bij elke stuit verliest de bal een deel van zijn energie. Slechts de helft van deze verloren energie wordt omgezet in warmte die door de bal wordt opgenomen. Aangezien uiteindelijk alle oorspronkelijke potentiële energie wordt omgezet in het proces van tot rust komen, wordt precies de helft van de potentiële energie omgezet in warmte-energie van de bal.

De warmte die de bal opneemt is dus $E_p/2$. Dit zorgt ervoor dat de bal, met een soortelijke warmtecapaciteit $c = 1250 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, in temperatuur stijgt met Δt gegeven door:

$$\begin{aligned} E_p/2 &= cm\Delta t, \\ \frac{mgh}{2} &= cm\Delta t, \\ \Delta t &= \frac{gh}{2c} = \frac{10 \text{ N/kg} \cdot 2,5 \text{ m}}{2 \cdot 1250 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})} = 0,01 ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

De temperatuur van de bal stijgt dus van $t = 20 ^\circ\text{C}$ naar $t' = t + \Delta t = 20 ^\circ\text{C} + 0,01 ^\circ\text{C} = 20,01 ^\circ\text{C}$.

Opgave 32 ... Mikado

Annemarie speelt Mikado. Ze neemt 4 stokjes en gooide ze op tafel. Ze doet dat op een bijzondere manier: van bovenaf gezien lijken alle 4 stokjes door één gemeenschappelijk punt te gaan. Nog steeds van bovenaf gezien meet Annemarie de scherpe hoek tussen elk paar stokjes. Op deze manier verkreeg ze 6 hoeken. Vijf daarvan zijn 16° , 40° , 45° , 56° en 61° . Als Annemarie deze informatie aan Michael geeft, ontdekt hij dat de zesde hoek twee verschillende waarden kan aannemen. Hij besluit de grotere te berekenen. Wat is de grootte in graden van de hoek die Michael berekent?

Antwoord: 79

Oplossing: Neem drie van de stokjes. Wat kunnen we zeggen over de drie scherpe hoeken ertussen? We zullen aantonen dat minstens één van de volgende twee uitspraken noodzakelijk waar is:

- a) Eén van de scherpe hoeken is de som van de andere twee.
- b) De drie scherpe hoeken samen zijn 180° .

Drie lijnen verdelen een volle hoek in 3 paren van hoeken met dezelfde grootte. Er kan hoogstens één van deze paren uit stompe (of rechte) hoeken bestaan – anders zou de volle hoek meer dan 360° bedragen. We kunnen dus twee paren van scherpe hoeken nemen van de drie paren. Deze twee paren bepalen twee van de drie scherpe hoeken die door de drie lijnen worden gevormd. De vraag is nu hoe de derde eruitziet.

De twee scherpe hoeken die we al hebben, delen een gemeenschappelijke lijn. Stel eerst dat hun som scherp is. In dat geval is dit de derde scherpe hoek, en bevinden we ons in situatie a). Is hun som echter stomp, dan wordt de derde hoek het supplement van deze som tot 180° , wat situatie b) oplevert.

Nu zijn we klaar om het oorspronkelijke probleem aan te pakken. We kennen 5 van de 6 hoeken, dus er moet een drietal stokjes zijn waarvoor we alle hoeken kennen. Zij moeten aan één van de bovenstaande voorwaarden voldoen. Geen drie van de hoeken voldoen aan b), want de maximale som die we kunnen krijgen is $45^\circ + 56^\circ + 61^\circ = 162^\circ < 180^\circ$. We kunnen echter twee drietallen vinden die aan voorwaarde a) voldoen, namelijk $16^\circ + 40^\circ = 56^\circ$ en $16^\circ + 45^\circ = 61^\circ$. Hieruit volgt dat er zeker twee lijnen zijn met een onderlinge hoek van 16° . De twee drietallen van hoeken worden gevormd door deze twee lijnen met een derde lijn, dus beide gevonden drietallen moeten worden gebruikt.

We beginnen dus met twee lijnen met een hoek van 16° . Vervolgens voegen we lijnen toe zodat ze hoeken van respectievelijk 40° en 45° vormen met de benen van deze hoek van 16° (en ze mogen niet overlappen met de hoek van 16°). We moeten dus twee gevallen beschouwen:

- Geval 1. Ze liggen aan dezelfde kant. In dat geval is er zeker een scherpe hoek van $45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$. Er kan worden gecontroleerd dat alle overige hoeken overeenkomen met Annemaries metingen.
- Geval 2. Ze liggen aan tegenovergestelde kanten. In dit geval vormen twee lijnen een hoek van $45^\circ + 16^\circ + 40^\circ = 101^\circ$. Deze hoek is echter stomp, dus we moeten zijn supplement nemen, namelijk $180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$. Ook hier is gemakkelijk na te gaan dat deze configuratie aan de voorwaarden voldoet.

Kortom, we vinden dat de grootst mogelijke waarde voor de zesde hoek 79° is — dit is dus de hoek die Michael berekende.

Opgave 33 ... Geen *mean girls*

Kristien en Katrien leren over gemiddelden. Beide meisjes schreven 8 verschillende gehele getallen op een papier en berekenden hun rekenkundig gemiddelde. Kristien kreeg als rekenkundig gemiddelde 45 en Kate kreeg 65. Vervolgens vergeleken ze de getallen die ze hadden opgeschreven. Het bleek dat er precies één geheel getal was dat door beide meisjes was opgeschreven. Daarom besloten ze een nieuw vel papier te nemen en alle 15 unieke getallen op te schrijven die ze oorspronkelijk hadden genoteerd (het getal dat door beiden was opgeschreven, schreven ze maar één keer). Ten slotte berekenden ze het rekenkundig gemiddelde van alle getallen op dit papier. Dat bleek 57 te zijn. Welk geheel getal was oorspronkelijk door zowel Kristien als Katrien opgeschreven?

Antwoord: 25

Oplossing: Kristien schreef 8 getallen op met rekenkundig gemiddelde 45. De som van deze 8 getallen moet dus $8 \cdot 45 = 360$ zijn. Evenzo schreef Katrien 8 getallen op met rekenkundig gemiddelde 65. De som van deze 8 getallen moet dus $8 \cdot 65 = 520$ zijn. De som van de door beide meisjes opgeschreven getallen is dus $360 + 520 = 880$.

Daarna schreven de meisjes $8 + 8 - 1 = 15$ getallen op (ze schreven het ene gemeenschappelijke getal slechts één keer) met een rekenkundig gemiddelde van 57. De som daarvan is dus $15 \cdot 57 = 855$. Dit getal verschilt van het eerder verkregen 880 precies met het getal dat door beide meisjes was opgeschreven. Dat betekent dat het door beiden genoteerde getal $880 - 855 = 25$ was.

Opgave 34 ... Boeiende opgave

Een bedrijf produceert boeien. Ze maken onder andere een rode boei die een bol is met een volume van 40 l en een gemiddelde dichtheid van 50 kg/m^3 . Ten behoeve van de stabiliteit willen ze een ketting met verwaarloosbaar volume aan de boei bevestigen, zodat 20 % van het volume van de bol zich onder water bevindt. De lineaire dichtheid van de ketting is 3 kg/m . Wat is de lengte van de ketting in meters die het bedrijf aan de boei moet bevestigen om aan deze eis te voldoen?

Antwoord: 2

Oplossing: Eerst moeten we begrijpen wat de grootheid “lineaire dichtheid” betekent. We duiden deze aan met λ . Uit de eenheid kg/m kunnen we opmaken dat een ketting met massa m en lengte ℓ een lineaire dichtheid heeft $\lambda = \frac{m}{\ell}$. In ons probleem kennen we de lineaire dichtheid $\lambda = 3 \text{ kg/m}$ en moeten we de lengte ℓ berekenen.

Terug naar het oorspronkelijke probleem: we hebben een bol met volume $V = 40 \text{ l} = 0,04 \text{ m}^3$ en gemiddelde dichtheid $\rho = 50 \text{ kg/m}^3$. Deze bol heeft een van $m_0 = \rho V = 2 \text{ kg}$.

We willen dat 20 % van de bol onder water is, dus de boei moet uiteindelijk een gemiddelde dichtheid hebben van 20 % van de dichtheid van water. Hij moet dus een dichtheid hebben van $\rho' = \frac{20}{100} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 200 \text{ kg/m}^3$. Het bevestigen van een ketting met verwaarloosbaar volume vergroot het volume niet, dus het volume blijft V . De totale massa van de boei moet daarom $m = \rho' V = 200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,04 \text{ m}^3 = 8 \text{ kg}$ zijn.

We moeten de massa dus verhogen met $m - m_0 = 6 \text{ kg}$. Daarvoor hebben we een ketting nodig met een lengte van

$$\ell = \frac{m - m_0}{\lambda} = \frac{6 \text{ kg}}{3 \text{ kg/m}} = 2 \text{ m}.$$

Opgave 35 ... De weerstandwizard

Kubo vond twee weerstanden. Hij kent hun weerstand niet, dus besluit hij die te bepalen. Eerst schakelde hij ze in serie en stelde vast dat de weerstand van deze schakeling $64\ \Omega$ is. Daarna schakelde hij ze parallel en verkreeg een schakeling met weerstand $7\ \Omega$. Wat is de weerstand, in ohm, van de weerstand met de grootste waarde?

Antwoord: 56

Oplossing: Noem de weerstanden R_1 en R_2 . De voorwaarde voor de serieschakeling levert de vergelijking

$$R_1 + R_2 = 64\ \Omega.$$

De voorwaarde voor de parallelschakeling geeft

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{7\ \Omega}.$$

We hebben dus een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Herschrijven van de tweede voorwaarde en gebruiken van de eerste vergelijking vereenvoudigt dit tot

$$\begin{aligned}\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7\ \Omega}, \\ \frac{64\ \Omega}{R_1 R_2} &= \frac{1}{7\ \Omega}, \\ R_1 R_2 &= (7 \cdot 64)\ \Omega^2.\end{aligned}$$

De weerstandswaarden hebben dus een som van 64 en een product van 448. Als we vermoeden dat de waarden gehele getallen zijn, moeten we een paar complementaire delers van 448 vinden met som 64. Ten minste één van de delers moet deelbaar zijn door 8 (omdat 448 deelbaar is door $64 = 8^2$). Omdat ook de som van beide delers deelbaar is door 8, moet de tweede deler eveneens door 8 deelbaar zijn. Dit laat slechts één mogelijkheid over: de delers 8 en 56, die inderdaad aan de voorwaarden voldoen. We worden gevraagd naar de grootste weerstand. Die is gelijk aan $56\ \Omega$.

Opgave 36 ... Absoluut verschillend probleem

Suzanne speelt met getallen. Ze kiest 20 paarsgewijs verschillende positieve gehele getallen met som 2025 en schrijft ze in een bepaalde volgorde langs een cirkel met een blauwe pen. Vervolgens bekijkt ze elk paar van aangrenzende getallen, berekent hun absolute verschil (d.w.z. het grotere getal min het kleinere) en schrijft dat tussen de getallen met een rode pen. Daarna berekent ze de som van alle rode getallen. Wat is de minimale som van alle 20 rode getallen?

Antwoord: 40

Oplossing: Laat m het kleinste en M het grootste van de opgeschreven getallen zijn. Deze staan ergens op de cirkel. Beschouw de cirkelbogen van m naar M . Er zijn twee zulke bogen; we focussen op één ervan. We beweren dat de som van de rode getallen langs deze boog minimaal $M - m$ is.

Als de getallen langs de boog in stijgende volgorde van m naar M staan, bijvoorbeeld $m < a_1 < a_2 < \dots < a_k < M$, dan is de som van de rode getallen

$$(a_1 - m) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (M - a_k) = M - m.$$

Anders is er ergens een daling. In dat geval moeten we niet alleen in stappen van m naar M stijgen, maar ook de daling(en) compenseren. Daardoor neemt de som van de rode getallen met ten minste tweemaal de grootte van de daling toe. Dit vergroot de totale som, dus dit is zeker niet optimaal.

Tot dusver hebben we gevonden dat de minimale som van rode getallen langs elke boog van m naar M gelijk is aan $M - m$. Er zijn twee zulke bogen, dus is de minimale totale som van rode getallen $2(M - m)$.

Het probleem reduceert nu tot het vinden van de kleinste mogelijke waarde van $M - m$. De kleinste mogelijke waarde zouden we krijgen als de 20 getallen 20 opeenvolgende gehele getallen vormen (dan is $M - m = 19$). Dat kan echter niet: de som van 20 opeenvolgende getallen is altijd 10 keer de som van het kleinste en het grootste element, en dus een veelvoud van 10. Het getal 2025 is daarentegen geen veelvoud van 10.

We kunnen echter concluderen dat $M - m = 20$ wel haalbaar is. We kunnen bijvoorbeeld expliciet 20 getallen opschrijven die voldoen. De gemiddelde waarde van de 20 getallen is ongeveer $2025 : 20 = 101,25$. We kijken daarom naar 20 opeenvolgende gehele getallen (waarvan we er enkele zullen aanpassen) zodat 101,25 tussen de 10^e en 11^e term ligt; deze twee termen zijn 101 en 102. Als we de getallen 92, 93, ..., 101, 102, ..., 111 nemen, krijgen we de som $10 \cdot (101 + 102) = 2030$. We moeten echter 2025 hebben, dus verlagen we de kleinste 5 getallen (92, 93, 94, 95, 96) elk met één.

Zo verkrijgen we een 20-tal met som 2025 waarvoor $M - m = 20$. De minimale som van de rode getallen is dus $2(M - m) = 2 \cdot 20 = 40$.

Opgave 37 ... Stuiterbal

Martina heeft een stuiterbal om mee te spelen. Ze werpt hem horizontaal tegen een muur. Op het moment dat de bal de hand verlaat bevindt hij zich op een hoogte van 1,6 m en heeft hij een snelheid van 16 m/s. Vervolgens stuitert de bal tegen de muur op een hoogte van 0,8 m en daarna tegen de vloer. Elke stuiter verloopt volgens de weerkaatsingswet, maar de bal verliest bij elke botsing $\frac{1}{4}$ van zijn kinetische energie. Wat is de maximale hoogte die de bal bereikt na de stuiter op de vloer, in meters?

Antwoord: 1,05

Oplossing: Laat m de massa van de bal zijn. In het begin bevindt de bal zich op hoogte $h_0 = 1,6$ m, dus heeft hij potentiële energie $E_{p_0} = mgh_0$. Daarnaast beweegt hij met snelheid $v_0 = 16$ m/s, dus heeft hij kinetische energie $E_{k_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. De totale energie in het begin is

$$E_0 = E_{p_0} + E_{k_0} = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = (10 \text{ N/kg} \cdot 1,6 \text{ m} + \frac{1}{2}(16 \text{ m/s})^2) m = 144 \text{ J/kg} \cdot m.$$

De eerste stuitering gebeurt op hoogte $h_1 = 0,8$ m, dus is de potentiële energie $E_{p_1} = mgh_1 = 10 \text{ N/kg} \cdot 0,8 \text{ m} \cdot m = 8 \text{ J/kg} \cdot m$. De kinetische energie vóór de stuiter is $E'_{k_1} = E_0 - E_{p_1} = 144 \text{ J/kg} \cdot m - 8 \text{ J/kg} \cdot m = 136 \text{ J/kg} \cdot m$. Deze neemt af tot drie kwart, dus na de stuiter geldt $E_{k_1} = \frac{3}{4}E'_{k_1} = \frac{3}{4}(136 \text{ J/kg} \cdot m) = 102 \text{ J/kg} \cdot m$. De totale energie na de eerste stuiter is dan

$$E_1 = E_{p_1} + E_{k_1} = 8 \text{ J/kg} \cdot m + 102 \text{ J/kg} \cdot m = 110 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Bij de tweede stuiter is er geen potentiële energie ($E_{p_2} = 0$), dus bestaat de totale energie volledig uit kinetische energie, die opnieuw tot drie kwart afneemt:

$$E_2 = \frac{3}{4}E_1 = \frac{3}{4}(110 \text{ J/kg} \cdot m) = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m.$$

Nu zoeken we het moment waarop de bal zijn maximale hoogte bereikt. Dat gebeurt wanneer de verticale component van de snelheid nul is. Er blijft echter nog een horizontale component over, dus moeten we ook die meenemen. Aan het begin was de horizontale snelheid v_0 . Na elke stuiter neemt de grootte van de snelheid af zodanig dat de kinetische energie tot drie kwart vermindert. Omdat de kinetische energie evenredig is met het kwadraat van de snelheid, wordt de snelheid vermenigvuldigd met $\sqrt{3/4}$. Na twee stuiteringen geldt dus $v_2 = (\sqrt{3/4})^2 v_0 = \frac{3}{4}v_0 = 12 \text{ m/s}$.

In het hoogste punt heeft de bal nog steeds snelheid v_2 en dus kinetische energie $E_{k_3} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(12 \text{ m/s})^2 \cdot m = 72 \text{ J/kg} \cdot m$. De potentiële energie is dan $E_{p_3} = E_2 - E_{k_3} = 82,5 \text{ J/kg} \cdot m - 72 \text{ J/kg} \cdot m = 10,5 \text{ J/kg} \cdot m$. Daaruit volgt dat de maximale hoogte h_3 die de bal bereikt gelijk is aan:

$$h_3 = \frac{E_{p_3}}{mg} = \frac{10,5 \text{ J/kg} \cdot m}{m \cdot 10 \text{ N/kg}} = 1,05 \text{ m}.$$

Opgave 38 ... Gepolariseerde samenleving

De samenleving is zo gepolariseerd dat Thomas besloot te onderzoeken of mensen werkelijk overal verdeeld over zijn, of dat ze toch iets gemeen hebben. Hij ontdekte dat de samenleving verdeeld is in twee groepen – één van a personen en de andere van b personen. Om te weten te komen wat ze gemeen hebben, berekende hij de grootste gemene deler en het kleinste gemene veelvoud van de getallen a en b . Hij telde de grootste gemene deler en het kleinste gemene veelvoud op en kreeg de som 20 250. Hoeveel verschillende waarden kan de grootste gemene deler hebben gehad?

Antwoord: 39

Oplossing: Uit de definitie van de grootste gemene deler weten we dat $\text{ggd}(a, b)$ een deler is van zowel a als b . Op dezelfde manier zijn zowel a als b delers van $\text{kgv}(a, b)$. Hieruit volgt dat $\text{kgv}(a, b)$ deelbaar is door $\text{ggd}(a, b)$. We kunnen dus positieve gehele getallen d en k vinden zodat

$$d = \text{ggd}(a, b), \quad kd = \text{kgv}(a, b).$$

Omgekeerd kunnen we voor elke keuze van k en d geschikte a en b vinden. Het volstaat om $a = d$ en $b = kd$ te nemen. Omdat we het aantal mogelijke waarden van d moeten vinden, kunnen we a en b buiten beschouwing laten en enkel met d en kd werken.

De voorwaarde herschrijven geeft $d + kd = d(k + 1) = 20\,250$. Dit is hetzelfde als het schrijven van het getal 20 250 als een product van twee factoren, waarvan er één (namelijk $k + 1$) minstens 2 moet zijn. Dus kan d elke deler van 20 250 zijn, behalve 20 250 zelf (want dat zou $k + 1 = 1$ maken).

Het probleem komt dus neer op het bepalen van het aantal positieve delers van het getal 20 250. De priemfactorontbinding van 20 250 is $20\,250 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$. De delers van dit getal hebben dezelfde priemfactoren, maar met kleinere exponenten (tot en met 0). We hebben 2 keuzes voor de priemfactor 2 (0 of 1), 5 keuzes voor 3 (0, 1, 2, 3, 4) en 4 keuzes voor 5 (0, 1, 2, 3). In totaal heeft het getal 20 250 dus $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ delers. We moeten de deler 20 250 zelf uitsluiten, wat ons $40 - 1 = 39$ mogelijke waarden oplevert voor de grootste gemene deler van Thomas' getallen.

Opgave 39 ... Chinese snoepjes

Arthur is dol op snoepjes. Zijn vriend was in China en bracht hem 6 snoepjes mee, elk met een andere smaak. Arthur waardeert het cadeau van zijn vriend zo erg dat hij de snoepjes op een heel specifieke manier wil opeten. Herhaaldelijk kiest hij één of twee snoepjes om te eten (als hij er twee kiest, dan eet hij die gelijktijdig op). Hij gaat hiermee door tot alle snoepjes op zijn. Hoeveel verschillende keuzes heeft Arthur voor de volgorde van het eten van alle snoepjes?

Antwoord: 3690

Oplossing: Voor elk positief geheel getal n noteren we met $p(n)$ het aantal manieren waarop Arthur n snoepjes kan opeten. We beschrijven hoe we $p(n)$ kunnen berekenen op basis van $p(n - 1)$ en $p(n - 2)$.

Wanneer er n snoepjes over zijn, kan Arthur kiezen om één of twee snoepjes te eten. Als hij één snoepje kiest, kan hij één van de n snoepjes nemen. Daarna blijven er $p(n - 1)$ mogelijkheden over om de rest op te eten. Dit geeft Arthur $n \cdot p(n - 1)$ mogelijkheden. Als Arthur ervoor kiest om twee snoepjes te eten, kan hij deze kiezen op $\frac{n(n-1)}{2}$ manieren. Daarna blijven er $p(n - 2)$ mogelijkheden over om de rest op te eten. Voor algemeen $n \geq 3$ geldt dus:

$$p(n) = n \cdot p(n - 1) + \frac{n(n - 1)}{2} \cdot p(n - 2).$$

We gebruiken deze formule om $p(6)$ te berekenen. We weten dat $p(1) = 1$ en $p(2) = 3$. Verder krijgen we:

$$\begin{aligned} p(3) &= 3p(2) + 3p(1) = 9 + 3 = 12, \\ p(4) &= 4p(3) + 6p(2) = 48 + 18 = 66, \\ p(5) &= 5p(4) + 10p(3) = 330 + 120 = 450, \\ p(6) &= 6p(5) + 15p(4) = 2700 + 990 = 3690. \end{aligned}$$

Daaruit volgt dat Arthur zijn snoepjes op 3690 verschillende manieren kan opeten.

Opgave 40 ... Boekenpret

Matthijs is een uitstekende student. Wanneer hij even pauze wil nemen van het studeren, speelt hij met zijn boeken: één met een massa van 0,5 kg en het andere met een massa van 1 kg. Hij legt het lichtere boek op een horizontale tafel en het zwaardere boek bovenop het lichtere boek. De wrijvingscoëfficiënt tussen het boek en de tafel is 0,3 en tussen de twee boeken 0,6. Matthijs begint vervolgens het lichtere boek horizontaal naar zicht toe te trekken met een kracht van grootte F . Bepaal de kleinste mogelijke waarde van F in newton zodat het bovenste boek van het onderste afglijdt.

Antwoord: 13,5

Oplossing: We noteren de massa's en wrijvingscoëfficiënten als volgt: $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 1$ kg, $f_1 = 0,3$, $f_2 = 0,6$. We beschrijven eerst de krachten die op de boeken werken.

Verticale richting. Op het boek met massa m_2 werken twee krachten: de zwaartekracht $F_{g_2} = m_2g$ en de normaalkracht F_{N_2} van het andere boek. Omdat dit boek zich niet verticaal verplaatst, geldt $F_{N_2} = F_{g_2}$.

Op het boek met massa m_1 werken drie krachten: de zwaartekracht F_{g_1} , de normaalkracht F_{N_2} van het bovenste boek en de normaalkracht F_{N_1} van de tafel. Omdat ook dit boek zich niet verticaal verplaatst, geldt

$$F_{g_1} + F_{N_2} - F_{N_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{N_1} = F_{g_1} + F_{N_2} = F_{g_1} + F_{g_2} = (m_1 + m_2)g.$$

Horizontale richting. Stel dat de kracht F waarmee Matthijs trekt, naar rechts gericht is. We beginnen weer met het boek van massa m_2 . Op dit boek werkt slechts één kracht in horizontale richting – de wrijvingskracht. Zonder wrijving zou het boek naar links glijden ten opzichte van het onderste boek. De wrijvingskracht werkt daartegenin, dus naar rechts, met grootte $F_2 = F_{t_2} \leq f_2 F_{N_2} = f_2 F_{g_2} = f_2 m_2 g$.

Voor het boek met massa m_1 moeten we drie krachten beschouwen. De eerste is uiteraard F . De tweede is de wrijvingskracht tussen het boek en de tafel, die het boek afremt met grootte $F_{t_1} \leq f_1 F_{N_1} = (m_1 + m_2) f_1 g$. De derde kracht is de reactiekracht op F_{t_2} , die, met gelijke grootte, naar links werkt. De resulterende kracht op dit boek heeft dus grootte

$$F_1 = F - F_{t_1} - F_{t_2} \geq F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g.$$

Wanneer het bovenste boek (m_2) begint te glijden, zijn alle wrijvingskrachten maximaal (omdat de boeken en tafel ten opzichte van elkaar schuiven). In dat geval geldt $F_1 = F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g$ en $F_2 = f_2 m_2 g$. Het bovenste boek glijdt wanneer $a_1 > a_2$ waar a_1 en a_2 de versnellingen van de boeken zijn. Want als het lichtere boek sneller versnelt dan het zwaardere, dan moeten ze wel relatief aan elkaar bewegen. De grenssituatie is $a_1 = a_2$, waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2, \\ \frac{F_1}{m_1} &= \frac{F_2}{m_2}, \\ \frac{F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g}{m_1} &= \frac{f_2 m_2 g}{m_2}, \end{aligned}$$

$$F - (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2)g = m_1 f_2 g,$$

$$F = (m_1 f_1 + m_2 f_1 + m_2 f_2 + m_1 f_2)g,$$

$$F = (0,5 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,3 + 1 \text{ kg} \cdot 0,6 + 0,5 \text{ kg} \cdot 0,6) \cdot 10 \text{ N/kg} = 13,5 \text{ N}.$$

We concluderen dat de kleinste mogelijke kracht waarmee Matthijs aan het boek moet trekken 13,5 N is.

Opgave 41 ... Schaakkoning deel 2

Kate heeft het vorige probleem over de koning op een oneindig schaakbord opgelost, dus zoekt ze nu een uitdagendere vraag. Haar tweede vraag over de schaakkoning op een oneindig schaakbord is: uit hoeveel verschillende wandelingen van precies vier zetten kan de koning kiezen als hij weer op hetzelfde vakje als waar hij begon wil eindigen?

Antwoord: 216

Oplossing: De koning moet in 4 zetten terugkeren naar zijn startpositie. Laten we naar zijn positie na 2 zetten kijken. Op dat moment heeft hij nog $4 - 2 = 2$ zetten over. Noem zo'n vakje voorlopig een "rood" vakje. De koning kan elke twee wandelingen naar het rode vakje combineren tot een geldige wandeling van 4 zetten met de vereiste eigenschap: hij gebruikt één wandeling om het rode vakje te bereiken en de andere (in omgekeerde richting) om terug te keren naar het startvakje.

Bepaal nu welke vakjes de koning in twee zetten kan bereiken. Het aantal manieren om een vakje te bereiken hangt af van het aantal aangrenzende vakjes waarvan de koning het in één zet kan bereiken. Het aantal manieren om een gegeven vakje na twee zetten te bereiken verkrijgt je dus door de aantallen van zijn burens na één zet op te tellen. Onderstaande tabel toont het aantal manieren om elk vakje in twee zetten te bereiken, waar het vakje met een klein vierkantje het startvakje is.

	1	2	3	2	1	
	2	2	4	2	2	
	3	4	8	4	3	
	2	2	4	2	2	
	1	2	3	2	1	

We gebruiken nu onze eerdere observatie dat de koning vanuit elk van deze vakjes op evenveel manieren kan terugkeren naar het startvakje. Dit levert $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 216$ mogelijke wandelingen.

Opgave 42 ... Op de bodem

Casper is een perfect gladde, homogene kubus met ribbe van lengte 50 cm en dichtheid 1200 kg/m^3 . Hij bevindt zich op de perfect gladde bodem van een aquarium dat met water is gevuld tot een hoogte van 2 m. Wat is de grootte van de kracht die Casper op de bodem van het aquarium uitoefent, in newton?

Opmerking: Ga uit van standaardomstandigheden: temperatuur 20°C en atmosferische druk.

Antwoord: 30250

Oplossing: We analyseren de krachten die werken op de kubus met ribbe $a = 50 \text{ cm}$ en dichtheid $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$, die op de bodem ligt onder een waterkolom met hoogte $h = 2 \text{ m}$. De eerste kracht is uiteraard de zwaartekracht $F_g = mg = a^3 \rho g$.

Verder werken er krachten van het water op de kubus. De krachten op de verticale vlakken heffen elkaar op, dus bekijken we enkel de krachten op de horizontale vlakken. Onder de kubus bevindt zich geen water (kubus en bodem zijn volkomen glad), dus werkt er geen waterkracht op het ondervlak. Op het bovenvlak werkt wel een druk.

Noem de druk van het water op het bovenvlak p . Aangezien het bovenvlak een oppervlakte $A = a^2$ heeft, is de drukkracht $F_p = pA$. We moeten dus p bepalen. Het bovenvlak bevindt zich op diepte $h' = h - a$, zodat de hydrostatische druk $p_h = h' \rho_{\text{water}} g$ is.

Dit is echter niet de enige druk waarmee rekening moet worden gehouden. Onder standaardomstandigheden werkt er een atmosferische druk p_A op het wateroppervlak. Volgens de wet van Pascal wordt de totale druk in het water met deze atmosferische druk verhoogd. Dus vlak boven het bovenvlak van de kubus geldt $p = p_A + p_h$.

We kunnen nu alles samenvoegen om de totale kracht te vinden die de kubus op de bodem uitoefent:

$$\begin{aligned} F &= F_g + F_p = a^3 \rho g + (p_A + (h - a) \rho_{\text{water}} g) a^2, \\ F &= (0,5 \text{ m})^3 \cdot 1200 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \\ &\quad + (100\,000 \text{ Pa} + (2 \text{ m} - 0,5 \text{ m}) \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg}) \cdot (0,5 \text{ m})^2, \\ F &= 30\,250 \text{ N}. \end{aligned}$$

Opmerking: Het antwoord lijkt misschien heel groot. In werkelijkheid bestaat er geen volkomen gladde objecten en is er dus altijd een beetje water onder de kubus, wat opwaartse kracht (drijfkracht) mogelijk maakt. Die drijfkracht helpt een ondergedompeld object aanzienlijk, zodat de kracht op de bodem veel kleiner is. Toch is het probleem niet onrealistisch: als een onderzeeër de zeebodem raakt, kan het verlies aan drijfvermogen groot genoeg zijn dat hij niet meer loskomt. Moderne onderzeeërs hebben systemen om dit te voorkomen, maar vermijden contact met de bodem doorgaans toch (om fysieke schade te vermijden en omdat er zich vaak koelgaten aan de onderzijde bevinden).

Met dank aan

Voorzitter van het opgavencomité

Miroslav Pajger

Opgave-inzendingen

Rikkie Gieler, Anna Koziara, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Opgaven en oplossingen

Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Martyna Ślusarczyk

Herzienen

Zvonko Andrijević, Emanuel Bajamić, Patrik Cvetek, Karlo Jokoš, Lucia Kleščová, Radek Kusek, Miroslav Pajger, Marián Poturnay, Lucija Relić, Martyna Ślusarczyk, Matej Vojvodić

Vertalingen

Carmen Barriuso, Veronika Bartáková, Kurt Bergler, Kacper Błachut, Patrik Cvetek, Matěj Dudek, Szymon Dziewoński, Rikke Gieler, Johanna Hackl, Walter Hametner, Kornel Howil, Lucia Kleščová, Vojtěch Kubrycht, Kateřina Kučerová, Vít Kupilík, Hartwig Lasser, Maria Lebitsch, Nastazja Lukoszek, Anna Matiašková, Piotr Miernik, Tomáš Miškov, Hannah Mittermayr, Azucena Molina-Solis, Miroslav Pajger, Francesca Papatola, Kacper Piotrowski, Marián Poturnay, David Präsent, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Dmytro Rzhemovskiy, Jakub Savula, Martyna Ślusarczyk, Matěj Sochor, Karolina Szulc, Szymon Tobiasz, Matej Vojvodić, Leonore Wölk, Wouter Zandsteeg, Patryk Zubilewicz

Coördinatoren

Dmytro Rzhemnovskiy, Kurt Bergler, David Präsent (AT), Veronika Bendíková, Soňa Vasiľová (SK), Martyna Ślusarczyk (PL), Tomáš Miškov (BE & NL), Kateřina Rosická (CZ), Matej Vojvodić (HR)

Wedstrijdlocaties

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biala:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Elbląg:** Zespół Szkół Mechanicznych • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Gdynia:** Szkoła Podstawowa nr 26 • **Graz:** Universität Graz • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Hurbanovo:** SPŠ Stavebná • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Koszalin:** I Liceum Ogólnokształcące im. St. Dubois • **Koźmin Wielkopolski:** Szkoła Podstawowa nr 3 im. Kornela Makuszyńskiego • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Lebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovéj Timravy • **Michalovce:** Gymnázium Pavla Horova • **Náchod:** Jiráskovo gymnázium • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Ostrołęka:** I Liceum Ogólnokształcące im. gen. J. Bema • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázium Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Prostějov:** Gymnázium Jiřího Wolkeru • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Radom:** VI Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Jana Kochanowskiego • **Sokolov:** Gymnázium Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wien:** Universität Wien, Erwin Schrödinger Institute, FH Technikum, TU Wien • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu