Rozwiązania

X edycja zawodów Náboj Junior

25 listopada 2022

Trojsten

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Podziękowania

Główny członek komisji zadaniowej

Marián Poturnay

Propozycje zadań

Merlijn Dierckx, Peter Dupej, Rikkie Gieler, Marián Poturnay, Patrik Švančara

Zadania i rozwiązania

Michaela Dlugošová, Matej Hrmo, Marián Poturnay

Korekta

Michaela Dlugošová, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Miroslav Pajger, Jakub Poljovka, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Michaela Rusnáková

Tłumacze

Ezequiel Albentosa Ruiz, Matěj Andrašina, Mislav Brnetić, Jakov Budić, Alica Cimráková, Hubert Dej, Merlijn Dierckx, Jasper Dijt, Maja Drmač, Pierre-Marie Esmenjaud, Lana Frkin, Rikkie Gieler, Borna Gojšić, Thomas González Saito, Laura Horvat, Matej Hrmo, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Matúš Jonaštík, Lucija Kristić, Radek Kusek, Richard Materna, Katzper Michno, Tomáš Miskov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Albert Pátík, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Michaela Rosinská, Juraj Rosinský, Michaela Rusnáková, Anamária Šutková, Michal Tomaga, Matej Vojvodić, Leonarda Vuković, Mateusz Wojtas, Szymon Wojtulewicz

Koordynatorzy

Mislav Brnetić (HR), Matej Hrmo (SK), Radek Kusek (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ), Juraj Rosinský (FR)

Miasta zawodów

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **Česká Lípa:** Gymnázium Žitavská • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Michalovce:** Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec:** IV Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Stanisława Staszica • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Liceum Ogólnokształcące nr III im. Adama Mickiewicza • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť

Zadanie 1 … Rocznica

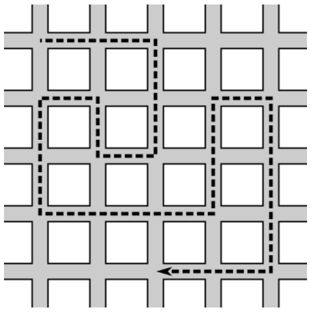
W roku 2012, w dniu pierwszych zawodów Náboj Junior, Basia posadziła jabłoń. Drzewo miało wtedy wysokość 5 dm. Każdego roku jabłoń rosła o dodatkowe 600 mm. Jaka jest wysokość jabłoni w centymetrach tego samego dnia w 2022 roku?

Odpowiedź: 650

Rozwiązanie:
W roku 2012 wysokość jabłoni wynosiła 5 dm = 50 cm. Przez następne 10 lat, jabłoń rosła o dodatkowe 600 mm = 60 cm rocznie. Tak więc jej wysokość w roku 2022 wynosi 50 cm + $10 \cdot 60$ cm = 650 cm.

Zadanie 2 … Zagubiona w Nowym Jorku

Ania zgubiła się na ulicach Nowego Jorku. Ulice Nowego Jorku tworzą kratę, której kwadraty mają boki długości 80 m. Podczas błądzenia Ania przeszła trasę jak na rysunku. Ile metrów przeszła?

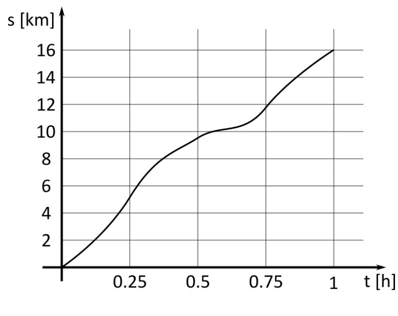


Odpowiedź: 1600

Rozwiązanie:
Wystarczy policzyć boki kwadratów, wzdłuż których szła Ania. Łatwo doliczyć się 20 boków, co odpowiada odległości $20 \cdot 80$ m = 1600 m.

Zadanie 3 … Ponadprzeciętny Grześ

Grześ udał się dziś rano biegać. Do śledzenia swoich wyników używał aplikacji. Po skończonym biegu znalazł w niej wykres taki jak na rysunku. Wykres przedstawia zależność przebytej drogi od czasu. Jaka była średnia prędkość Grzesia podczas biegu, wyrażona w kilometrach na godzinę?

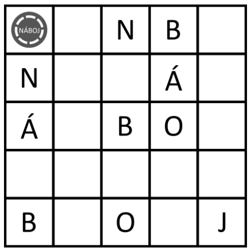


Odpowiedź: 16

Rozwiązanie: Średnia prędkość Grzesia jest równa wynikowi dzielenia całkowitej przebytej przez niego drogi przez czas, który zajęło mu przebycie tej drogi. Z wykresu możemy odczytać, że Grześ pokonał dystans 16 km w ciągu 1 h, co oznacza, że jego średnia prędkość wyniosła 16 km/h.

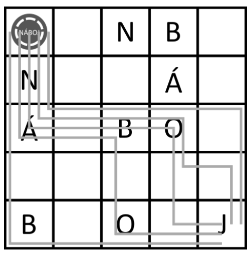
Zadanie 4 … Szachownica NÁBOJ

Daniel narysował szachownicę o wymiarach 5×5 i postawił pionek w lewym górnym roku. Daniel przesuwa pionek po szachownicy, za każdym razem albo o jedno pole w dół albo o jedno pole w prawo. Na ile różnych sposobów Daniel może przeprowadzić pionek z górnego lewego rogu do prawego dolnego rogu tak, aby zebrać po drodze w poprawnej kolejności wszystkie litery słowa NÁBOJ?



Odpowiedź: 5

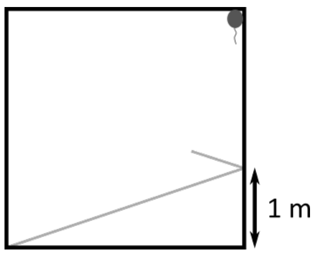
Rozwiązanie: Najpierw musimy zebrać literę N. Gdybyśmy wybrali literę N o dwa pola na prawo od punktu startowego, musielibyśmy następnie wziąć literę Á o jedno pole na prawo i w dół od tego N. Jednak stamtąd nie da się dojść do żadnej litery B za pomocą dozwolonych ruchów. To znaczy że że musimy użyć litery N która jest poniżej punktu startowego.
Jeśli teraz wzięlibyśmy Á na trzy pola na prawo od tego N, mielibyśmy ten sam problem co poprzednio - nie znajdziemy żadnego B. Tak więc drugą spotkaną literą musi być Á w pierwszej kolumnie.
Jeśli za następną literę wybierzemy B w lewym dolnym rogu, będziemy mieli już tylko jeden sposób żeby dojść do pola z literą J. Po drodze miniemy również literę O, więc jest to jedna z poprawnych możliwości.
Jeśli będziemy zaś kontynuowali z literą B w trzecim wierszu, wówczas na dwa sposoby możemy dojść do litery O. Jeśli wybierzemy O w najniższym wierszu, będziemy mieli już tylko jeden sposób aby dojść do prawego dolnego rogu. Natomiast jeśli weźmiemy O z trzeciego wiersza, będziemy mieli trzy różne sposoby przejścia do J.
Wszystkie możliwe trasy pionka są przedstawione na rysunku:



Daniel może przeprowadzić pionek na 5 różnych sposobów.

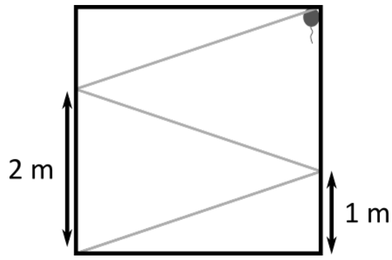
Zadanie 5 … W górę

Marek stoi w rogu kwadratowego pokoju o wymiarach 3 m × 3 m. Wszystkie ściany tego pokoju są pokryte lustrami. W rogu naprzeciwko Marka lata balonik. Marek poświecił laserem ze swojego rogu w kierunku jednej ze ścian, tak jak przedstawiono na rysunku. Ile razy wiązka lasera odbije się od ściany przed uderzeniem w balonik?



Odpowiedź: 2

Rozwiązanie: Będziemy nazywać kierunki zgodnie z rysunkiem. Wiązka odbiła się od prawej ściany tak, że oświetli lewą ścianę dodatkowy metr wyżej. To oznacza, że trafi w punkt na lewej ścianie położony dwa metry wyżej niż miejsce, z którego została wypuszczona. Odbije się potem tak, że oświetli punkt na prawej ścianie położony dodatkowy metr wyżej, więc uderzy dokładnie w róg, w którym znajduje się balonik. Tor wiązki jest widoczny na rysunku poniżej:



Wiązka odbije się od ścian 2 razy.

Zadanie 6 … Do szkoły

Laura wymyśliła nową jednostkę długości. Nazwała ją „doszkół”, gdzie jeden doszkół to długość 3 km, bo tyle wynosi długość drogi Laury z jej domu do szkoły. Wymyśliła też nową jednostkę czasu – „szkolekcja”. Trwa ona tyle ile jedna lekcja w szkole – 45 minut. Laura umie jeździć na rowerze z prędkością 24 km/h. Teraz zastanawia się – jak szybko potrafi poruszać się na rowerze w doszkołach na szkolekcje?

Odpowiedź: 6

Rozwiązanie:
Laura może przebyć na swoim rowerze 24 kilometry w jedną godzinę. Skoro 3 kilometry to 1 doszkół, Laura może przebyć $24 : 3 = 8$ doszkołów w ciągu jednej godziny. Jednak jedna szkolekcja to tylko $\frac{3}{4}$ godziny. Jeśli Laura pokona 8 doszkołów w godzinę, to w trzy czwarte godziny (czyli jedną szkolekcję) pokona $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ doszkołów. Stąd Laura może jeździć na rowerze z prędkością 6 doszkołów na godzinę.

Zadanie 7 … Liczby zstępujące

Ola odkryła nowy rodzaj liczb całkowitych dodatnich – liczby zstępujące. Liczba zstępująca to dla Oli taka liczba całkowita dodania, że żadna z jej cyfr nie jest większa niż 2 i wszystkie jej cyfry ustawione są w porządku ściśle malejącym. Ile jest liczb zstępujących?

Odpowiedź: 6

Rozwiązanie: Rozważmy wszystkie możliwe wartości pierwszej cyfry. Jedyna liczba rozpoczynająca się od zera to 0. Nie jest ona jednak dodatnia, więc Ola ją pomija. Jeśli pierwszą cyfrą jest 1, możemy albo dopisać po jej prawej stronie zero, albo nie dopisywać nic. To daje nam rozwiązania 1 i 10. Jeśli pierwszą cyfrą jest 2, możemy po jej prawej stronie dopisać jeden i/lub zero. To daje nam rozwiązania 2, 20, 21, 210. Zatem istnieje $2 + 4 = 6$ liczb zstępujących.

Zadanie 8 … Dwa koła i dwie nogi

Marek i Mateusz postanowili się ścigać. Wybrali trasę o długości 3 km. Mateusz przebiegł całą trasę z równą prędkością 9 km/h. Marek jechał rowerem, więc żeby wyrównać szanse, wystartował 10 minut później. Marek przejechał całą trasę z prędkością 30 km/h i wygrał wyścig. Ile minut po Marku dotarł do mety Mateusz?

Odpowiedź: 4

Rozwiązanie:
Mateusz przebiegł 3 km z prędkością 9 km/h. To oznacza, że przebiegł trasę w $\frac{3\,\mathrm{km}}{9\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{min}$.

Marek jechał z prędkością 30 km/h, więc pokonanie trasy zajęło mu $\frac{3\,\text{km}}{30\,\text{km/h}} = \frac{1}{10}\,\text{h} = 6\,\text{min}$. Ponieważ dał Mateuszowi 10 minut zapasu, skończył 6 min + 10 min = 16 min po starcie Mateusza.
Tak więc Marek skończył wyścig 20 min − 16 min = 4 min wcześniej.

Zadanie 9 … Wizyta w teatrze

Mateusz zamówił bilety do teatru dla siebie i grupy przyjaciół. Zauważył, że wszystkie zarezerwowane przez niego siedzenia miały numer będący dwucyfrową liczbą pierwszą. Nie były to w dodatku zwyczajne dwucyfrowe liczby pierwsze. Gdyby Mateusz zamienił miejscami cyfry którejkolwiek z tych liczb, otrzymałby ponownie dwucyfrową liczbę pierwszą. Jaka jest największa możliwa liczba biletów zamówionych przez Mateusza?

Odpowiedź: 9

Rozwiązanie:
Czy numery zarezerwowanych siedzeń mogły zawierać którąkolwiek z cyfr 2, 4, 5, 6, 8 lub 0? Gdyby tak było, albo początkowo albo po zamianie cyfr miejscami liczba byłaby podzielna przez 2 lub 5. Dlatego numer żadnego z zarezerwowanych siedzeń nie zawiera tych cyfr. Numery te będą składały się tylko z cyfr 1, 3, 7 lub 9. Jest tylko 16 liczb spełniających ten warunek:

$$11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71, 73, 77, 79, 91, 93, 97, 99$$

Spośród tych liczb, złożone są: $33 = 3 \cdot 11$, $39 = 3 \cdot 13$, $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$, $93 = 3 \cdot 31$ oraz $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, te liczby musimy więc odrzucić. Musimy także odrzucić 19, ponieważ po zamianie jej cyfr dostajemy liczbę złożoną. Pozostają nam liczby:

$$11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97$$

Mateusz mógł więc kupić co najwyżej 9 biletów.

Zadanie 10 … Zjeżdżalnia

Na placu zabaw znajduje się zjeżdżalnia. Kiedy dziecko z niej zjeżdża, przesuwa się o 3 metry w kierunku poziomym i o 4 metry w dół. Zjazd zajmuje 2 sekundy. Jaka jest średnia prędkość zjeżdżania w metrach na sekundę?

Odpowiedź: 2,5

Rozwiązanie: Długość zjeżdżalni możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa. Wynosi ona $\sqrt{(3\,\text{m})^2 + (4\,\text{m})^2} = 5\,\text{m}$. Wiemy, że zjechanie ze ślizgawki zajmuje 2 s. Zatem zjeżdżające dziecko ma średnią prędkość $\frac{5\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 2{,}5\,\text{m/s}$.

Zadanie 11 … Ścieżka w ogrodzie

Krystyna ma prostokątny ogród o obwodzie wynoszącym 64 m. Chciałaby wyznaczyć w nim ścieżkę tak, by podzielić go na dwa przystające prostokąty. Może to jednak zrobić na dwa sposoby. Jeśli Krystyna wybierze jeden z tych sposobów, to ścieżka będzie miała 13 m długości. Jaka byłaby długość ścieżki w metrach, gdyby Krystyna wybrała drugi sposób wyznaczenia ścieżki?

Odpowiedź: 19

Rozwiązanie:
Prostokąt można podzielić na dwa mniejsze prostokąty tylko przez użycie odcinka równoległego do jednego z boków tego prostokąta. W takim wypadku odcinek ten będzie miał taką samą długość jak bok, do którego jest równoległy. Z treści zadania wiemy, że ogród to prostokąt o obwodzie 64 m, którego jeden z boków ma długość 13 m. Drugi z boków ma zatem długość b taką, że zachodzi $2 \cdot (13\,\text{m} + b) = 64\,\text{m}$. Z tego otrzymujemy $b = 32\,\text{m} - 13\,\text{m} = 19\,\text{m}$.
Z obserwacji z początku rozwiązania wynika, że bok o długości b musi mieć taką samą długość jak druga ścieżka dzieląca ogród na dwa przystające prostokąty. Zatem ścieżka ta ma długość 19 m.

Zadanie 12 … Z mądrej książki

Mateusz przeczytał w mądrej książce, że dwa obiekty o masach M_1 i M_2, których środki ciężkości znajdują się od siebie w odległości R, przyciągają się z siłą grawitacji $F_g = G\frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}$. W tej zależności G oznacza stałą grawitacyjną wynoszącą $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$. Przy użyciu tej zależności Mateusz stwierdził, że Ziemia przyciąga go z siłą o wartości 587 N. Jaka jest wartość siły grawitacyjnej w niutonach, z jaką Mateusz przyciąga Ziemię?

Odpowiedź: 587

Rozwiązanie:
Zastosujemy zasadę akcji i reakcji. Mówi ona, że jeśli jakiś obiekt A działa na inny obiekt B z pewną siłą F, to obiekt B działa na obiekt A z siłą o równej wartości i kierunku, ale przeciwnym zwrocie. W naszym zadaniu Ziemia przyciąga Mateusza siłą grawitacyjną o wartości 587 N. Mateusz musi więc działać na Ziemię równie dużą siłą grawitacyjną, a więc siłą o wartości 587 N.

Zadanie 13 … Jesteś u celu

Sabina jechała autostradą utrzymując stałą prędkość równą 120 km/h. W trakcie jazdy zrobiła sobie 30 minut przerwy, po czym dalej kontynuowała jazdę ze stałą prędkością 120 km/h. Kiedy Sabina dojechała do celu, obliczyła, że jej średnia prędkość podczas całej trasy wyniosła 100 km/h. Jaki dystans w kilometrach pokonała Sabina?

Odpowiedź: 300

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez s dystans, który pokonała Sabina. Gdyby nie zatrzymywała się w trakcie trasy, pokonanie tego dystansu zajęłoby jej $\frac{s}{120\,\mathrm{km/h}}$. Ze względu na to, że zrobiła sobie 30 minut przerwy, przebyła całą trasę w czasie $\frac{s}{120\,\mathrm{km/h}} + 0{,}5\,\mathrm{h}$. Właśnie z powodu tego postoju, średnia prędkość Sabiny na całej trasie wyniosła tylko 100 km/h. Prowadzi to do równania:

$$\begin{aligned}
s &= \left(\frac{s}{120\,\mathrm{km/h}} + 0{,}5\,\mathrm{h}\right) \cdot 100\,\mathrm{km/h} \\
s &= \frac{5}{6}s + 50\,\mathrm{km} \\
\frac{s}{6} &= 50\,\mathrm{km} \\
s &= 300\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

Zatem Sabina pokonała dystans 300 km.

Zadanie 14 … Źle zgadnięte

W ubiegłorocznym Náboju Junior wzięła udział czteroosobowa drużyna. Przed rozpoczęciem zawodów każdy z jej członków zgadywał, ile zadań rozwiążą jako zespół. Typowali 10, 14, 21 i 29 zadań. Po zakończeniu konkursu zorientowali się, że nikt nie odgadł prawidłowo. Ich typy różniły się od rzeczywistej liczby rozwiązanych zadań o 2, 5, 9 i 10 (w przypadkowej kolejności). Ile zadań w zeszłym roku rozwiązała ta drużyna?

Odpowiedź: 19

Rozwiązanie:
O 10 musiał się pomylić ktoś, kto typował największą lub najmniejszą liczbę. Gdyby była to osoba zgadująca najmniejszą liczbę, to liczba rozwiązanych zadań musiałaby wynosić $10 - 10 = 0$ albo $10 + 10 = 20$. Pierwsza opcja jest niepoprawna, bo w takim przypadku wszyscy inni myliliby się przynajmniej o 10. Druga opcja również jest niepoprawna, bo pozostałe osoby musiałyby mylić się o 6, 1 i 9, co nie zgadza się z wartościami podanymi w treści zadania.
Zatem to osoba typująca 29 musiała być tą, która pomyliła się o 10. Z analogicznego powodu jak w poprzednim przypadku, liczba rozwiązanych zadań nie może wynosić $29 + 10 = 39$, wynosi więc $29 - 10 = 19$. W tym przypadku pozostałe typy różnią się o 9, 5 i 2, co odpowiada wartościom podanym w treści zadania.

Zatem drużyna poprawnie rozwiązała 19 zadań.

Zadanie 15 ... Detektywi

Szóstka przyjaciół bawi się w detektywów i szpiegów. Jeden z nich został wybrany na detektywa i na chwilę wyszedł z pokoju. Pozostała piątka wybiera spośród siebie dwóch szpiegów. Szpiedzy zawsze kłamią, a wszyscy pozostali zawsze mówią prawdę. Detektyw wraca do pokoju i próbuje ustalić, kto jest szpiegiem. Piątka przyjaciół odpowiedziała mu w następujący sposób (liczba w nawiasie odpowiada numerowi gracza).
Ala (1): „Dominik to szpieg."
Bartek (2): „Celina nie jest szpiegiem."
Celina (4): „Bartek na pewno nie jest szpiegiem."
Dominik (8): „Edek nie jest szpiegiem."
Edek (16): „Bartek jest szpiegiem."
Jaka jest suma numerów szpiegów?

Odpowiedź: 24

Rozwiązanie:
Pomyślmy, co wynika z tego, gdy ktoś powie, że ktoś inny (nie) jest szpiegiem. Przykładowo, Ala twierdzi, że Dominik jest szpiegiem. Jeśli Ala mówi prawdę (czyli nie jest szpiegiem), Dominik jest szpiegiem. Jeśli Alia kłamie (czyli jest szpiegiem), Dominik nie jest szpiegiem. Oznacza to, że Ala i Dominik mają różne role – jedno z nich jest szpiegiem, a drugie nie. Teraz popatrzmy na stwierdzenie Bartka. Jeśli mówi prawdę (czyli nie jest szpiegiem) to Celina również nie jest szpiegiem. Jeśli jednak Bartek kłamie (czyli jest szpiegiem) to Celina też jest szpiegiem. Stąd Bartek i Celina muszą być po tej samej stronie – albo obydwoje są szpiegami, albo żadne z nich nie jest. Ponadto Dominik i Edek również mają tą samą rolę. Jeśli Ala byłaby szpiegiem, to jedna z par – Bartek i Celina lub Dominik i Edek także musiałaby być parą szpiegów. Wtedy mielibyśmy co najmniej troje szpiegów, co jest niemożliwe. Stąd Ala nie może być szpiegiem, a skoro twierdzi ona, że Dominik jest szpiegiem, to musi on nim być. Wiemy, że Dominik jest po stronie Edka, więc Edek również musi być szpiegiem.
Szpiegami są zatem Dominik i Edek, a suma ich numerów wynosi $8 + 16 = 24$.

Zadanie 16 ... Skompresowane zadanie

Marian chce przesłać plik z zadaniami na dysk tegorocznych zawodów Náboj Junior. Jego łącze pozwala na przesyłanie pliku z prędkością 1 MB/s. Przed rozpoczęciem przesyłania, postanowił skompresować plik. Kompresja każdych 4 MB pliku zajmuje 1 sekundę, jednak ostatecznie prowadzi do zmniejszenia rozmiaru całego pliku o połowę. Marian obliczył, że gdyby przesłał plik bez kompresji, zajęłoby mu to tyle samo czasu, co gdyby skompresował plik i zaczął przesyłać go 5 sekund po zakończeniu kompresji. Jaki jest rozmiar pliku w megabajtach?

Odpowiedź: 20

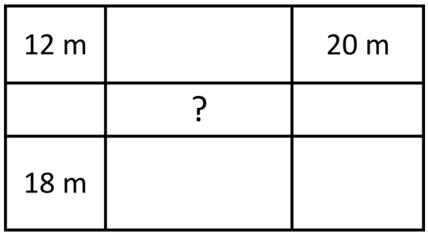
Rozwiązanie:
Oznaczmy przez x rozmiar pliku. Jeśli Marian prześle plik bez kompresji, zajmie mu to czas $\frac{x}{1\,\mathrm{MB/s}}$. Jeśli Marian postanowi skompresować plik, sama kompresja zajmie czas $\frac{x}{4\,\mathrm{MB/s}}$. Po kompresji, rozmiar pliku będzie wynosił $\frac{x}{2}$. Po 5 sekundach Marian zacznie przesyłać plik i sam przesył zajmie czas $\frac{x}{2\cdot 1\,\mathrm{MB/s}}$. W takim razie cały proces z kompresją zajmie czas $\frac{x}{4\,\mathrm{MB/s}} + 5\,\mathrm{s} + \frac{x}{2\cdot 1\,\mathrm{MB/s}}$. Treść zadania mówi, że ten czas jest równy czasowi przesyłu pliku bez kompresji. To prowadzi do równania, które jesteśmy w stanie rozwiązać:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1\,\mathrm{MB/s}} &= \frac{x}{4\,\mathrm{MB/s}} + 5\,\mathrm{s} + \frac{x}{2\cdot 1\,\mathrm{MB/s}} \\ 4x &= x + 20\,\mathrm{MB} + 2x \\ x &= 20\,\mathrm{MB} \end{aligned}$$

W takim razie rozmiar pliku wynosi 20 MB.

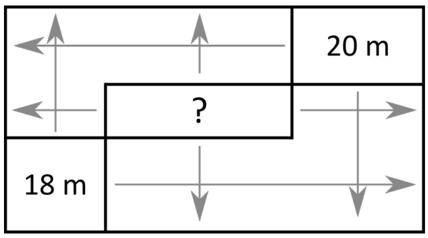
Zadanie 17 … 9 grządek

Ogródek Kasi ma kształt prostokąta, który składa się z 9 prostokątnych grządek oddzielonych małymi płotkami. Obwody niektórych grządek są pokazane na rysunku. Kasia chciałaby wymienić płotki ogradzające grządkę oznaczoną znakiem zapytania. Ile metrów płotka będzie potrzebować Kasia, jeśli obwód jej ogródka wynosi 64 m?



Odpowiedź: 26

Rozwiązanie: Zauważmy, że obwód ogródka jest równy sumie obwodów grządek o obwodach 18 m, 20 m i grządki zaznaczonej znakiem zapytania. Jest tak dlatego, że możemy przenieść długości niektórych boków tych trzech grządek, żeby w sumie stworzyły całą granicę ogródka:



Stąd wnioskujemy, że obwód grządki oznaczonej znakiem zapytania wynosi 64 m − 18 m − 20 m = 26 m.

Zadanie 18 … Niczym Filip z konopi

Adrian jechał samochodem o masie 1000 kg z prędkością 15 m/s. Nagle zauważył na swojej drodze zająca w odległości 50 m przed sobą. Aby uniknąć potrącenia dzikiego zwierzęcia, natychmiast zaczął hamować. Jaka jest minimalna siła hamowania, w niutonach, która pozwoli zatrzymać się przed zającem?

Odpowiedź: 2250

Rozwiązanie:
Im wcześniej Adrian zacznie hamować, tym mniej siły hamowania będzie potrzebował. Załóżmy, że auto zaczyna hamować w odległości $s = 50\,\mathrm{m}$. Aby zatrzymać samochód, auto musi wykonać pracę w celu przezwyciężenia siły hamowania kosztem swojej energii, w tym przypadku energii kinetycznej.
Energia kinetyczna auta o masie $m = 1000\,\mathrm{kg}$ oraz prędkości $v = 15\,\mathrm{m/s}$ wynosi $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Praca o tej samej wielkości musi zostać wykonana przez siłę o wielkości F, którą auto przezwycięża siłę hamowania o tej samej wielkości. Ta siła wykonuje na dystansie s pracę $W = Fs$. To prowadzi do równania:

$$W = E_k$$
$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$
$$F = \frac{mv^2}{2s}$$

W takim razie, siła hamowania działająca na auto musi mieć wielkość co najmniej:

$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{1000\,\mathrm{kg}(15\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 50\,\mathrm{m}} = 2250\,\mathrm{N}$$

Zadanie 19 … Drogi zakup

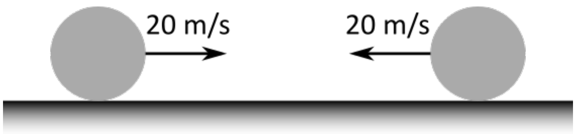
W Zjednoczonym Królestwie Náboj używa się jedynie monet o nominałach 3 i 13. Pewnego dnia, Magda udała się do sklepu na zakupy. Przy kasie, zdała sobie sprawę z tego, że nieważne ile monet w obu nominałach miałaby w portfelu, nie byłaby w stanie zapłacić za swoje zakupy w taki sposób, by kasjer nie musiał wydawać jej reszty. Jaka jest największa możliwa wartość zakupów Magdy?

Odpowiedź: 23

Rozwiązanie:
Nie da się za pomocą dostępnych nominałów uzbierać kwoty 23. Musielibyśmy w tym celu użyć 0 lub 1 monety o wartości 13. W obu przypadkach, nie da się pozostałej kwoty zapłacić tylko za pomocą monet o wartości 3. Jesteśmy jednak w stanie zapłacić dowolną kwotę większą niż 23. Zacznijmy od kwoty 24 $(3+3+3+3+3+3+3+3)$, 25 $(13+3+3+3+3)$ oraz 26 $(13+13)$. Skoro jesteśmy w stanie zapłacić te trzy kwoty, możemy też uzbierać dowolną większą kwotę, potrzebujemy tylko wystarczająco dużo monet o nominale 3.
W takim razie największa możliwa wartość zakupów Magdy wynosi 23.

Zadanie 20 … Modelina

Dwie identyczne kule z modeliny ślizgały się po poziomej powierzchni. Podczas zderzenia połączyły się ze sobą, tworząc zwarty obiekt. Początkowo każda z kul miała masę 200 g. Ponadto, przez zderzeniem każda z kul poruszała się w kierunku drugiej z prędkością 20 m/s i miała temperaturę 20 °C. Jaką temperaturę w stopniach Celsjusza miała powstała modelinowa masa, gdy temperatura się ustablilizowała? Możesz założyć, że całe ciepło wytworzone przez zderzenie zostało zużyte na rozgrzanie masy.



Odpowiedź: 20,25

Rozwiązanie:
Cała konfiguracja jest symetyczna względem osi znajdującej się pomiędzy kulami. Pozostanie ona symetryczna nawet po zderzeniu, gdy kule stworzą większą masę. Gdyby masa po zderzeniu zaczęła poruszać się w lewo lub w prawo, konfiguracja przestałaby być symetryczna. Możemy więc wywnioskować, że masa powstała po zderzeniu kul nie będzie się już poruszała.
Po zderzeniu kule tracą całą swoją energię kinetyczną, która zgodnie z założeniem zadania przekształca się w ciepło. To ciepło przepływa do powstałej masy, ogrzewając ją. Każda z kul (o masie $m = 200\,\mathrm{g}$ i szybkości $v = 20\,\mathrm{m/s}$) ma energię kinetyczną $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Ich łączna energia kinetyczna wynosi zatem $2E_k = mv^2$. Ta energia jest dostarczana modelinowej masie w formie ciepła. Ma ona masę $2m$ (bo składa się z dwóch kul o masie m), ciepło właściwe $c = 800\,\mathrm{J/(kg\,°C)}$, a jej temperatura zmieni się o Δt. Stąd mamy:

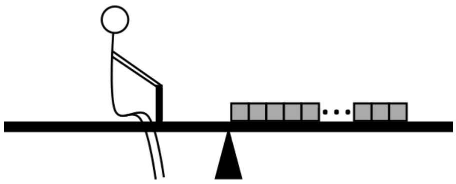
$$c \cdot 2m \cdot \Delta t = mv^2$$
$$\Delta t = \frac{v^2}{2c}$$

Jeśli temperatura kul przed zderzeniem wynosiła $t = 20\,°\mathrm{C}$, to temperatura masy po zderzeniu wyniesie:

$$t + \Delta t = t + \frac{v^2}{2c} = 20\,°\mathrm{C} + \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 800\,\mathrm{J/(kg\,°C)}} = 20{,}25\,°\mathrm{C}$$

Zadanie 21 … Równowaga z sześcianów

Daniel zbudował huśtawkę w swoim ogrodzie. Huśtawka miała bardzo długą, ale i bardzo lekką deskę. Daniel waży 50 kg i siedzi w odległości 40 cm od punktu obrotu huśtawki. Przyjaciółka Daniela, Nina, zaczęła kłaść sześciany o masie 1 kg i długości krawędzi 10 cm po drugiej stronie huśtawki. Pierwszy z sześcianów położyła tak, aby jedna z jego ścian znajdowała się dokładnie nad punktem obrotu huśtawki, następne sześciany kładła zaś bezpośrednio obok (patrz rysunek). Po położeniu pewnej liczby sześcianów, huśtawka znalazła się w stanie idealnej równowagi. Ile sześcianów położyła Nina?



Odpowiedź: 20

Rozwiązanie: Aby zrównoważyć huśtawkę, momenty sił działające na obie jej strony muszą być równe. Daniel ma masę $m = 50$ m i siedzi w odległości $r = 40$ cm od punktu obrotu huśtawki. Na Daniela działa siła ciężkości $F_g = mg$. Daniel działa na huśtawkę siłą o tej samej wartości, co daje moment siły:

$$M_1 = Gr = mgr$$

Sześciany po drugiej stronie huśtawki muszą łącznie działać z momentem siły o tej samej wartości. Załóżmy, że jest n sześcianów. W treści podano, że każdy sześcian ma masę $m_0 = 1$ kg oraz bok długości $a = 10$ cm. Ich środek ciężkości jest w odległości $\frac{na}{2}$ od punktu obrotu huśtawki. Jest to punkt, w którym siła ciężkości działa na huśtawkę. Moment siły działający na huśtawkę z drugiej strony wynosi więc:

$$M_2 = nm_0g\frac{na}{2} = n^2\frac{m_0ga}{2}$$

Momenty sił M_1 i M_2 muszą być równe. Dostajemy:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ mgr &= n^2\frac{m_0ga}{2} \\ n^2 &= \frac{2mr}{m_0a} \\ n &= \sqrt{\frac{2mr}{m_0a}} \end{aligned}$$

Więc liczba sześcianów położonych przez Ninę to:

$$n = \sqrt{\frac{2mr}{m_0a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 40\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{cm}}} = \sqrt{400} = 20$$

Zadanie 22 … Pierwsze bliźniaki

Zuza ma 8 kart na których znajdują się cyfry. Te cyfry to odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 9. Zuza chce użyć tych kart do stworzenia dwucyfrowych liczb pierwszych, przy czym każdej z kart chce użyć do stworzenia dokładnie jednej liczby pierwszej. Zuza chciałaby też, żeby suma tak powstałych liczb była jak największa. Jaka jest największa możliwa wartość tej sumy?

Odpowiedź: 190

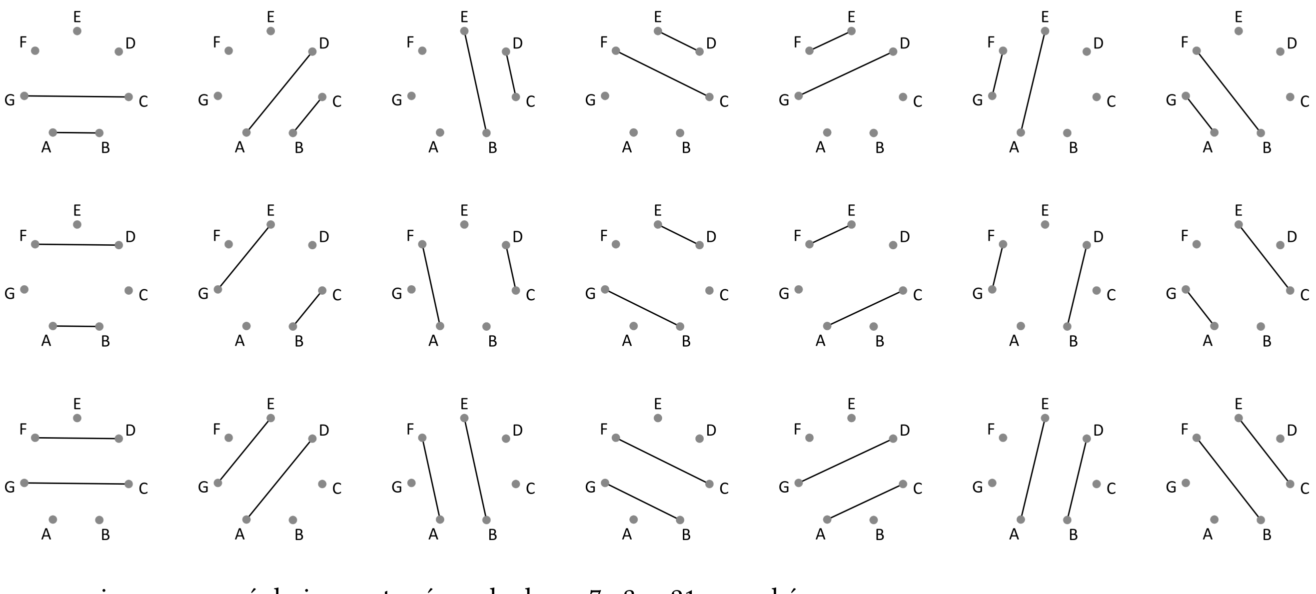
Rozwiązanie:
Rozważmy cyfry, które mogą stanowić cyfry jedności. Cyfry 2, 4 i 6 nie mogą znajdować się na końcu, bo wtedy powstałe liczby byłyby podzielne przez 2, a więc nie byłyby pierwsze. Podobnie, 5 też nie może być ostatnią cyfrą, bo wtedy tworzona przez nią liczba byłaby podzielna przez 5. Stąd wnioskujemy, że cyfry 2, 4, 5 i 6 będą cyframi dziesiątek, a pozostałe cyfy (1, 3, 7 i 9) będą cyframi jedności. Stąd jedyna możliwa, a więc i maksymalna suma utworzonych liczb pierwszych musi być równa $20 + 40 + 50 + 60 + 1 + 3 + 7 + 9 = 190$.
Uwaga: Przy użyciu tych kart naprawdę da się stworzyć cztery liczby pierwsze, na przykład: 23, 41, 59 *i* 67.

Zadanie 23 … Teresa i linie

Teresa narysowała na papierze okrąg i zaznaczyła na nim 7 punktów będących wierzchołkami siedmiokąta foremnego. Chciałaby teraz narysować dwie proste tak, aby każda z nich przechodziła przez dokładnie dwa z zaznaczonych punktów. Jednocześnie nie chce, aby narysowane proste miały jakiekolwiek punkty wspólne. Na ile sposobów Teresa może narysować takie dwie proste?

Odpowiedź: 21

Rozwiązanie:
Dwie proste na płaszczyźnie, które się nie przecinają, są równoległe. Szukamy więc liczby par prostych równoległych, przechodzących przez wierzchołki siedmiokąta foremnego.
Oznaczmy zaznaczone punkty jako A, B, C, D, E, F i G. Znajdźmy teraz wszystkie proste równoległe do AB, przechodzące przez pewne dwa wyznaczone punkty. Są to proste wyznaczane przez CG i DF. Wynika to z faktu, że siedmiokąt foremny $ABCDEFG$ jest symetryczny względem symetralnej odcinka AB. Z tej symetrii wynika, że proste AB, CG i DF są prostopadłe do symetralnej odcinka AB, a więc są parami równoległe. W ten sposób znajdujemy 3 pary prostych równoległych.
Powtarzając to samo rozumowanie dla BC, CD, DE, EF, FG i AG dostajemy w każdym przypadku po 3 kolejne pary prostych równoległych.
Każda prosta przechodząca przez któreś dwa z punktów od A do G jest równoległa do dokładnie jednego z odcinków AB, BC, CD, DE, EF, FG i AG (odcinki te są do siebie parami nierównoległe). Zatem rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe przypadki.



Teresa może narysować dwie proste równoległe na $7 \cdot 3 = 21$ sposobów.

Zadanie 24 … Serw

Iga gra w tenisa piłką o masie 60 g. Wyrzuciła piłkę prosto w górę z wysokości 1 m z prędkością 4 m/s i pozwoliła jej upaść na ziemię. Jaka była prędkość piłki, w metrach na sekundę, zaraz przed uderzeniem w ziemię?

Odpowiedź: 6

Rozwiązanie:
Energia potencjalna piłki w chwili podrzucenia wyniosła $E_p = mgh$, gdzie $m = 60\,\mathrm{g}$ to masa piłeczki, $h = 1\,\mathrm{m}$ to wysokość, z jakiej Iga ją wyrzuciła, a g to przyspieszenie ziemskie. Jeśli oznaczymy $v = 4\,\mathrm{m/s}$, to energia kinetyczna piłki w chwili rzucania wyniosła $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Całkowita energia piłki była zachowana przez cały czas trwania ruchu, więc wartość $E_p + E_k$ była w każdej chwili stała, również zaraz przed tym, gdy piłka uderzyła w ziemię. W tej chwili piłka znajdowałą się na wysokości zero, więc miała zerową energię potencjalną. Stąd cała jej energia musiała być równa jej energii kinetycznej. Jeśli oznaczymy tą energię kinetyczną przez u, otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} mgh + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mu^2 \\ gh + \frac{1}{2}v^2 &= \frac{1}{2}u^2 \\ 2gh + v^2 &= u^2 \\ u &= \sqrt{v^2 + 2gh} \end{aligned}$$

Stąd prędkość piłki tuż przed wylądowaniem to:

$$u = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{(4\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{m}} = 6\,\mathrm{m/s}$$

Zadanie 25 … Niefortunne znalezisko

Jonasz znalazł wszystkie liczby naturalne, które mają taką własność, że są równe sumie swoich cyfr pomnożonej przez 13. Ile wynosi suma liczb znalezionych przez Jonasza?

Odpowiedź: 468

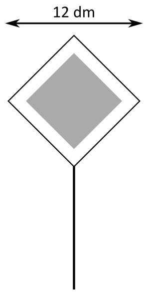
Rozwiązanie:
Jedyną liczbą jednocyfrową, która jest równa 13-krotności sumy swoich cyfr, jest 0. Niezależnie od tego, czy potraktujemy 0 jako liczbę naturalną (a jest to kwestia kontrowersyjna w różnych dziedzinach matematyki), czy nie, nie wpłynie to na sumę liczb znalezionych przez Jonasza.
Jeśli Jonasz znalazłby dwucyfrową liczbę o zadanej własności, moglibyśmy zapisać ją w formie $10A + B$, gdzie A i B to jej cyfry. Jednak 13-krotność sumy jej cyfr wyniosłaby $13(A + B)$, a zachodzi $13(A + B) = 13A + 13B > 10A + B$. To prowadzi do wniosku, że Jonasz nie mógł znaleźć żadnej liczby dwucyfrowej.
Dalej rozważmy liczby trzycyfrowe. Każda z nich może zostać zapisana jako $100A + 10B + C$ gdzie $A \geq 1$. Warunek dotyczący sumy cyfr prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned} 100A + 10B + C &= 13A + 13B + 13C \\ 87A &= 3B + 12C \\ 29A &= B + 4C \end{aligned}$$

Jeśli $A = 1$, to otrzymujemy trzy możliwe wartości cyfr B i C. Tymi możliwymi wartościami par (B, C) są $(1, 7)$, $(5, 6)$ oraz $(9, 5)$, co odpowiada liczbom 117, 156 i 195. Okazuje się, że nie mamy innych możliwości na wartość cyfry A, ponieważ $A \geq 1$ oraz dla $A \geq 2$ otrzymalibyśmy $29A \geq 58$, co przeczyłoby równaniu, gdyż $B + 4C \leq 9 + 4 \cdot 9 = 45$. W takim razie nie znajdziemy więcej opcji dla liczb trzycyfrowych.
Liczba czterocyfrowa ma sumę cyfr równą co najwyżej $4 \cdot 9 = 36$, więc trzynastokrotność sumy jej cyfr na pewno będzie mniejsza niż $13 \cdot 36 < 20 \cdot 50 = 1000$ (oczywiście moglibyśmy także policzyć ile wynosi $13 \cdot 36$, ale nawet takie luźne szacowanie wystarcza nam do wysnucia potrzebnego wniosku). W takim razie, można powiedzieć, że 13-krotność sumy cyfr na pewno nie będzie liczbą czterocyfrową. Z tego wnioskujemy, że Jonasz nie mógł znaleźć żadnej czterocyfrowej liczby. Ten sam argument można zaaplikować dla liczb o większej liczbie cyfr.
Podsumowując, suma liczb znalezionych przez Jonasza wyniosła $117 + 156 + 195 = 468$.

Zadanie 26 … Droga z pierwszeństwem

Kuba prowadził swój samochód, gdy zauważył znak „droga z pierwszeństwem”. Od razu zadał sobie pytanie: jeśli szerokość kwadratowego znaku wynosi 12 dm, a żółta część zajmuje $\frac{8}{9}$ powierzchni znaku, to jaka jest długość boku żółtego kwadratu w decymetrach?



Odpowiedź: 8

Rozwiązanie:
Obydwie przekątne kwadratu mają tę samą długość i są do siebie prostopadłe. Wiemy, że długość przekątnej znaku wynosi 12 dm. Każda z przekątnych dzieli kwadrat na dwa trójkąty, których wysokością jest połowa drugiej przekątnej. Taki trójkąt ma pole $12\,\mathrm{dm} \cdot 6\,\mathrm{dm} : 2 = 36\,\mathrm{dm}^2$. Cały znak składa się z dwóch takich trójkątów, więc ma pole $2 \cdot 36\,\mathrm{dm}^2 = 72\,\mathrm{dm}^2$.
Żółta część stanowi $\frac{8}{9}$ całego znaku, więc jej pole wynosi $\frac{8}{9} \cdot 72\,\mathrm{dm}^2 = 64\,\mathrm{dm}^2$. Stąd bok kwadratu ma długość $\sqrt{64\,\mathrm{dm}^2} = 8\,\mathrm{dm}$.

Zadanie 27 … Zabawa na ruchomym chodniku

Beata poleciała do Słowenii. Na hali lotniska zauważyła ruchomy chodnik i postanowiła zmierzyć jego parametry. Jeśli Beata stanie na jednym końcu chodnika, dotarcie na drugi koniec zajmie jej 30 s. Jeśli zaś będzie szła obok chodnika, przejście tej samej trasy zajmie jej 20 s. Beata postanowiła teraz przejść po chodniku w kierunku zgodnym z ruchem chodnika, a następnie w kierunku przeciwnym do jego ruchu. O ile sekund dłużej zajmie Beacie przejście chodnika w kierunku przeciwnym do jego ruchu niż przejście go zgodnie z kierunkiem ruchu?

Odpowiedź: 48

Rozwiązanie: Niech d oznacza długość ruchomego chodnika. Możemy wyznaczyć prędkość chodnika ruchomego. Przejechanie z z jednego końca chodnika na drugi zajęło Beacie $t_1 = 30\,\mathrm{s}$, czyli prędkość taśmy chodnika wynosi $v_{chodnika} = \frac{d}{t_1}$. Podobnie możemy wyznaczyć prędkość chodzenia Beaty. Skoro przejście tej trasy zajęło Beacie $t_2 = 20\,\mathrm{s}$, jej prędkość wynosi $v_{Beaty} = \frac{d}{t_2}$.
Kiedy Beata idzie po chodniku w kierunku przeciwnym do jego ruchu, porusza się z prędkością $v_{Beaty} - v_{chodnika}$. Tak więc dojście na drugi koniec chodnika zajmie:

$$t_3 = \frac{d}{v_{Beaty} - v_{chodnika}} = \frac{d}{\frac{d}{t_2} - \frac{d}{t_1}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} = \frac{30\,\mathrm{s} \cdot 20\,\mathrm{s}}{30\,\mathrm{s} - 20\,\mathrm{s}} = 60\,\mathrm{s}$$

Gdy natomiast Beata idzie zgodnie z kierunkiem ruchu chodnika, porusza się z prędkością $v_{Beaty} + v_{chodnika}$. Tym razem przejście całego chodnika zajmie:

$$t_4 = \frac{d}{v_{Beaty} + v_{chodnika}} = \frac{d}{\frac{d}{t_2} + \frac{d}{t_1}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{30\,\mathrm{s} \cdot 20\,\mathrm{s}}{30\,\mathrm{s} + 20\,\mathrm{s}} = 12\,\mathrm{s}$$

Zatem odpowiedź wynosi:

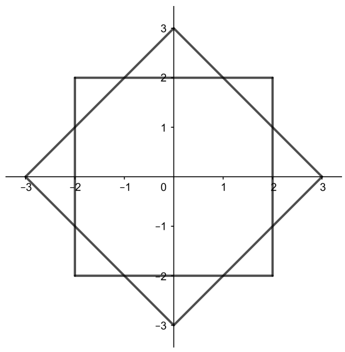
$$t_3 - t_4 = 60\,\mathrm{s} - 12\,\mathrm{s} = 48\,\mathrm{s}$$

Zadanie 28 … Bezwzględnie maksymalna radocha

Michalina narysowała dwa zbiory A i B. W zbiorze A umieściła wszystkie punkty (x, y) płaszczyzny, dla których $|x| + |y| = 3$. W zbiorze B umieściła zaś wszystkie punkty (x, y), dla których $\max\{|x|, |y|\} = 2$. Ile punktów należy zarówno do zbioru A, jak i do zbioru B?
Uwaga: Wyrażenie $|a|$ jest równe a, jeśli $a \geq 0$ oraz jest równe $-a$, jeśli $a < 0$. Wyrażenie $\max\{a, b\}$ jest równe większej liczbie spośród liczb a i b.

Odpowiedź: 8

Rozwiązanie:
Najpierw spróbujmy zrozumieć, jak wyglądają zbiory A i B. Wyrażenie $|a|$, zwane także wartością bezwględną, jest tak naprawdę równe odległości liczby a od 0 na osi liczbowej. Może nie jest to natychmiastowo widoczne z definicji tego wyrażenia z treści zadania, ale wartość bezwględna po prostu usuwa znak liczby a. Rozważmy wyrażenie $|x| + |y|$. Jeśli $x \geq 0$ oraz $y \geq 0$, to $|x| + |y| = x + y$. Zależność $|x| + |y| = 3$ jest wtedy równoważna $x + y = 3$, czyli $y = 3 - x$. Widzimy więc, że punkty spełniające tę zależność tworzą prostą przechodzącą przez punkty $(3, 0)$ oraz $(0, 3)$. Musimy jednak pamiętać, że założyliśmy warunek $x \geq 0$ oraz $y \geq 0$, dlatego musimy przyciąć tę prostą tak, by pozostawić jedynie jej fragment znajdujący się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. W ten sposób dostajemy odcinek łączący punkty $(3, 0)$ i $(0, 3)$ na płaszczyźnie. Jeżeli rozważymy pozostałe przypadki znaków x i y (łącznie jest ich 4), dostaniemy sumarycznie, że zbiór A składa się z odcinków łączących $(3, 0)$ i $(0, 3)$, $(0, 3)$ i $(-3, 0)$, $(-3, 0)$ i $(0, -3)$ oraz $(0, -3)$ i $(3, 0)$. Odcinki te tworzą na płaszczyźnie kwadrat o wierzchołkach w punktach $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$ oraz $(-3, 0)$.
Teraz przeanalizujmy zbiór B. Opisuje go relacja $\max\{|x|, |y|\} = 2$. Ta funkcja, zwana *maksimum*, zwraca liczbę większą spośród $|x|$ oraz $|y|$. Aby funkcja ta zwróciła 2, co najmniej jedna z liczb $|x|$ i $|y|$ musi być równa 2, zaś druga musi być **niewiększa** niż 2. Jeśli $|x| = 2$, to $x = 2$ lub $x = -2$. W tym przypadku musi zachodzić $|y| \leq 2$, czyli $-2 \leq y \leq 2$. Dla $x = 2$, warunek ten jest spełniony dla punktów na odcinku łączącym punkty $(2, 2)$ oraz $(2, -2)$, zaś dla $x = -2$, warunek zachodzi dla punktów na odcinku łączącym punkty $(-2, 2)$ oraz $(-2, -2)$. Możemy powtórzyć to rozumowanie dla $|y| = 2$. To dodaje nam do zbioru B odcinki łączące punkty $(-2, 2)$ z $(2, 2)$ oraz $(-2, -2)$ z $(2, -2)$. W takim razie, zbiór B także jest kwadratem, ale tym razem o wierzchołkach $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ oraz $(2, -2)$.
Zbiory A oraz B zostały przedstawione na rysunku:



Z rysunku łatwo odczytać, że kwadraty odpowiadające zbiorom A i B przecinają się w dokładnie 8 punktach płaszczyzny. W takim razie liczba punktów należąca do obu zbiorów jednocześnie jest równa 8.

Zadanie 29 … Obwód Alektryczny

Alek bawi się wieloma opornikami o oporze elektrycznym $3\,\Omega$. Stworzył obwód elektryczny składający się z dwóch równoległych gałęzi w taki sposób, że na obu gałęziach znajduje się pewna liczba oporników połączonych szeregowo. Alek zauważył, że opór całego obwodu jest 10-krotnie mniejszy niż opór prawej gałęzi. Ile razy więcej oporników znajduje się na prawej gałęzi niż na lewej gałęzi?

Odpowiedź: 9

Rozwiązanie: Załóżmy, że na prawej gałęzi znajduje się a oporników, zaś na lewej jest ich b. Musimy policzyć $\frac{a}{b}$. Łączny opór oporników na prawej gałęzi jest równy aR, gdzie $R = 3\,\Omega$ to opór jednego opornika. Oporniki na lewej gałęzi mają łączny opór bR. Wtedy opór całego obwodu R' jest równy:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{aR} + \frac{1}{bR}$$
$$R' = \frac{abR^2}{aR + bR} = \frac{ab}{a+b}R$$

Treść zadania mówi, że opór R' całego obwodu jest 10-krotnie mniejszy niż opór aR oporników na prawej gałęzi. To daje nam równanie, z którego możemy wyliczyć $\frac{a}{b}$:

$$10R' = aR$$
$$10\frac{ab}{a+b}R = aR$$
$$10\frac{b}{a+b} = 1$$
$$10b = a + b$$
$$9b = a$$
$$\frac{a}{b} = 9$$

W takim razie na prawej gałęzi jest 9 razy więcej oporników niż na lewej gałęzi.

Zadanie 30 … Podłużny kamień

Marianna znalazła bardzo intrygujący kamień o masie 5 kg. Miał on kształt podłużnego graniastosłupa prostego o podstawie, która była trójkątem równobocznym o wysokości 60 cm. Kamień leżał na swojej podłużnej ścianie oraz był jednorodny, co oznacza że gęstość kamienia była w jego każdym punkcie taka sama. Marianna zaczęła pchać go w stronę swojego domu, jednak natrafiła na murek siegający 2 m ponad środek ciężkości kamienia. Marianna musi podnieść kamień i umieścić go na murku. Jaką minimalną pracę (w dżulach) musi ona wykonać w celu podniesienia kamienia na odpowiednią wysokość?

Odpowiedź: 110

Rozwiązanie:
Marianna wykona pracę w celu podniesienia kamienia o masie $m = 5\,\mathrm{kg}$ na taką wysokość, by cały kamień znalazł się ponad murkiem. W takim razie, musimy obliczyć, jaka jest najmniejsza wysokość na jaką musimy podnieść środek masy kamienia.
Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą jego środkową w stosuku $2 : 1$, przy czym dłuższa część znajduje się bliżej wierzchołka, z którego jest poprowadzona. W trójkącie równobocznym, każda środkowa jest także jego wysokością, co oznacza, że środkowa ma długość 60 cm. Odległość środka ciężkości trójkąta od dowolnego jego boku jest wtedy równa $60\,\mathrm{cm} : 3 = 20\,\mathrm{cm}$. To oznacza, że środek ciężkości trójkąta znajduje się w odległości co najmniej 20 cm od dowolnego punktu na boku trójkąta.
W pierwszym momencie, w którym kamień znajdzie się w całości ponad murkiem, będzie istniał punkt należący do trójkąta będącego podstawą kamienia, który będzie znajdował się na wysokości równej dokładnie wysokości murku (w innym wypadku moglibyśmy obniżyć lekko kamień i Marianna wykonałaby mniej pracy). Punkt ten jest odległy o co najmniej 20 cm od środka ciężkości podstawy. Oznacza to, że musimy podnieść środek ciężkości podstawy (więc także środek masy kamienia) na wysokość co najmniej 20 cm powyżej murku. Z drugiej strony, taka wysokość wystarczy nam do postawienia kamienia na murku: należy podnosić kamień tak, by jedna z jego podłużnych ścian była cały czas równoległa do powierzchni na szczycie murku.
Oznacza to, że Marianna musi podnieść kamień na wysokość 2 m, by zrównać wysokość środka masy ze szczytem murku, a następnie zwiększyć jego wysokość o dodatkowe 20 cm by cały kamień znalazł się ponad murkiem. Sumarycznie należy podnieść środek masy o $\Delta h = 2\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{cm} = 2{,}2\,\mathrm{m}$, co oznacza, że zwiększymy energię potencjalną kamienia o $\Delta E_p = mg\Delta h = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 2{,}2\,\mathrm{m} = 110\,\mathrm{J}$. Marianna wykona pracę równą dokładnie przyrostowi energii potencjalnej kamienia, czyli ΔE_p. W takim razie Marianna wykona pracę równą 110 J.

Zadanie 31 … Arytmetyka

Andrzej zapisał na tablicy dwie różne, jednocyfrowe, nieujemne liczby całkowite. Zapisał także ich sumę oraz ich dodatnią różnicę. Zauważył, że jest w stanie ustawić wszystkie cztery zapisane przez siebie liczby w takiej kolejności, by stworzyły one ciąg arytmetyczny. Na ile sposobów Andrzej mógł wybrać parę zapisanych na początku liczb?
Uwaga: Ciąg zwany jest arytmetycznym, jeśli dowolne dwa kolejne wyrazy tego ciągu mają tę samą różnicę. Na przykład ciąg $3, 7, 11, 15$ *jest arytmetyczny (różnica każdych kolejnych dwóch wyrazów jest równa* 4*), zaś ciąg* $1, 6, 10, 15$ *nie jest arytmetyczny (różnica jest równa czasem* 4*, a czasem* 5*).*

Odpowiedź: 3

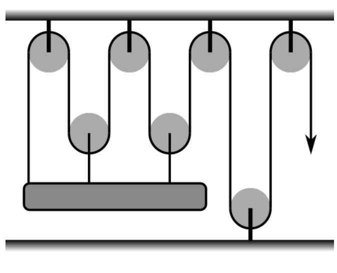
Rozwiązanie:
Załóżmy, że liczby zapisane przez Andrzeja to A i B oraz $A > B$ (w innym wypadku możemy po prostu zamienić liczby nazwami). Wtedy dwie dopisane przez niego liczby to $A + B$ oraz $A - B$. Rozważmy przypadek, kiedy $B = 0$. Wtedy liczby na tablicy to A, 0, A, A. Nieważne w jakiej kolejności ustawimy te liczby, znajdziemy dwa sąsiednie wyrazy równe A oraz A. W takim razie jeśli ciąg ten miałby być arytmetyczny, to jego różnica musi być równa 0. Znajdziemy także zawsze dwa sąsiednie wyrazy A i 0, a skoro różnica jest równa 0, to $A = 0$. Taki przypadek nie może zajść, bo wiemy, że A jest różne od B.
Możemy więc założyć, że zapisane liczby są różne od 0, czyli $A > B > 0$. Wtedy, z całą pewnością, największą liczbą zapisaną na tablicy będzie $A + B$, a drugą największą będzie A. Ponieważ liczby w ciągu arytmetycznym muszą stale rosnąć lub stale maleć, liczby $A + B$ oraz A muszą być dwoma sąsiadującymi wyrazami ciągu. W takim razie, dowolne dwa sąsiednie wyrazy muszą różnić się o $(A + B) - A$, czyli B. W takim razie, trzecią liczbą w ciągu musi być $A - B$, czyli liczba o B mniejsza od A. Ostatnia liczba to B, która musi być mniejsza o B od $A - B$. To daje nam warunek:

$$(A - B) - B = B$$
$$A = 3B$$

Jeśli Andrzej wybierze liczby B oraz $3B$ na początku, po zapisaniu ich sumy i różnicy, otrzyma ciąg arytmetyczny B, $2B$, $3B$, $4B$. Ostatnia rzecz, jaką musimy obliczyć, to ile par liczb $A = 3B$ oraz B to jednocyfrowe liczby. Łatwo sprawdzić, że para (A, B) musi być równa $(3, 1)$, $(6, 2)$ lub $(9, 3)$. W takim razie Andrzej miał trzy sposoby na wybranie początkowych liczb.

Zadanie 32 … Wielokrążek

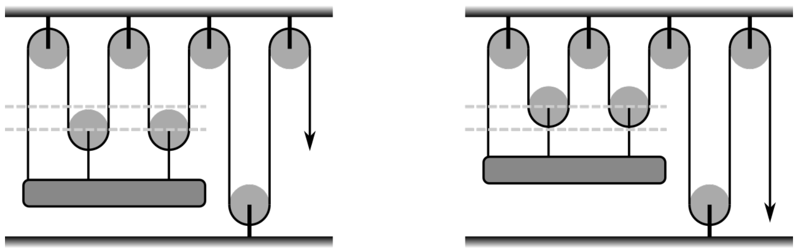
Justyna znalazła na strychu intrygujący system krążków, taki jak przedstawiono na rysunku. Zaciekawiona tym urządzeniem, zaczęła ciągnąć sznurek w kierunku wskazywanym przez strzałkę ze stałą prędkością 20 cm/s. Znajdź prędkość, w centrymetrach na sekundę, z jaką zaczął podnosić się podłużny odważnik przyczepiony do wielokrążka.



Odpowiedź: 4

Rozwiązanie:
Po pociągnięciu za sznurek, ruchome krążki będą poruszać się wraz z odważnikiem w górę. W trakcie tego procesu część liny przewiniętej przez krążki zniknie, bo będziemy przeciągać ją rękami. Obrazek pokazuje, co dzieje się gdy krążki unoszą się od dolnej przerywanej linii do górnej przerywanej linii – równe części sznurka znikają na pięciu odcinkach znajdujących się pomiędzy tymi liniami. Jeśli udało się nam przeciągnąć fragment sznurka o pewnej długości, odważnik i krążki unoszą się w taki sposób, że spomiędzy wspomnianych linii znikają fragmenty sznurka o łącznej długości równej tej części sznurka, którą przeciągneliśmy. Stąd odważnik porusza się w górę o jedną

piątą długości fragmentu sznurka, który przeciągnęliśmy. Jeśli ciągniemy za sznurek ze stałą prędkością 20 cm/s, to odważnik jest podnoszony z prędkością $\frac{20\,\mathrm{cm/s}}{5} = 4\,\mathrm{cm/s}$.



Zadanie 33 … Największy

Tomasz napisał parę liczb naturalnych. Powiedział nam, że iloczyn tych liczb wynosi 37800, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność jest 42 razy większa od ich największego wspólnego dzielnika. Dodatkowo, para Tomasza ma największą sumę spośród wszystkich spełniających powyższe warunki. Ile wynosi ta suma?

Odpowiedź: 1290

Rozwiązanie: Przypomnijmy, w jaki sposób obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność i największy wspólny dzielnik dwóch liczb. Najpierw musimy znaleźć rozkład każej z nich na czynniki pierwsze. Następnie, każdę liczbę pierwszą podnosimy do większej z potęg, w których ta liczba pierwsza występuje w rozkładach na czynniki pierwsze dwóch rozważanych liczb. Iloczyn tych potęg to najmniejsza wspólna wielokrotność naszych dwóch liczb. Podobnie obliczamy największy wspólny dzielnik, tylko tym razem każdą liczbę pierwszą podnosimy do mniejszej z odpowiednich potęg. Wynika stąd dobrze znana tożsamość $\mathrm{NWW}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(a, b) = a \cdot b$. Niech teraz a i b będą dwoma liczbami spełniającymi warunki Tomasza. Mamy dla nich równości $a \cdot b = 37800$ oraz $\mathrm{NWW}(a, b) = 42 \cdot \mathrm{NWD}(a, b)$. Łącząc je z wcześniej uzyskanymi równościami mamy:

$$\begin{aligned} 42 \cdot \mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(a, b) &= 37800 \\ \mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(a, b) &= 900 \\ \mathrm{NWD}(a, b) &= 30 \end{aligned}$$

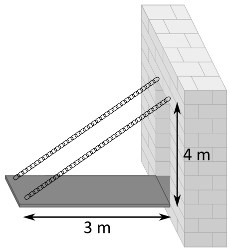
W związku z tym obie liczby a i b są wielokrotnościami 30, więc można je zapisać w postaci $a = 30A$ i $b = 30B$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich A, B. Żeby znaleźć największą możliwą wartość $a + b = 30(A + B)$ musimy znaleźć największą możliwą wartość $A + B$. Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb $30A$ i $30B$ wynosi 30, to największy wspólny dzielnik liczb A i B musi wynosić 1. Ponadto wiemy, że:

$$A \cdot B = \frac{a}{30} \cdot \frac{b}{30} = \frac{a \cdot b}{900} = \frac{37800}{900} = 42$$

Suma dwóch liczb o zadanym iloczynie jest największa wtedy, kiedy ich różnica jest największa możliwa. Tak dzieje się, gdy $A = 42$ oraz $B = 1$ (lub na odwrót). W tym przypadku mamy $\mathrm{NWD}(42, 1) = 1$ i te dwie liczby mają największą możliwą sumę $A + B$. Wracając do liczb a i b, znajdujemy że suma liczb Tomasza wynosi $a + b = 30(A + B) = 30(42 + 1) = 30 \cdot 43 = 1290$.

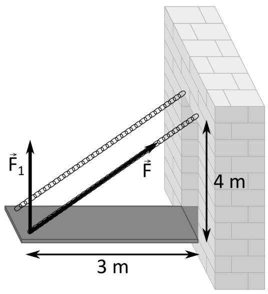
Zadanie 34 … Solidny łańcuch

W królestwie Náboj znajduje się most zwodzony. Most ma 3 m metry długości i masę 400 kg. Na jednym z jego końców zaczepiono dwa identyczne łańcuchy, których drugie końce zostały przytwierdzone do ściany na wysokości 4 m nad wjazdem. Drugi koniec mostu porusza się swobodnie na zawiasie. Z jaką siłą w niutonach jest naciągnięty każdy z łańcuchów?



Odpowiedź: 1250

Rozwiązanie:
Popatrzmy na rozkład sił w tym układzie. Na środek ciężkości mostu o masie $m = 400\,\mathrm{kg}$ działa siła grawitacji, której wartość wynosi $F_G = mg = 400\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 4000\,\mathrm{N}$. Ponadto, każdy z łańcuchów działa pewną siłą na most. Skoro most się nie porusza, to również się nie obraca. Ten warunek jest równoważny temu, że suma momentów obrotowych działających na most wynosi zero. Siła grawitacji działająca na most w odległości $r = 1{,}5\,\mathrm{m}$ od zawiasu przekłada się na moment obrotowy $M = F_G r = 4000\,\mathrm{N} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 6000\,\mathrm{N\,m}$. Pionowa składowa siły łańcuchów działa w odległości $r' = 3\,\mathrm{m}$ i musi powodować moment siły $M = 6000\,\mathrm{N\,m}$. Stąd wiemy, że wartość tej składowej musi wynosić $F_2 = \frac{M}{r'} = \frac{6000\,\mathrm{N\,m}}{3\,\mathrm{m}} = 2000\,\mathrm{N}$. Mamy dwa identyczne łańcuchy, więc pionowa składowa siły, z którą każdy z nich działa na most musi wynosić $F_1 = \frac{F_2}{2} = \frac{2000\,\mathrm{N}}{2} = 1000\,\mathrm{N}$.



Znamy już pionową składową siły działającej na łańcuchy, ale jak znaleźć wartość tej siły działającej wzdłuż łańcucha? Zauważmy, że trójkąt, którego boki są wyznaczone przez ścianę, most i łańcuch jest podobny do trójkąta wyznaczonego przez siły $\vec{F}$, $\vec{F_1}$ i odcinka łączącego ich końce. Stąd stosunek wartości sił F i F_1 wynosi tyle ile stosunek wysokości bramy do długości łańcucha. Długość łańcucha możemy łatwo policzyć z twierdzenia Pitagorasa: $\sqrt{(3\,\mathrm{m})^2 + (4\,\mathrm{m})^2} = 5\,\mathrm{m}$. Mamy zatem:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{4\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}}$$
$$F = \frac{5}{4}F_1$$

Zatem na każdy z łańcuchów działa siła:

$$F = \frac{5}{4}F_1 = \frac{5}{4} \cdot 1000\,\mathrm{N} = 1250\,\mathrm{N}$$

Zadanie 35 … Dom jednostkowy

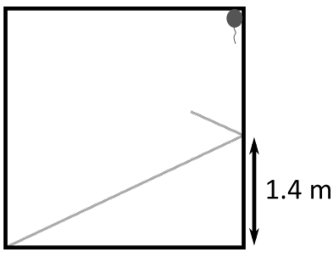
Podczas sprzątania starej szafy Dominika znalazła stary pendrive przypominający w kształcie dom. Podłączyła go do komputera, aby zobaczyć, jaka jest jego zawartość. Pendrive zawierał pojedyńczy plik zatytułowany: „Obrazek w postaci binarnej”. Z ciekawości otworzyła go. W pliku Dominika odnalazła 2022 losowo zapisane cyfry, przy czym każda cyfra to 0 lub 1. Dominika chiałaby poznać odpowiedź na następujące pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo w procentach, że liczba wystąpień cyfry 1 we wspomnianym pliku jest podzielna przez cztery?

Odpowiedź: 25

Rozwiązanie:
Policzmy na poczatku prawdopodobieństwo, że liczba wystąpień cyfry 1 w pliku jest liczbą parzystą. Niech pierwsze 2021 cyfr będzie dowolnych. W związku z tym liczba wystąpień jedynek wśród tych cyfr może być parzysta lub nieparzysta. Ostatnia cyfra to 0 lub 1. W zależności od ostatniej cyfry, parzystość liczby jedynek w pierwszych 2021 cyfrach zmienia się przez dodanie ostatniej cyfry lub nie. To, czy się zmieni, czy nie, jest równie prawdopodobne, ponieważ zależy wyłącznie od ostatniej cyfry, która zmienia parzystość z prawdopodobieństwem 0, 5 oraz zachowuje parzystość z prawdopodobieństwem 0, 5.
Rozważmy teraz tylko takie zestawy cyfr, które mają parzystą liczbę wystąpień cyfry 1. Ile z nich ma liczbę wystąpień cyfry 1 podzielną przez cztery? Jeśli liczba wystąpień cyfry 1 jest parzysta, są dwa przypadki – albo jest ona podzielna przez cztery, albo reszta z dzielenia liczby wsytąpień cyfry 1 wynosi 2. Rozważmy dwa zbiory, A i B. W zbiorze A umieścimy wszystkie sytuacje, w których liczba jedynek jest podzielna przez cztery, a w zbiorze B wszystkie sytuacje, w których ta reszta wynosi 2. Zauważmy, że możemy wybrać dowolną sytuację ze zbioru A i zamienić wszystkie 0 na 1, a 1 na 0. Jeśli liczba jednyek w pierwotnym przypadku wynosiła $4n$, a liczba zer wynosiła $2022 - 4n$, to po zamianie liczba jedynek będzie wynosić $2022 - 4n$, a liczba zer będzie wynoscić $4n$. Reszta z dzielenia $2022 - 4n$ przez cztery to 2. Dlatego, po zamianie, sytuacja ze zbioru A będzie należeć do zbioru B. Zamieniając cyfry ponownie, otrzymamy sytuację z początkowego zbioru A. W ten sposób możemy podzielić wszytkie możliwe sytuacje na pary, zawierające po jednej sytuacji ze zbioru A i jednej ze zbioru B. Każda sytuacja musi należeć do jednej z grup, a zatem zbiory A i B muszą zawierać tyle samo sytuacji.
Podsumowując, w sytuacjach, które mają parzystą liczbę jedynek, wystąpienie sytuacji z podzielną przez cztery liczbą jedynek ma prawdopodobieństwo 0, 5. Stąd prawdopodobieństwo, że liczba wystąpień cyfry 1 w pliku jest podzielna przez cztery wynosi $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = 25\%$.

Zadanie 36 … Jeszcze wyżej

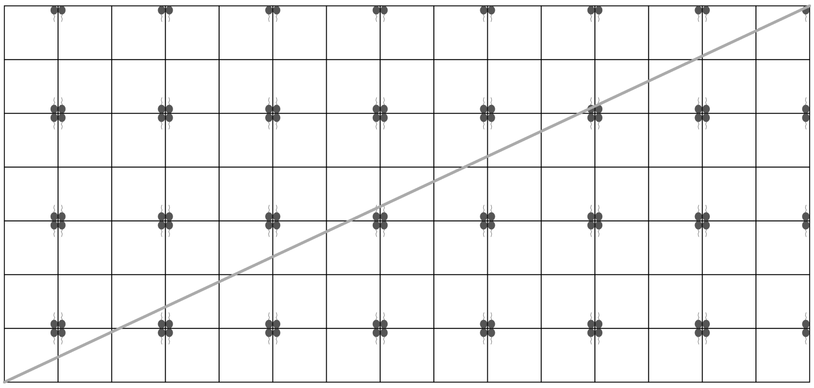
Marek znowu stoi w rogu kwadratowego pokoju o wymiarach $3\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$. Wszystkie ściany tego pokoju są pokryte lustrami. W rogu naprzeciwko Marka lata balonik. Marek znowu poświecił laserem ze swojego rogu w kierunku jednej ze ścian, ale tym razem tak jak przedstawiono to na rysunku. Ile razy wiązka lasera odbije się od ściany przed uderzeniem w balonik?



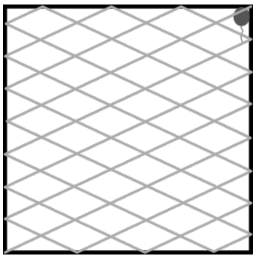
Odpowiedź: 20

Rozwiązanie:
Gdy spróbujemy narysować kilka pierwszych odbić, przekonamy się, że wiązka odbije się stosunkowo dużo razy, zanim trafi w balonik. Za każdym razem musielibyśmy również liczyć, w którym dokładnie miejscu laser odbija się od ściany, co nie jest proste. Zastosujmy zatem inne podejście.
Zamiast przerzucać wiązkę względem lini prostopadłej do ściany w punkcie odbicia, przerzucimy cały pokój względem ściany, od której odbił się laser. Załóżmy zatem, że po drugiej stronie prawej ściany naszego pokoju jest drugi pokój będący jego lustrzanym odbiciem, Jeśli pozwolilibyśmy promieniowi przechodzić przez ściany pomieszczenia, w lustrzanej wersji naszego pokoju miałby on taki sam przebieg, jak w wyjściowym pokoju, gdyby odbił się od ściany. Powtarzając ten proces wielokrotnie, odbijając pokoje względem ścian, w które uderzył promień lasera, uzyskujemy wiązkę poruszającą się po linii prostej. Z tego, w którym miejscu nastąpiło pierwsze odbicie, wiemy, że laser porusza się o $1{,}4\,\mathrm{m}$ w górę za każdym razem, gdy porusza się $3\,\mathrm{m}$ w prawo. Po jakimś czasie uderzy on w narożnik jednego z oditych pokojów i, przy odrobinie szczęścia, będzie to narożnik w którym będzie znajdował się balonik (lub jedna z jego odbitych wersji).

Laser uderza w róg pokoju, gdy zarówno jego droga przebyta w górę jak i droga przebyta w prawo są całkowitymi wielokrotnościami 3 m. Jeśli wiązka przebyła $k \cdot 3$ m w prawo, to wiemy, że przebyła $k \cdot 1{,}4$ m w górę. Jeśli k jest liczbą naturalną, to $k \cdot 3$ m jest wielokrotnością 3 m. Musimy zatem znaleźć najmniejsze takie k, że $k \cdot 1{,}4$ m jest wielokrotnością 3 m. Ponieważ $1{,}4\,\mathrm{m} = \frac{7}{15} \cdot 3\,\mathrm{m}$, to najmniejszym takim k jest $k = 15$. Powyższe rozważania obrazuje następujący rysunek:

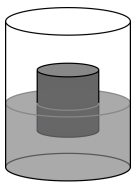


Z tego rysunku wynika również, że laser rzeczywiście po pewnym czasie trafi w róg, w którym znajduje się balonik. Pozostaje nam policzyć odbicia. W naszym podejściu każdemu odbiciu się od ściany odpowiadało przecięcie lini promienia ze ścianą jednego z lustrzanych pokoi. Na rysunku możemy zobaczyć, że wiązka przeszła przez poziomą ścianę 6 razy, a przez pionową ścianę − 14 razy. Zatem wiązka przecina ściany odbitych pokoi $6 + 14 = 20$ razy. Ta sytuacja odpowiada temu, że w wyjściowym pokoju laser odbił się 20 razy przed uderzeniem w balonik.
Uwaga: Poniższy rysunek pokazuje jak dokładnie wyglądał tor wiązki przed trafieniem w balonik:



Zadanie 37 … Pływająca mąka

Podczas gotowania Jakub bawi się szklankami. Ma on dwie szklanki w kształcie walca. Jedna z nich ma pole podstawy równe $10\,\mathrm{cm}^2$, a druga pole podstawy równe $30\,\mathrm{cm}^2$. Jakub nalał wody do większej szklanki, a następnie umieścił w niej mniejszą szklankę. Zaczęła ona pływać. Po ustabilizowaniu się powierzchni wody sytuacja wyglądała tak jak na poniższym rysunku. Następnie Jakub umieścił 45 g mąki w mniejszej szklance. Szklanka nadal pływała, jednak poziom wody w większej szklance się podniósł. O ile centymetrów?



Odpowiedź: 1,5

Rozwiązanie: Po umieszczeniu mąki o masie $m = 45$ g w mniejszej szklance o polu podstawy równym $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ ciężar tejże szklanki (wraz z zawartością) wzrósł o $\Delta F_G = mg$. Musiała się zatem zwięszyć działająca nań siła wyporu, co mogło mieć miejsce tylko poprzez zwiększenie objętości wypieranej cieczy. Żeby obliczyć tę zmianę, używamy wzoru Archimedesa $\Delta F_{wyp} = \Delta V' \rho_{H_2O} g$, gdzie $\Delta V'$ to zmiana zanurzonej objętości.

$$\Delta F_G = \Delta F_{wyp}$$
$$mg = \Delta V' \rho_{H_2O} g$$
$$\Delta V' = \frac{m}{\rho_{H_2O}}$$

Pod wpływem większego ciężaru dno mniejszej szklanki zbliży się do dna większej o odległość h'. Wyparta zostanie wtedy dodatkowa objętość wody równa Sh', która musi się gdzieś przemieścić ($S = 10\,\mathrm{cm}^2$ to pole podstawy mniejszej szklanki). Spowoduje to podniesienie się poziomu wody o h. Objętość przemieszczonej wody można wyrazić jako $(S_0 - S)h$, gdzie $S_0 = 30\,\mathrm{cm}^2$ jest polem podstawy większej szklanki. Porównując objętości otrzymujemy równanie:

$$Sh' = (S_0 - S)h$$

gdzie $S_0 = 30\,\mathrm{cm}^2$ jest polem podstawy większej szklanki. W wyniku tych dwóch ruchów głębokość zanurzenia małej szklanki wzrośnie o $h + h'$. Zatem zmiana zanurzonej objętości wyniesie

$$\Delta V' = S(h + h')$$

Łącząc uzyskane wzory:

$$S_0 h = Sh + Sh' = \Delta V'$$
$$h = \frac{\Delta V'}{S_0} = \frac{m}{\rho_{H_2O} S_0}$$

Zatem poziom tafli wody podniósł się o

$$h = \frac{m}{\rho_{H_2O} S_0} = \frac{45\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 30\,\mathrm{cm}^2} = 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

Zadanie 38 ... Dużo dziewiątek

Zuzia napisała liczby 9, 99, 999, 9999... Skończyła pisanie na liczbie złożonej z 2022 dziewiątek. Następnie obliczyła sumę wszystkich wypisanych 2022 liczb. Ile wynosi suma cyfr obliczonej sumy?

Odpowiedź: 2043

Rozwiązanie:
Bezpośrednie dodawanie takiej liczby dziewiątek byłoby dość trudne. Znajdźmy więc inny sposób na obliczenie sumy danych liczb. Zauważmy, że po dodaniu 1 do każdej z tych liczb dostajemy liczbę z jedynką na pierwszej pozycji i zerami na kolejnych pozycjach. Mamy zatem równość $9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) + \ldots$
Suma wszystkich -1 wynosi -2022. Pozostałe składniki sumują się do liczby $11\ldots110$ gdzie wszystkich jedynek jest 2022. Liczba otrzymana przez Zuzię to właśnie ta duża liczba pomniejszona o 2022.
Odjęcie 2022 będzie miało wpływ wyłącznie na 5 ostatnich cyfr liczby. Zostaną one zamienione na $11110 - 2022 = 9088$. Pozostałe 2018 cyfr pozostanie niezmienione. Wynika stąd, że suma cyfr liczby Zuzi wynosi $2018 \cdot 1 + 9 + 0 + 8 + 8 = 2043$.

Zadanie 39 ... Bob Budowniczy i jego cegła

Bob Budowniczy ma cegłę o gęstości $2400\,\mathrm{kg/m^3}$. Kiedy kładzie swoją cegłę na płaskiej powierzchni na trzy różne sposoby, to wywierane przez cegłę ciśnienie wynosi odpowiednio 2400 Pa, 3200 Pa i 4800 Pa. Jaka jest masa cegły w kilogramach?

Odpowiedź: 6,4

Rozwiązanie: Oznaczmy wymiary cegły przez a, b, c i jej masę przez m. Wtedy ciśnieni a $p_1 = 2400\,\mathrm{Pa}$, $p_2 = 3200\,\mathrm{Pa}$ and $p_3 = 4800\,\mathrm{Pa}$ dane w treści zadania można obliczyć z następujących zależności:

$$p_1 = \frac{mg}{ab}$$
$$p_2 = \frac{mg}{bc}$$
$$p_3 = \frac{mg}{ca}$$

Po przemnożeniu wszystkich równań dostajemy:

$$p_1p_2p_3 = \frac{m^3g^3}{a^2b^2c^2}$$

Jak widać, abc to objętość cegły V . Powyższe równanie może być przekształcone:

$$p_1p_2p_3 = \frac{m^3g^3}{V^2}$$

Pozostaje jedynie zauważyć, że $\frac{m}{V}$ to gęstość cegły $\rho = 2400\,\mathrm{kg/m^3}$. Używając tej wiedzy znajdujemy masę cegły:

$$p_1p_2p_3 = mg^3\rho^2$$
$$m = \frac{p_1p_2p_3}{g^3\rho^2} = \frac{2400\,\mathrm{Pa} \cdot 3200\,\mathrm{Pa} \cdot 4800\,\mathrm{Pa}}{(10\,\mathrm{N/kg})^3 \cdot (2400\,\mathrm{kg/m^3})^2} = 6{,}4\,\mathrm{kg}$$

Masa cegły wynosi 6,4 kg.

Zadanie 40 … Trapez Lusi

Lusia ma w kieszeni portfel w kształcie trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD. Boki tego trapezu mają długości: $|AB| = 100\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 24\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 75\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 7\,\mathrm{cm}$. Lusia chce wiedzieć, jak duże banknoty zmieszczą się jej do portfela. Ile wynosi pole trapezu w centymetrach kwadratowych?

Odpowiedź: 588

Rozwiązanie: Niech P będzie przecięciem prostych AD i BC. Ponieważ proste AB i CD są równoległe, to trójkąty PAB i PDC są podobne. Stosunek długości odpowiadających sobie boków w tych trójkątach wynosi $\frac{75\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{cm}} = \frac{3}{4}$. To daje nam równania:

$$\frac{|PD|}{|PA|} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{3}{4}$$

Ponadto wiemy, że $|PA| = |PD| + |AD| = |PD| + 7\,\mathrm{cm}$ oraz $|PB| = |PC| + |BC| = |PC| + 24\,\mathrm{cm}$. Podstawiając do uzyskanych wcześniej równań dostajemy:

$$\frac{|PD|}{|PD| + 7\,\mathrm{cm}} = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad |PD| = 21\,\mathrm{cm}$$
$$\frac{|PC|}{|PC| + 24\,\mathrm{cm}} = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad |PC| = 72\,\mathrm{cm}$$

W trójkącie PCD zachodzi równość $(21\,\mathrm{cm})^2 + (72\,\mathrm{cm})^2 = (75\,\mathrm{cm})^2$, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa dostajemy, że jest to trójkąt prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku P. Wobec tego trójkąt PAB również jest prostokątny. Pole powierzchni trapezu $ABCD$ jest równe różnicy pól tych dwóch trójkątów.

Przyprostokątne trójkąta PCD mają długości 21 cm i 72 cm, więc pole tego trójkąta wynosi $21\,\text{cm} \cdot 72\,\text{cm} : 2 = 756\,\text{cm}^2$.
Trójkąt PAB ma przyprostokątne długości $21\,\text{cm} + 7\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$ i $72\,\text{cm} + 24\,\text{cm} = 96\,\text{cm}$, więc jego pole jest równe $28\,\text{cm} \cdot 96\,\text{cm} : 2 = 1344\,\text{cm}^2$.
Stąd pole trapezu $ABCD$ wynosi $1344\,\text{cm}^2 - 756\,\text{cm}^2 = 588\,\text{cm}^2$.

Zadanie 41 … Tadeusz i odcinki

Tadeusz narysował okrąg na papierze i zaznaczył na nim 13 różnych punktów. Zamierza narysować dwa odcinki o końcach w zaznaczonych punktach. Dodatkowo chce, żeby te odcinki nie miały punktów wspólnych (nawet końców). Na ile sposobów może to zrobić?

Odpowiedź: 1430

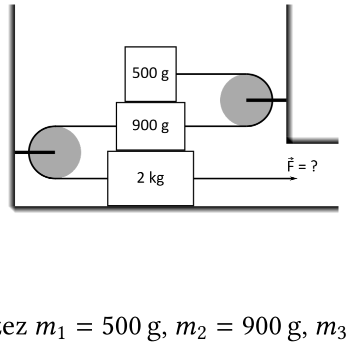
Rozwiązanie: Zacznijmy od rozwiązania prostszego problemu w którym Tadeusz zaznacza tylko 4 punkty. Oznaczmy je przez A, B, C, D i załóżmy, że leżą one na okręgu w takiej właśnie kolejności. Ponieważ narysowane odcinki nie mogą mieć wspólnych końców, to wystarczy rozważyć poniższe 3 możliwości ich narysowania (3 możliwe podziały punktów A, B, C, D na rozłączne pary):

1. odcinek AB i CD,
2. odcinek AC i BD,
3. odcinek AD i BC.

W drugim przypadku odcinki się przecinają, a w pozostałych nie. Zatem dla czterech zaznaczonych punktów mamy dwie możliwości narysowania odcinków.
Wróćmy teraz do oryginalnego problemu, czyli 13 zaznaczonych punktów. 2 wybrane odcinki mają łącznie 4 różne końce. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla każdej czwórki punktów istnieją dokładnie dwa poprawne sposoby narysowania odcinków.
Pozostaje tylko wyznaczyć liczbę sposobów, na którą można wybrać 4 punkty spośród 13. Pierwszy punkt można wybrać na 13 sposobów, drugi na 12, trzeci na 11 i czwarty na 10. Wybierając w ten sposób możemy jednak wybrać tę samą czwórkę kilka razy ((A, B, C, D) i (B, A, D, C) to ta sama czwórka). Musimy wyznaczyć liczbę sposobów wybrania ustalonej czwórki. Decydujemy, który element wybieramy jako pierwszy. Są na to 4 możliwości. Na wybór drugiego elementu mamy 3 możliwości, trzeciego 2 i czwartego 1. Zatem każdą czwórkę można wybrać na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów. Ostatecznie liczba wszystkich możliwych czwórek wynosi $(13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10) : (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 715$.
Pamiętając, że dla każdej czwórki można narysować odcinki na dwa różne sposoby, dostajemy, że liczba wszystkich sposobów wynosi $2 \cdot 715 = 1430$.

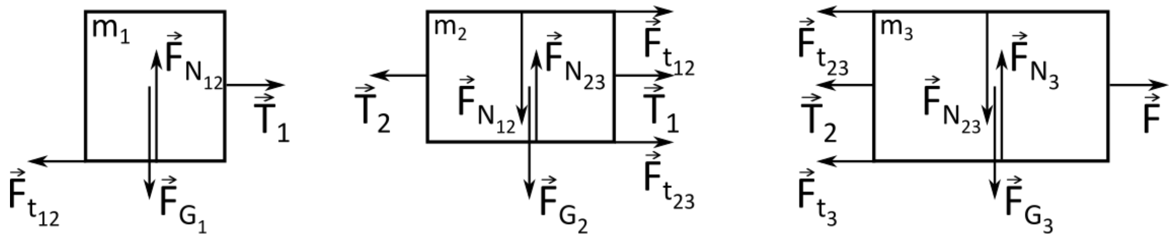
Zadanie 42 … Naprawdę spoko układ

Maja stworzyła naprawdę spoko układ. Jest on widoczny na poniższym obrazku. Składa się on z trzech prostopadłościennych klocków o masach 500 g, 900 g i 2 kg. Klocki są połączone linami, które przechodzą przez lekkie krążki. Współczynnik tarcia pomiędzy klockami oraz pomiędzy klockami i podłożem wynosi 0,2. Maja ciągnie dolny klocek. Jakiej największej siły w niutonach może użyć, żeby układ pozostawał nadal w spoczynku?



Odpowiedź: 14,4

Rozwiązanie: Oznaczmy masy klocków przez $m_1 = 500\,\text{g}$, $m_2 = 900\,\text{g}$, $m_3 = 2\,\text{kg}$ i współczynnik tarcia przez $f = 0{,}2$.
Rozważmy siły działające na poszczególne klocki. Wyglądają one następująco:



Siły $\vec{F_{G_1}}$, $\vec{F_{G_2}}$ i $\vec{F_{G_3}}$ są ciężarami poszczególnych klocków. Ponadto klocki oddziałują na siebie siłami nacisku $\vec{F_{N_{12}}}$ i $\vec{F_{N_{23}}}$. Górny klocek działa na środkowy z siłą $F_{N_{12}}$ skierowaną w dół. W tym samym czasie, na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona środkowy działa na górny z siłą o tej samej wartości skierowaną w górę . Podobnie sprawa wygląda pomiędzy środkowym i dolnym klockiem z siłą o wartości $F_{N_{23}}$. Ponadto podłoże działa na dolny klocek z siłą $\vec{F_{N_3}}$.

Siły działające w kierunku poziomym to siła $\vec{F}$ z którą Maja ciągnie linę, a także siły $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$ odpowiadające naprężeniom w linie. Ponadto mamy jeszcze siły tarcia. Na górny klocek, który chciałby poruszyć się w prawo, działa siła $\vec{F_{t_{12}}}$ skierowana w lewo. Ponownie z trzeciej zasady dynamiki Newtona wnioskujemy, że górny klocek musi działać na środkowy z siłą o wartości $F_{t_{12}}$, ale skierowaną w prawo. Podobna sytuacja zachodzi dla środkowego i dolnego klocka. Ponadto podłoże działa na dolny klocek z siłą tarcia $\vec{F_{t_3}}$.

Aby układ pozostawał w spoczynku, siły działające na każdy prostopadłościan i w każdym kierunku muszą się sumować do 0. Dla kierunku pionowego otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} F_{G_1} &= F_{N_{12}} \\ F_{G_2} + F_{N_{12}} &= F_{N_{23}} \\ F_{G_3} + F_{N_{23}} &= F_{N_3} \end{aligned}$$

Tymczasem dla kierunku poziomego dostajemy:

$$\begin{aligned} T_1 &= F_{t_{12}} \\ T_2 &= T_1 + F_{t_{12}} + F_{t_{23}} \\ F &= T_2 + F_{t_{23}} + F_{t_3} \end{aligned}$$

Ciężary można policzyć ze wzoru $F_G = mg$, gdzie g to standardowe przyspieszenie ziemskie. Kiedy Maja pociąga z największą możliwą siłą, siły tarcia statycznego również muszą być maksymalne - gdyby Maja użyła nieco większej siły to cały układ poruszyłby się i siły tarcia działałyby z największą możliwą wartością. Wartość ta może być obliczona ze wzoru $F_t = fF_N$. Pozostaje wyznaczyć nieznane wartości używając sześciu powyższych równań:

$$\begin{aligned} F_{N_{12}} &= F_{G_1} = m_1 g \\ F_{N_{23}} &= F_{G_2} + F_{N_{12}} = m_2 g + m_1 g = (m_1 + m_2)g \\ F_{N_3} &= F_{G_3} + F_{N_{23}} = m_3 g + (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2 + m_3)g \\ T_1 &= F_{t_{12}} = fF_{N_{12}} = m_1 gf \\ T_2 &= T_1 + F_{t_{12}} + F_{t_{23}} = T_1 + fF_{N_{12}} + fF_{N_{23}} = m_1 gf + m_1 gf + (m_1 + m_2)gf = (3m_1 + m_2)gf \\ F &= T_2 + F_{t_{23}} + F_{t_3} = T_2 + fF_{N_{23}} + fF_{N_3} = (3m_1 + m_2)gf + (m_1 + m_2)gf + (m_1 + m_2 + m_3)gf = (5m_1 + 3m_2 + m_3)gf \end{aligned}$$

W związku z tym, największa siła jakiej może użyć Maja, ma wartość:

$$F = (5m_1 + 3m_2 + m_3)gf = (5 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} + 3 \cdot 0{,}9\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}) \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}2 = 14{,}4\,\mathrm{N}$$