Vzorová řešení

11. ročník Náboje Junior

24. listopadu 2023

Ahoj,

Právě se Vám do rukou dostala brožurka zadání a řešení úloh soutěže Náboj Junior 2023. Náboj Junior je matematicko-fyzikální soutěž pro čtyřčlenné týmy žáků druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Soutěž trvá 120 minut, během kterých se týmy snaží vyřešit co nejvíce úloh zaměřených nejen na znalosti z matematiky a fyziky, ale i na schopnost přistupovat k úlohám inovativně a s důvtipem.

Dne 24. listopadu 2023 proběhl 11. ročník Náboje Junior. V České republice se letos zúčastnilo soutěže 328 týmů. Náboj Junior proběhl v 54 městech v Česku, na Slovensku a v Polsku. Současně se soutěž konala v online verzi ve Španělsku, Nizozemí, Belgii a v Chorvatsku.

V českým městech je soutěž organizována nadšenými učiteli a studenty středních škol, kteří věnují svůj čas a energii, aby umožnili mladším žákům z regionu zasoutěžit si a prověřit svoje vědomosti. Cílem Náboje Junior je rozvíjet nadání dětí v oblasti matematiky, fyziky a ukázat širokému spektru žáků, že přírodní vědy skrývají mnoho zajímavostí, výzev a příležitostí.

Soutěž Náboj Junior vznikla jako společný projekt občanského sdružení Trojsten a korespondenčního semináře MFF UK Výfuk. Členové organizací jsou vysokoškolští studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislavě a Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze, kteří se snaží o rozvoj nadání studentů a zvýšení zájmu o přírodní vědy.

Těšíme se na Vás příští rok

Korespondenční seminář Výfuk

Příklad 1 ... Sbírání oblázků

Alice s Bobem sbírají na pláži oblázky. Alice už má o 49 oblázků víc než Bob, takže se s ním rozhodla podělit. Dala tedy Bobovi 11 jejích oblázků. O kolik oblázků má nyní Alice víc než Bob?

Výsledek: 27

Řešení: Pokud dá Alice Bobovi 11 oblázků, bude mít o 11 méně a Bob získá 11 oblázků. Tím pádem se rozdíl oblázků, který oba mají, zmenší o $11 + 11 = 22$. Nakonec tedy Alice bude mít o $49 - 22 = 27$ více oblázků než Bob.

Příklad 2 ... Řidička taxíku

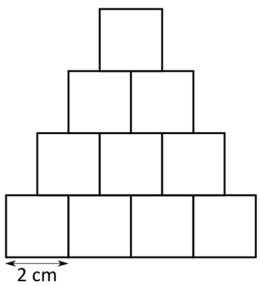
Tereza je profesionální řidička taxíku. Zjistila, že ujela 10 800 kilometrů za první 3 měsíce roku 2023, a že za tu dobu neopustila své auto. Jaká byla průměrná rychlost Terezy v km/h během tohoto období?

Výsledek: 5

Řešení: První 3 měsíce roku 2023 mají po řadě 31, 28, a 31 dní. Dohromady tedy mají $31 + 28 + 31 = 90$ dní, což je $90 \cdot 24 = 2160$ hodin. Tereza tedy ujela 10800 kilometrů za 2160 hodin. Tím pádem její průměrná rychlost musela být $\frac{10\,800\,\mathrm{km}}{2160\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km/h}$.

Příklad 3 ... Krabice

Lauru fascinovaly krabice, které měla ve svém pokoji. Rozhodla se je tedy nakreslit. Její kresbu můžete vidět na obrázku. Každý ze čtverců na má stranu délky 2 cm. Jaká je celková délka všech úseček na obrázku v centimetrech?



Výsledek: 56

Řešení: Na nakreslení spodních 4 čtverců potřebovala Laura nakreslit 13 úseček. Na nakreslení vyšších 3 čtverců potřebovala dalších 7 úseček. Další dva čtverce potom vyžadovaly 5 úseček a na jeden horní čtverec potřebovala 3 úsečky. Dohromady tedy nakreslila $13 + 7 + 5 + 3 = 28$ úseček. Každá z nich je dlouhá 2 cm, takže celková délka je $28 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 56\,\mathrm{cm}$.

Příklad 4 ... Americký problém

Michaela si zajela na výlet do USA a všimla si, že používají jiný měrný systém. Koupila si plechovku koly s objemem 12 oz. Na etiketě si přečetla, že americká kola obsahuje 150 kilokalorií v jedné plechovce. Kolik kilokalorií by Michaela získala, kdyby vypila 100 ml americké koly?

Poznámka: Některé převody naleznete v tabulce konstant.

Výsledek: 45

Řešení: Pokud se podíváme do tabulky konstant na převody, zjistíme, že 36 oz je 1 l. Tím pádem je objem plechovky v litrech $\frac{12\,\mathrm{oz}}{36\,\mathrm{oz/l}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{l}$. Tím pádem je v každém litru koly $3 \cdot 150 = 450$ kilokalorií, pak tedy v každých 100 ml je $450 : 10 = 45$ kilokalorií.

Příklad 5 ... Zlatý poklad

Ivan a jeho pirátští kamarádi našli truhlu plnou zlatých mincí a rozhodli se podělit o peníze rovným dílem. Ukázalo se, že pokud by v bedně bylo o 48 mincí méně, každý by dostal o 6 mincí méně. Kolik pirátských kamarádů má Ivan (pokud nepočítáme Ivana samotného)?

Výsledek: 7

Řešení: Pokud by truhla měla o 48 méně mincí, každý pirát by dostal o 6 mincí méně, než aktuálně má. Tím pádem musí být celkem $48 : 6 = 8$ pirátů. Protože máme zjistit, kolik pirátských kamarádů má Ivan, dostaneme $8 - 1 = 7$.

Příklad 6 ... Běhání koleček

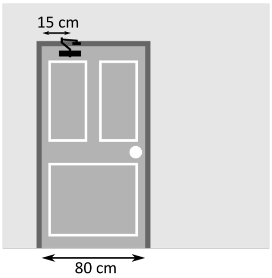
Míša s Ríšou každodenně chodí 18 minut běhat (v kuse, bez pauz). Oba běhají po kruhové trati, avšak Míšova má poloměr 70 metrů a Ríšova 35 metrů. Jedno kolečko zvládne Míša uběhnout za 3 minuty, zatímco Ríša za 2 minuty. Před začátkem tréninku si změřili délku jednoho kroku, která jim vyšla 100 centimetrů. Kolik kroků dohromady budou mít po konci jejich běhu? Výsledek zaokrouhlete na desítky.
Poznámka: Můžete využít aproximace $\pi = \frac{22}{7}$.

Výsledek: 4620

Řešení: Za 18 minut Míša uběhne $18 : 3 = 6$ koleček. Každé jeho kolečko má délku $2\pi \cdot 70\,\mathrm{m} = 140\pi\,\mathrm{m}$, takže uběhne vzdálenost $6 \cdot 140\pi\,\mathrm{m} = 840\pi\,\mathrm{m}$, a tedy stejný počet kroků. Podobně Ríša uběhne $18 : 2 = 9$ koleček s délkou $2\pi \cdot 35\,\mathrm{m} = 70\pi\,\mathrm{m}$. Uběhne vzdálenost $9 \cdot 70\pi\,\mathrm{m} = 630\pi\,\mathrm{m}$, a tedy stejný počet kroků. Dohromady tedy udělají $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ kroků. Pokud použijeme aproximaci $\pi = \frac{22}{7}$, dostaneme, že udělali $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ kroků.
Poznámka: Pokud použijeme hodnotu $\pi = 3{,}14$, *dostaneme výsledek* 4615,8, *který se bude po zaokrouhlení na desítky rovnat výsledku výše.*

Příklad 7 ... Zavírání dveří

Alex byl fascinován mechanismem, který automaticky zavírá dveře. Tento mechanismus zkouší zavřít dveře po tom, co byly otevřeny. Alexovy dveře mají šířku 80 cm a mechanismus je umístěn 15 cm od pantů. Systém působí na dveře silou 48 N. Jaká minimální síla je potřeba k otevření dveří?



Výsledek: 9

Řešení: K otevření dveří minimální silou potřebujeme dosáhnout rovnosti momentů sil. Moment síly M zavíracího mechanismu je roven síle násobené vzdáleností od pantů $M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. Použitím stejné rovnice dostaneme sílu F potřebnou k otevření dveří ve vzdálenosti $a = 80\,\mathrm{cm}$:

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 8 ... Omotání Země

Eva si koupila velmi dlouhý provaz, se kterým by po rovníku mohla obtočit Zemi. Adam se však rozhodl, že si koupí ještě delší provaz, se kterým by mohl Zemi obtočit po rovníku ve výšce 1 metr nad povrchem. O kolik metrů více bude mít Adamův provaz? Zaokrouhlete na 2 desetinná místa.

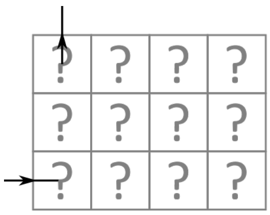
Poznámka: Předpokládejte, že Země má tvar dokonalé koule.

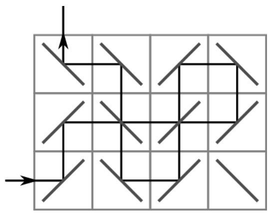
Výsledek: 6,28

Řešení: Předpokládáme-li Zemi jako dokonalou kouli, provaz obtočený na jejím povrchu opisuje dokonalý kruh. Označme si poloměr Země r. Délka Evina provazu tedy bude $2\pi r$. Adamův provaz oproti tomu vytvoří kruh, jehož poloměr je $r + 1\,\mathrm{m}$. Tím pádem jeho provaz musí mít délku $2\pi(r + 1\,\mathrm{m})$. Rozdíl v délkách provazů Adama a Evy tedy bude $2\pi(r + 1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Příklad 9 ... Optická hra

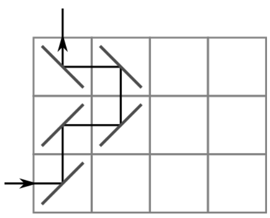
Marcel má optickou hru sestávající z mřížky 3×4, jak je ukázáno na levém obrázku. Do každého čtverce musí umístit oboustranné zrcadlo tak, aby úhel mezi zrcadlem a stěnami čtverce byl 45°. Poté si Marcel vezme laser, kterým posvítí na soustavu zrcadel tak, aby paprsek do mřížky vstupoval a vystupoval z ní, jak je znázorněno na obrázku. Jeden možný způsob umístění zrcadel je nakreslen na obrázku vpravo. Jaký je minimální počet odrazů paprsku tak, aby do mřížky vstupoval a vystupoval z ní, jak je znázorněno?





Výsledek: 5

Řešení: Pokaždé, když Marcelův paprsek zasáhne zrcadlo, změní směr o 90° buď doleva, nebo doprava (záleží na orientaci zrcadel). Je snadné najít konfiguraci zrcadel, kde je potřeba pouze 5 odrazů (orientace zrcadel v prázdných čtvercích je nepodstatná):



Snadno poznáme, že paprsek nemohl jít nejkratší cestou, tedy pouze přes 3 políčka (ve více políčkách by totiž neměnil směr). Navíc si můžeme všimnout, že počet odrazů musí být nutně lichý, protože po sudém počtu odrazů paprsek směřuje horizontálně, zatímco my chceme, aby vyšel vertikálně.
Počet odrazů tedy musí být liché číslo větší než tři, což znamená, že 5 je skutečně hledaný nejmenší počet odrazů.

Příklad 10 ... Hrubý problém

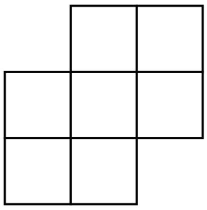
Tomáš vymyslel nový typ čísel, který pojmenoval *hrubá* čísla. *Hrubé* číslo je takové celé číslo, jehož číslice jsou všechny stejné. Kolik *hrubých* čísel větších než deset a menších než milion existuje?

Výsledek: 45

Řešení: Pokud využijeme pouze číslici 1, dostaneme 5 hrubých čísel v zadaném okruhu, jmenovitě 11, 111, 1111, 11111 a 111111. Obdobně dostaneme 5 hrubých čísel pro každou z číslic 2 až 9. Pro číslici 0 nedostaneme žádná hrubá čísla. Celkem je tedy $9 \cdot 5 = 45$ hrubých čísel větších než 10 a menších než milion.

Příklad 11 ... Stará tabulka

Dan našel na půdě starou hrací tabulku, která je zobrazená na obrázku. Zjistil, že musí napsat čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6 do čtverečků tabulky tak, aby každé číslo bylo zapsáno právě jednou. Navíc musí zajistit, aby součet v každém sloupci byl stejný. Danovi se povedlo poskládat tabulku všemi možnými různými způsoby a vždy si poznamenal součin čísel v prostředním sloupci. Kolik různých výsledků získal?



Výsledek: 1

Řešení: Součet všech čísel na tabuli je $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. To znamená, že součet čísel v každém sloupci je $21 : 3 = 7$. Tím pádem 0 nemůže být ani v prvním, ani ve třetím sloupci, protože další číslo by muselo být 7, ale to nemáme v nabídce. To znamená, že číslo 0 využijeme v prostředním sloupci, což bude mít za následek, že součin čísel v prostředním sloupci bude vždy právě 0. Dan tedy mohl získat pouze 1 výsledek, a to 0.

Příklad 12 ... Čas na koupel

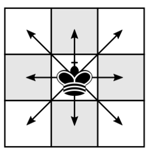
Petr má vanu o objemu 150 l. Vana se napouští kohoutkem s průtokem 0,2 l/s. Pokud ovšem není ucpaná výpusť, voda vytéká s průtokem 0,05 l/s. Petr nechal vanu napouštět, ale zapomněl zacpat výpusť. O kolik sekund déle bude trvat naplnit vanu, než kdyby výpusť před napouštěním zavřel?

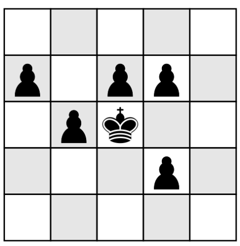
Výsledek: 250

Řešení: Pokud by Petr nezapomněl zavřít výpusť, vana by se napustila za $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$. Když ale Petr výpusť nezacpal, snížil se přítok vody na $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. Vana se tedy napustí za $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$, takže její napouštění bude trvat o $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ déle.

Příklad 13 ... Šachy

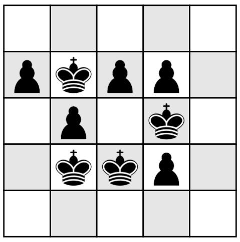
Vilém si hraje se šachovými figurkami. Nyní táhne s králem. Ten se může hýbat na jakékoliv políčko, které se dotýká jeho nynější pozice buď hranou, nebo rohem, ale na políčku už nesmí stát jiná figurka. Vilém rozestavil figurky tak, jak vidíme na obrázku. Na kolik rozdílných polí se mohl král dostat přesně po dvou tazích?



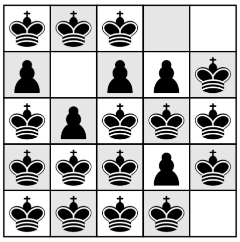


Výsledek: 16

Řešení: Po prvním tahu se král mohl přesunout na jakékoliv pole vyznačené na obrázku:



Nyní je otázka, na jaká další pole se může přesunout v následujícím tahu z pozic, které jsme našli po prvním tahu. Snadno zjistíme, že král se může přesunout na následujících 16 polí:



Příklad 14 ... Rozstřižený čtyřúhelník

Adam se nudil při hodině matematiky, takže si nakreslil čtyřúhelník s obvodem 49 cm. Potom se rozhodl rozstřihnout čtyřúhelník na 2 trojúhelníky v jedné jeho diagonále. Zjistil, že součet obvodů nových trojúhelníků je 77 cm. Jaká je délka diagonály, podle které Adam původní čtyřúhelník rozstřihl?

Výsledek: 14

Řešení: Dva nové trojúhelníky původního čtyřúhelníku mají strany původního čtyřúhelníku a diagonály, podle které byl rozstřižen (jedna v každém trojúhelníku). To znamená, že nový obvod je roven obvodu původního čtyřúhelníku zvětšeného o dvě délky diagonály. Protože se celkový obvod zvětšil o dvě diagonály, tedy $77\,\text{cm} - 49\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$, délka jedné diagonály je $28\,\text{cm} : 2 = 14\,\text{cm}$.

Příklad 15 ... Hoď, běž a nechytej

Martin jede na skateboardu rychlostí $9\,\text{km/h}$. Rozhodl se hodit přímo nad sebe míček tak, že dopadl na zem za 4 sekundy. Hned po odhození míčku Martin zrychlil na $18\,\text{km/h}$. Jaká je vzdálenost v metrech mezi Martinovým skateboardem a míčkem v momentě, kdy míček dopadne na zem?
Poznámka: Předpokládejte, že odpor vzduchu je zanedbatelný.

Výsledek: 10

Řešení: Hned po odhození míčku bude horizontální složka jeho rychlosti $9\,\text{km/h} = 2{,}5\,\text{m/s}$. Martin mezitím zrychlil na $18\,\text{km/h} = 5\,\text{m/s}$. Relativní rychlost mezi Martinem a míčkem tedy bude $5\,\text{m/s} - 2{,}5\,\text{m/s} = 2{,}5\,\text{m/s}$. Proto po $4\,\text{s}$, kdy míček dopadne na zem, bude vzdálenost mezi míčkem a Martinem $2{,}5\,\text{m/s} \cdot 4\,\text{s} = 10\,\text{m}$.

Příklad 16 ... Čas slavit

Alice, Bětka, Cecílie a Dominika šly na oslavu. Každá dívka přišla v jiný čas. Po příchodu každá vyslovila nepravdivý výrok:

Alice řekla: „Přišla jsem jako druhá.“
Bětka řekla: „Přišla jsem dříve než Alice.“
Cecílie řekla: „Přišla jsem později než Alice.“
Dominika řekla: „Přišla jsem jako první.“

V jakém pořadí dívky dorazily?

V odpovědi nahraď jméno každé z dívek odpovídajícím písmenem, tzn. pokud by odpovídající pořadí dívek bylo Alice, Bětka, Cecílie, Dominika, odpověď by byla ABCD.

Výsledek: CDAB

Řešení: V prvním kroku zkusíme rozhodnout, na jaké pozici byla Alice. Protože jsou všechny výroky lživé, Alice nemohla být druhá. Bětka s Cecílií přišly po řadě po Alici a před Alicí. To znamená, že některá z dívek bude jak před, tak po Alici, což jí znemožňuje být první nebo poslední. Jediná zbývající možnost tedy je, že Alice přišla jako třetí. Bětčin nepravdivý výrok, že přišla před Alicí znamená, že musela dorazit po ní, takže jako poslední. Dominika nedorazila první, což jí nechává druhé místo, protože třetí a čtvrté místo už jsou zabrané. V posledním kroku připíšeme první místo Cecílii, jako poslední zbývající volné. Je zřejmé, že její pozice neodporuje jejímu výroku. Tím pádem je výsledné pořadí, ve kterém dívky dorazily, Cecílie, Dominika, Alice, Bětka (CDAB).

Příklad 17 . . . Brněnské šaliny

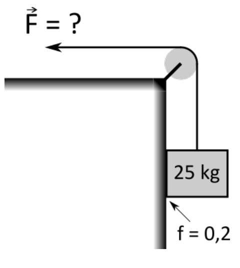
Jarda jednou cestoval po Brně tramvají číslo 12. Všiml si, že průměrně každé dvě minuty viděl tramvaj č. 12 jedoucí opačným směrem. Pomyslel si, že není spravedlivé, že tramvaj číslo 5, kterou jezdí do školy, zastavuje na zastávce každých šest minut, zatímco tramvaj 12 jezdí tak často. O kolik více tramvají 12 obslouží zastávku za jednu hodinu než tramvají 5?

Výsledek: 5

Řešení: Spočítejme interval tramvaje 12. Když Jarda jede v tramvaji, jeho relativní rychlost vůči protijedoucí tramvaji je dvojnásobek skutečné rychlosti tramvají. To znamená že vidí, že vzdálenost dvou po sobě jedoucích tramvají ubíhá dvakrát rychleji. Tím pádem je reálná doba obsluhy zastávek dvakrát delší než interval, ve kterém Jarda pozoruje tramvaje v protisměru. Tramvaj 12 tedy jezdí na zastávku každé $2 \cdot 2 = 4$ minuty. Za hodinu tedy přijede na zastávku $60 : 4 = 15$ tramvají linky 12.
Obdobně $60 : 6 = 10$ tramvají 5 přijede na zastávku každou hodinu. Tramvaj 12 tedy za hodinu přijede na zastávku o $15 - 10 = 5$ vícekrát než tramvaj 5.

Příklad 18 . . . Dokážem to opravit?

Bořek stavitel chce vytáhnout krabici do vyššího podlaží budovy. Vzal si kladku, sestavil mechanismus jako na obrázku a přemýšlí. Krabice váží 25 kg a koeficient smykového tření mezi krabicí a zdí je 0,2. Jakou minimální silou (v newtonech) musí Bořek tahat za provaz, aby se krabice pohnula nahoru?



Výsledek: 250

Řešení: Musíme se zamyslet, jak tření ovlivňuje krabici. Třecí síla působí mezi dvěma tělesy, které na sebe působí určitou tlakovou silou. V našem případě ale krabice žádnou tlakovou silou na zeď nepůsobí, takže na krabici nepůsobí žádná třecí síla. To znamená, že jedinou silou (kromě té, kterou tahá Bořek) působící na krabici je tíhová síla $F_g = mg$, kde $m = 25\,\mathrm{kg}$ je hmotnost krabice. Bořek musí tedy tahat silou F se stejnou velikostí, jako je tíhová síla krabice, tedy $F = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Příklad 19 ... Bobule

Karolína pořádá ochutnávku svých džemů. Ve spíži má 10 sklenic malinového, 15 borůvkového, 7 ostružinového, 15 brusinkového a 9 jahodového džemu. Chce vzít alespoň jednu sklenici každého typu. Navíc ví, že její kamarádi mají nejraději borůvky a maliny, proto chce vzít alespoň 2 sklenice malinového džemu a 5 borůvkového. Ve spíži je ale tma a není schopná rozeznat jednotlivé sklenice s džemem od sebe. Kolik minimálně sklenic musí Karolína vzít, aby splnila všechny své požadavky?

Výsledek: 50

Řešení: Požadavky Karolíny jsou vzít si alespoň 2 malinové, 5 borůvkových, 1 ostružinovou, 1 borůvkovou a 1 jahodovou sklenici džemu. Zamyslíme se nad tím, co by se stalo, kdyby některý z těchto požadavků nebyl splněn. Nejhorší takový případ, aby neměla 2 malinové je, když si vezme všechny ostatní sklenice a 1 malinovou k tomu, tedy $1+15+7+15+9 = 47$ sklenic. Pokud si jich vezme 48, tento problém nemůže nastat. Podobně pro borůvky by problém nastal, pokud by vzala všechny ostatní marmelády a 4 borůvkové k tomu, tedy celkem $10 + 4 + 7 + 15 + 9 = 45$ sklenic. Celkem tedy musí vzít minimálně 46 sklenic. Pokud opakujeme stejný nápad pro ostružiny, brusinky a jahody, zjistíme, že musí vzít alespoň $(10 + 15 + 0 + 15 + 9) + 1 = 50$, $(10+15+7+0+9)+1 = 42$ nebo $(10+15+7+15+0)+1 = 48$ sklenic. Zkombinujeme-li všechny podmínky, zjistíme, že jich bude dosaženo, pokud vybereme nejvyšší z čísel 48, 46, 50, 42, 48. Karolína tedy bude muset vzít 50 sklenic džemu.

Příklad 20 ... Tour de Náboj

Trasa cyklistického závodu se skládá ze samých kopců – jedna třetina jsou výjezdy a dvě třetiny sjezdy. Po závodě byla zveřejněna analýza jízdy vítěze. Ten dosáhl průměrné rychlosti 24 km/h a ve výjezdu strávil třikrát více času než ve sjezdu. Jaká byla průměrná rychlost vítěze ve sjezdových pasážích (v kilometrech za hodinu)?

Výsledek: 64

Řešení: Nechť je s délka dráhy a t čas vítěze v cíli. Víme, že průměrná rychlost vítěze je 24 km/h, tedy že $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$.
Dvě třetiny vzdálenosti závodu byly z kopce, takže vzdálenost částí z kopce je $\frac{2}{3}s$. Dále víme, že vítěz strávil 3krát víc času v částech do kopce, tedy $\frac{1}{4}t$ v částech z kopce. Průměrná rychlost z kopce je tedy:

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t}\,.$$

Po dosazení $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$ zjistíme, že průměrná rychlost je číselně:

$$v = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\mathrm{km/h} = 64\,\mathrm{km/h}\,.$$

Příklad 21 ... Magický čtverec

Kačka si hraje s takzvaným magickým čtvercem. Musí čísly vyplnit políčka v tabulce 3×3 tak, aby součet čísel v každém řádku, sloupci i obou diagonálách byl stejný. Kačka už vyplnila některá z čísel. Jaký je součet pěti čísel, která ještě nejsou zapsaná v tabulce?

17	16	
15		19

Výsledek: 95

Řešení: Podívejme se na poslední řadu a druhý sloupec. Víme, že musí mít stejný součet a zároveň spolu sdílí jeden čtverec. Druhý sloupec a poslední řada musí mít tedy i stejný součet na pozicích, které nemají sdílené. Součet 15 a 19 tedy musí být stejný jako součet čísla 16 a čísla v prostředním čtverci. Tenhle součet je $15 + 19 = 34$, takže číslo v prostředním sloupci musí být $34 - 16 = 18$.

17	16	
	18	
15		19

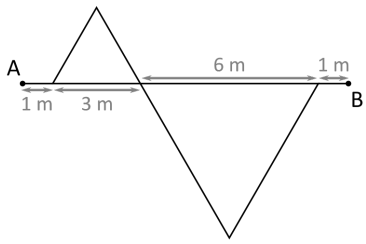
Tím jsme dokončili součet na jedné z diagonál, takže součet čísel v každém řádku, sloupci i diagonále musí být $17 + 18 + 19 = 54$. Nyní již je snadné doplnit zbytek tabulky.

17	16	21
22	18	14
15	20	19

Nakonec spočítáme součet čísel, která Kačka doplňovala: $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

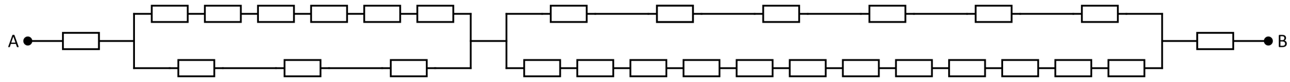
Příklad 22 ... Svářečská

Anička svařila z drátu se specifickým elektrickým odporem $0{,}1\,\Omega/\mathrm{m}$ zvláštní útvar. Skládal se z drátu o délce 1 m, rovnostranného trojúhelníku o délce strany 3 m, rovnostranného trojúhelníku o délce strany 6 m a drátu o délce 1 m. Celý výtvor můžete vidět na obrázku. Spočítejte celkový odpor tohoto obvodu mezi vrcholy A a B v ohmech.



Výsledek: 0,8

Řešení: Můžeme zaměnit každý 1 m drátu za rezistor s odporem $R_0 = 0{,}1\,\Omega$. Pokud tak učiníme, dostaneme následující diagram:



Nyní můžeme použít klasické vzorce pro rezistory zapojené sériově a paralelně pro výpočet celkového odporu mezi body A a B. Zjistíme, že celkový odpor je:

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Příklad 23 ... Horká koupel

Anežka nemá ráda studenou vodu v bazénu, proto se rozhodla koupit si solární panely. Její bazén má objem 150 hl a ráda by ho ohřála z 29 °C na 33 °C za 10 hodin přímého slunečního světla. Ví, že $1\,\mathrm{m}^2$ solárních panelů na přímém slunečním světle má výkon 1,4 kW. Kolik m^2 solárních panelů bude Anežka potřebovat, aby ohřála vodu v bazénu na žádanou teplotu v požadovaném čase?

Výsledek: 5

Řešení: Voda o objemu $V = 150\,\mathrm{hl}$ má hmotnost $m = V\rho_{voda}$. K ohřátí vody z teploty $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ na $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$ musíme dodat teplo $Q = c_{voda}m(t_2 - t_1) = c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)$. Tohle teplo se musí rovnat energii, kterou získáme ze solárních panelů. Ty mají výkon $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$ na jednotku povrchu, takže pokud je celková plocha solárních panelů S, pak mají výkon $P = P_0S$. Za čas $t = 10\,\mathrm{h}$ tedy vykonají práci $W = Pt = P_0St$. Tato hodnota se musí rovnat energii dodané vodě, dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} W &= Q \\ P_0St &= c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1) \\ S &= \frac{c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)}{P_0t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m}^3 \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Anežka potřebuje $5\,\mathrm{m}^2$ solárních panelů.

Příklad 24 ... Fotbal na Matfyzu

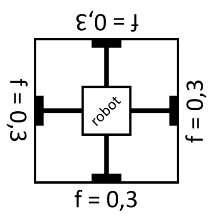
Tým fyziků hraje v soutěži Náboj cup proti týmu matematiků. V poločase bylo skóre 3 : 2 pro fyziky, ale zápas skončil 4 : 5 vítězstvím matematiků. Kolik je různých pořadí, ve kterých mohly padnout góly?

Výsledek: 40

Řešení: Můžeme reprezentovat pořadí gólů pomocí řetězce písmen F a M, kde F reprezentuje gól vstřelený fyziky a M gól vstřelený matematiky. S touto notací vidíme, že existuje 10 možných pořadí, ve kterém mohly být zahrány góly v prvním poločase: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM, FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM, FFFMM. Stejně určíme počet možností, ve kterých mohly být vstřeleny góly ve druhém poločase jako 4: FMMM, MFMM, MMFM, MMMF. Protože jsou první a druhý poločas nezávislé části zápasu, každé pořadí gólů z prvního poločasu můžeme spárovat s jakýmkoliv pořadí z druhého poločasu. Celkový počet, ve kterém mohly být zahrány góly, je tedy $10 \cdot 4 = 40$.

Příklad 25 ... Stabilní robot

Vědci chtějí zkoumat hlubokou díru s čtvercovým průřezem, kterou vykopali. Vypustili tedy do díry malého robota s hmotností 15 kg. Aby se robot stabilizoval, začal tlačit svými čtyřmi rameny na stěny díry. Každé rameno tlačilo silou F. Vědci rychle zjistili, že koeficient tření mezi rameny a stěnami díry je 0,3. Také nakreslili náčrtek situace, jako je na obrázku. Jaká je nejmenší síla F v newtonech, kterou musí robot tlačit, aby zůstal stabilní?



Výsledek: 125

Řešení: Pokud robot tlačí silou F do všech stran, pak třecí síla na každé straně je $F_t = fF$ a míří nahoru, kde f je koeficient tření $f = 0{,}3$. Naopak tíhová síla $F_g = mg$ působí na robota směrem dolů. Aby byl robot stabilní, musí být tíhová síla stejně velká, jako součet všech čtyř třecích sil. Dostáváme tedy:

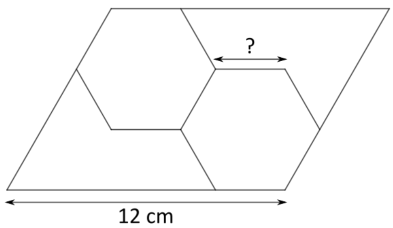
$$F_g = 4F_f$$
$$mg = 4fF$$
$$F = \frac{mg}{4f}$$

Síla F tedy musí být:

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\mathrm{N}$$

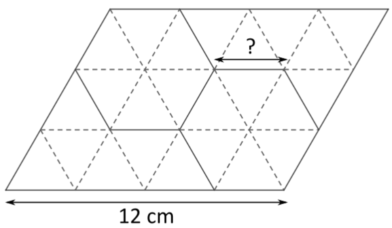
Příklad 26 . . . Nové logo

Pavla vytvářela nové logo pro svůj obchod. Začala nakreslením rovnoběžníku s délkou jedné strany 12 cm. Zjistila, že může do rovnoběžníku nakreslit dva pravidelné šestiúhelníky, jako na obrázku. Jaká je délka strany těchto šestiúhelníků v centimetrech?



Výsledek: 3

Řešení: Každý šestiúhelník můžeme rozdělit na 6 stejných rovnostranných trojúhelníků. Díky tomu můžeme tyto stejné trojúhelníky dokreslit i kolem šestiúhelníků, jak je načrtnuto zde:



Odtud jasně vidíme, že délka strany šestiúhelníku (která má stejnou velikost jako strana trojúhelníků) je $12\,\mathrm{cm} : 4 = 3\,\mathrm{cm}$.

Příklad 27 . . . Na dno oceánu

Pirát Patrik bojoval s pirátem Ivanem. Jeho loď byla zasažena dělovou koulí a nyní do jeho lodi vniká 50 l vody každou sekundu. Patrik začal počítat, kolik času mu zbývá, než se jeho loď úplně potopí. Aproximoval svou loď jako dutý kvádr s rozměry $10\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ a hmotností 5 t. Kolik času v sekundách Patrikovi zbývá, než se jeho loď kompletně potopí?

Výsledek: 1100

Řešení: Loď se kompletně potopí ve chvíli, kdy tíhová síla bude stejně velká jako síla vztlaková. Maximální vztlaková síla, která může působit na loď s objemem V, je $F_{vz} = V\rho_{voda}g$. Tíhovou sílu můžeme rozdělit na dvě části – tíhovou sílu, která působí na loď, a tíhovou sílu působící na vodu, která již stihla do lodi natéct.

Tíhová síla působící na loď s hmotností m je rovna m is $F_{g_1} = mg$. Voda do lodi vtéká s průtokem Q, takže po čase t nateče voda o objemu $V' = Qt$. Tíhová síla působící na vodu v lodi tedy bude $F_{g_2} = Qt\rho_{voda}g$. Získáme tedy čas t z celkové rovnice $F_{vz} = F_{g_1} + F_{g_2}$, t:

$$V\rho_{voda}g = mg + Qt\rho_{voda}g$$
$$t = \frac{V\rho_{voda} - m}{Q\rho_{voda}}$$

Loď se tedy potopí za čas

$$t = \frac{V\rho_{voda} - m}{Q\rho_{voda}} = \frac{(10\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m})\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} - 5000\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{m^3/s}\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}} = 1100\,\mathrm{s}$$

Příklad 28 ... Součet letopočtů

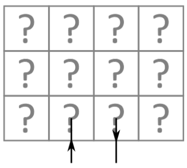
Eva a Bětka počítaly součet letopočtů, které prožily. Ukázalo se, že Evin výsledek byl o 19945 větší než Bětčin. V jakém roce se Eva narodila?

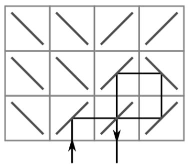
Výsledek: 1990

Řešení: Obě dívky přičítaly letopočty od roku, ve kterém se každá narodila, až po rok 2023. Eva získala vyšší výsledek, což znamená, že přičítala i letopočty, které Bětka ne. Protože každý rok můžeme aproximovat na 2000, počet sčítanců, které přičítala jen Eva, je $19945 : 2000 \doteq 10$. To znamená, že čísla přidaná pouze Evou jsou x, $x+1$, ..., $x+9$, kde x je rok, ve kterém se Eva narodila. Jejich součet je $10\,x + 45$. Tímto způsobem získáme rovnici $10x + 45 = 19945$, ze které zjistíme, že se Eva narodila v roce $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

Příklad 29 ... Návrat optické hry

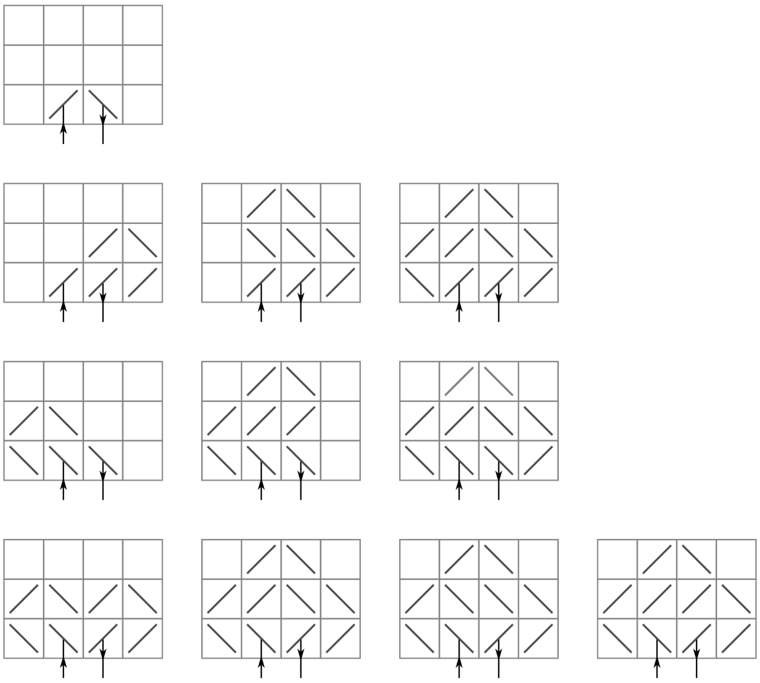
Marcel měl optickou hru, která se skládala z tabulky o rozměrech 3×4, jak je vidět na levém obrázku. Je třeba umístit oboustranné zrcadlo na každý čtverec tak, že úhel mezi stranami čtverce a zrcadlem je 45°. Tentokrát si Marcel vzal laser a vyslal paprsek světla, který se vrátil jako na obrázku. Jedna z možných situací, která se mohla stát, je znázorněna na pravém obrázku. Teď se však Marcel zamyslel nad jinou otázkou než předtím: Kolik různých trajektorií (spolu s tou na pravém obrázku) by mohlo světlo mít, aby paprsek vstoupil i vystoupil tak, jak je znázorněno?





Výsledek: 11

Řešení: Máme vždy dvě možnosti orientace prvního a posledního zrcadla. Díky tomu dostaneme možnosti dalšího doplnění zrcadel, jak je vidět na následujících obrázcích (pro lepší představu nekreslíme paprsky a zrcadla, jejichž orientace je nepodstatná):



Vidíme tedy $1 + 3 + 3 + 4 = 11$ možných trajektorií paprsku.

Příklad 30 ... Rovnoběžník

Andrej nakreslil takový obdélník $ABCD$, že $AB : BC = 9 : 8$. Body E a F vyznačil po řadě na úsečkách BC a CD tak, že $CE = BE$ a $DF = 2 \cdot FC$. Poté zkonstruoval čtyřúhelník $ABEF$. Zeptal se kamaráda Miloše, jaký je obvod čtyřúhelníku $ABEF$ v centimetrech a svého kamaráda Václava na hodnotu obsahu čtyřúhelníku $ABEF$ v centimetrech čtverečních. Ukázalo se, že dostali stejnou číselnou hodnotu. Určete hodnotu obvodu obdélníku $ABCD$ v centimetrech. Výsledek odevzdejte jako zlomek v základním tvaru.

Výsledek: $\frac{68}{3}$

Řešení: Nechť jsou délky stran obdélníku $ABCD$ $AB = 9x$ a $BC = 8x$.
Nejprve spočítáme obvod čtyřúhelníku $ABEF$. Délky odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku ECF jsou $4x$ a $3x$. Díky Pythagorově větě získáme $EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. Podobně to bude i s pravoúhlým trojúhelníkem FDA, kde jsou délky stran $6x$, $8x$ a $FA = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Proto bude obvod čtyřúhelníku $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Nyní zjistíme obsah čtyřúhelníku $ABEF$. Pravoúhlé trojúhelníky EFC a FDA mají obsahy $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ a $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. Obsah obdélníku $ABCD$ je $(9x) \cdot (8x) = 72x^2$, takže obsah čtyřúhelníku $ABEF$ je $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$. Víme, že číselné hodnoty obvodu a obsahu čtyřúhelníku $ABEF$ jsou stejné, což znamená:

$$\frac{28x}{\text{cm}} = \frac{42x^2}{\text{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\text{cm} = \frac{2}{3}\text{cm}$$

Zbývá vypočítat obvod obdélníka $ABCD$, který je $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}\text{cm} = \frac{68}{3}\text{cm}$.

Příklad 31 ... Pracující červ

Homogenní červ s hmotností 3 g a délkou 30 cm chce na zahradě přelézt krychli o hraně 10 cm. Červ poleze tak, jako na obrázku. Jaká je práce, kterou musí vykonat v mJ?
Poznámka: Tření mezi červem a krychlí můžete zanedbat

Výsledek: 2

Řešení: Práce, kterou červ vykoná, bude rovna maximální potenciální energii, kterou červ získá při šplhání na krychli (za předpokladu, že jeho potenciální energie je zpočátku nulová). Je tedy jasné, že maxima bude dosaženo přesně v okamžiku, kdy se bude červ nacházet v poloze, jako je znázorněno na obrázku v zadání úlohy (čím více jeho částí je výš, tím vyšší je potenciální energie).
Nyní rozdělíme červa na 3 části (bez obav, budou regenerovat) – dvě vertikální a jedna horizontální (jako na obrázku v zadání). Všechny mají délku 10 cm, což je jedna třetina délky červa. Ten je homogenní, takže všechny 3 části mají hmotnost $m_0 = 3\,\mathrm{g} : 3 = 1\,\mathrm{g}$. Vodorovná část má své těžiště ve výšce $h_2 = 10\,\mathrm{cm}$, takže potenciální energie této části je $E_2 = m_0 g h_2 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}001\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{mJ}$. Vertikální části mají svá těžiště ve výšce $h_1 = h_3 = 5\,\mathrm{cm}$, takže jejich potenciální energie je $E_1 = E_3 = m_0 g h_1 = m_0 g h_3 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 0{,}0005\,\mathrm{J} = 0{,}5\,\mathrm{mJ}$.
Maximální potenciální energie červa tedy bude $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\mathrm{mJ} + 1\,\mathrm{mJ} + 0{,}5\,\mathrm{mJ} = 2\,\mathrm{mJ}$, což je také práce, kterou červ musí vykonat.

Příklad 32 ... Zapomenuté heslo

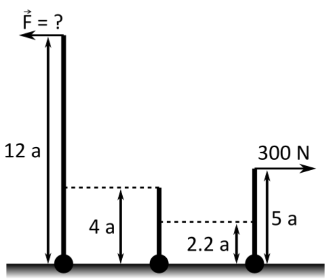
Tereza má všechny své nejcennější věci v trezoru chráněném 5ti písmenným heslem. Bohužel ale nepoužívá správce hesel a úplně zapomněla, jaké heslo má. Vzpomněla si ale, že první 2 písmena byla NA a že používala pouze písmena z 26ti písmenné anglické abecedy. Aby otevřela trezor, zkoušela všechny možné kombinace zbývajících 3 písmen v abecedním pořadí (AAA, AAB, AAC, ...). Pokud je její původní heslo NABOJ, kolik bude potřebovat pokusů na odemčení?

Výsledek: 1050

Řešení: Úlohu si můžeme rozdělit na menší části. Nejprve zjistíme, kolik pokusů potřebujeme, abychom získali ABA. Vzhledem k tomu, že v anglické abecedě je 26 písmen, bude na změnu posledního písmena potřeba 26 pokusů. A co když chceme získat BAA? Za každých 26 iterací posledního písmene se hodnota druhého písmene zvýší o 1. Takže abychom se dostali z AAA do BAA, potřebujeme $26 \cdot 26 = 676$ pokusů. Nyní, abychom se dostali z BAA k BOA, potřebujeme $26 \cdot 14 = 364$ pokusů, protože O je 15-té písmeno abecedy a musíme vyzkoušet všech 14 písmen před ním. Konečně, J je 10-té písmeno, takže potřebujeme dalších 10 pokusů, abychom se dostali z BOA do BOJ. Dohromady tedy potřebujeme $676 + 364 + 10 = 1050$ pokusů.

Příklad 33 ... Patrik tahá za lana

Patrik si vzal 3 páky, jejichž délky byly $12a$, $4a$, $5a$. Propojil je horizontálními lany tak, jako na obrázku. Začal tahat za páku nejvíc vpravo silou 300 N. Jak velkou silou v newtonech musí tahat za levou páku, aby mechanismus zůstal v klidu?



Výsledek: 125

Řešení: Mechanismus zůstává v klidu pouze ve chvíli, kdy moment setrvačnosti působící na každou z pák bude nulový. Musíme se tedy podívat na momenty setrvačnosti působící na páky. Nejprve si popíšeme chování lana. V každém laně bude určité napětí, takže lano bude působit na obě páky silou o stejné velikosti, jako je velikost tohoto napětí. Takže například lano spojující střední a pravou páku bude působit na střední páku (vpravo) stejnou silou jako na pravou páku (doleva). Navíc si všimněme, že tyto síly působí také ve stejné výšce, takže působí ve stejné vzdálenosti od os otáčení pák. Proto také každé lano působí na obě páky momentem setrvačnosti o stejné velikosti.
To vlastně znamená, že prostřední páku můžeme ignorovat. Síla působící na pravou páku skutečně způsobuje určitý moment setrvačnosti o velikosti M na pravé páce. To musí být kompenzováno momentem setrvačnosti lana připevněného k pravé páce. Vzhledem k tomu, že lana přenášejí moment setrvačnosti, musí být ten, kterým pravé lano působí na střední páku, opět M. Podobně to bude i na levé páce, kde bude mít opět velikost M.
Aby mechanismus zůstal v klidu, musí mít dvě relevantní síly moment setrvačnosti o stejné velikosti. To nás vede k rovnici:

$$F \cdot (12a) = 300\,\mathrm{N} \cdot (5a)$$
$$F = \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}$$

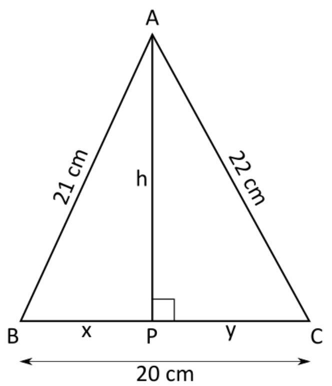
Patrik tedy musí působit silou o velikosti 125 N.

Příklad 34 ... Velký trojúhelník

Marek nakreslil na tabuli trojúhelník s délkou stran 20 cm, 21 cm a 22 cm. Potom nakreslil výšku na stranu s délkou 20 cm. Výška rozdělila tuto stranu na dvě části. Jaký je kladný rozdíl těchto částí v centimetrech?

Výsledek: 2,15

Řešení: Určíme délky stran a vrcholy tak, jak je ukázáno na obrázku:



Víme, že trojúhelníky ABP a ACP jsou pravoúhlé. Díky Pythagorově větě získáme:

$$h^2 + x^2 = (21\,\mathrm{cm})^2$$
$$h^2 + y^2 = (22\,\mathrm{cm})^2$$

Pokud vyjádříme h^2 z obou rovnic, můžeme je následně dát do jedné rovnosti:

$$(21\,\mathrm{cm})^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - y^2$$
$$y^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - (21\,\mathrm{cm})^2$$

Nyní na obě strany rovnice aplikujeme rovnost $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

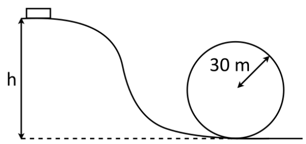
$$(y-x)(y+x) = (1\,\mathrm{cm})(43\,\mathrm{cm}) = 43\,\mathrm{cm}^2$$

Nicméně víme, že $y + x = 20\,\mathrm{cm}$. Proto rozdíl délek $y - x$, který potřebujeme najít, bude:

$$y - x = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{x+y} = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{20\,\mathrm{cm}} = \frac{43}{20}\,\mathrm{cm} = 2{,}15\,\mathrm{cm}$$

Příklad 35 ... Na horské dráze

Matěj si četl knížku, kde se dozvěděl následující informaci: Pokud se auto s hmotností m pohybuje rychlostí v v zatáčce, která je částí kruhu o poloměru r, pak musí existovat dostředivá síla $F_d = \frac{mv^2}{r}$, která působí na auto.
Později šel Matěj do zábavního parku, kde ho zaujala horská dráha. Na specifickém úseku nechali volně rozjet vozík z výšky h, který pak projel smyčkou o poloměru 30 m, jak je znázorněno na obrázku. Jaká je minimální výška h v metrech, která je třeba k tomu, aby vozík projel smyčkou a nespadl?



Výsledek: 75

Řešení: Nechť je m hmotnost vozíku, $r = 30\,\mathrm{m}$ poloměr smyčky a v rychlost v nejvyšším bodě smyčky.
Z první části úlohy víme, že v nejvyšším bodě musí být určitá dostředivá síla $F_d = \frac{mv^2}{r}$. Jsou dvě síly, které mohou na vozík působit v tomto směru – gravitační síla $F_g = mg$ a určitá síla od smyčky. My ovšem chceme dostředivou sílu co nejmenší (Čím větší je dostředivá síla, tím vyšší rychlost musí vozík mít, tedy tím větší potenciální energii by musel mít na začátku). Protože se nemůžeme zbavit tíhové síly, musí být dostředivá síla alespoň $F_d = F_g$. Z toho dostáváme:

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$
$$\frac{v^2}{r} = g$$
$$v^2 = rg$$

Nyní se podívejme na energie. Na začátku měl vozík pouze potenciální energii $E_1 = mgh$. Nahoře ve smyčce má poté vozík potenciální i kinetickou energii. Je ve výšce $2r$ nad zemí s rychlostí v, takže jeho celková energie je $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. Energie se musí zachovat, takže platí $E_1 = E_2$. Zkombinujeme-li tento vzorec s rovnicí v^2, dostaneme

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$
$$gh = 2gr + \frac{1}{2}rg$$
$$h = \frac{5}{2}r$$

Tím pádem by vozík měl sestupovat z výšky $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{m}$.

Příklad 36 ... Turnaj v piškvorkách

Piškvorkového turnaje se zúčastnilo 24 hráčů. Každý hráč může hrát s některým dalším hráčem, ale vždy probíhá pouze právě jeden zápas. V určitý moment turnaje si Marek všiml, že neexistuje skupina hráčů, kde každý hráč hrál alespoň 2 zápasy s ostatními hráči ze skupiny. Jaký je maximální počet zápasů, který se do té doby odehrál?

Výsledek: 23

Řešení: Řešení úlohy se přirozeně dělí na dvě části. V první chceme ukázat, že mohlo být odehráno 23 zápasů. Ve druhém kroku ukážeme, že pokud bylo odehráno 24 zápasů, bude existovat skupina neodpovídající zadání. To bude znamenat, že 23 je hledaným řešením.
První část: Očíslujme hráče $1, 2, \ldots, 24$. Nechť jsou zápasy hrány mezi 1 a 2, 2 a 3, ..., 23 a 24. Vyberme si libovolnou skupinu hráčů. V každé takové skupině je hráč s nejnižším číslem, označme ho jako P. V takové skupině mohl hráč P hrát pouze s hráčem $P+1$, protože hráč $P-1$ nemůže být ve skupině (potom by byl on hráčem s nejnižším číslem). Hráč s číslem P tedy nehrál s alespoň 2 hráči z jeho skupiny. Tohle platí pro libovolnou skupinu, takže neexistuje skupina hráčů, která by vyvracela podmínku ze zadání. 23 zápasů tedy mohlo být odehráno.
Druhá část: Musíme dokázat, že pokud bylo odehráno 24 zápasů, existuje vždy skupina s vlastností ze zadání. Pokud nějaká dvojice hráčů spolu hrála alespoň dva zápasy, tvořili by takovou skupinu, takže budeme předpokládat, že takový pár neexistuje.
Nyní předpokládejme, že každý hráč hrál alespoň 2 zápasy. Vybereme hráče následujícím způsobem: Začněme libovolným hráčem a nazvěme ho P_0. Ten hrál s některým jiným hráčem, řekněme s P_1. Hráč P_1 hrál s alespoň dvěma hráči, takže musí existovat hráč P_2 rozdílný od P_0, se kterým P_1 hrál. Obdobně najdeme hráče P_3, lišícího se od P_1 takového, že P_2 hrál s P_1 a P_3. Tímto způsobem můžeme pokračovat ve výběru hráčů. V některém bodě se dostaneme ke hráči, kterého jsme již dříve označili. V tuto chvíli máme hráče $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_n$ s vlastností, že P_i hrál s hráči P_{i-1} a P_{i+1}, a hráči P_k a P_n hráli spolu. Jinými slovy je můžeme uspořádat do kruhu, kde každý hrál se svými sousedy. To dokazuje, že tato skupina má požadovanou vlastnost. Pokud tedy každý hráč hrál alespoň 2 zápasy, pak máme dokázáno.
Zbývá nám pouze zkontrolovat co se stane, pokud některý hráč hrál méně než 2 zápasy. V tom případě na takového hráče zapomeneme. Tím nám zbyde méně hráčů, ale celkový počet her zůstane vždy alespoň dvojnásobný oproti počtu zbývajících hráčů. Po odstranění jednoho hráče máme tedy následující možnosti: buď všichni zbývající hráči hráli alespoň 2 zápasy, nebo je zde znovu někdo, kdo hrál méně než 2 zápasy. V prvním případě nám předchozí argument ukazuje, že existuje skupina splňující podmínku ze zadání. V opačném případě máme dalšího hráče, kterého můžeme vynechat a takhle můžeme pokračovat. Nakonec se dostaneme ke 3 zbývajícím hráčům, kteří hráli alespoň 3 zápasy mezi sebou. Tohle je ale pouze možné, pokud hráli proti sobě a tím nám dávají skupinu, kterou hledáme.
To dokazuje, že pokud bylo odehráno 24 zápasů, pak by taková skupina existovala.
Pokud zkombinujeme všechny části, získáme, že zápasů mohlo být odehráno nejvýše 23.

Příklad 37 ... Uspěchané násobení

Lucku by zajímalo, jaký je součin kladných po sobě jdoucích lichých čísel od jedné do třiceti jedna, tedy jaké je číslo $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Vytáhla tedy kalkulačku a začala ve spěchu násobit čísla. Pak si ale uvědomila, že mohla na některé z nich při zadávání zapomenout. Všimla si, že číslo na místě stovek na kalkulačce je 4. Jaké číslo Lucka vynechala?

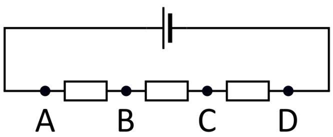
Výsledek: 25

Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, jaká pravidla má dělitelnost číslem 125. Kritérium pro tuto dělitelnost je, že číslo složené z posledních 3 číslic musí být dělitelné 125 (to je podobné pravidlům dělitelnosti čísly 2, 4, 8, 16 ..., ale pro čísla 5, 25, 125 ...). Proč tomu tak je? Napišme si jakékoliv číslo jako $1000A + B$, kde $B < 1000$. B je tedy číslo formované posledními 3 číslicemi. Všimněme si, že 1000 je dělitelné 125, protože $1000 = 8 \cdot 125$. Pokud tedy chceme, aby číslo $1000A + B$ bylo dělitelné 125, musí být B dělitelné 125 a to potvrzuje naše kritérium.

Nyní se podíváme, jaké to má pro nás důsledky. Jediná nejvýše trojciferná čísla dělitelná 125 jsou 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750 a 875. Žádné z nich nezačíná číslicí 4. Tím pádem násobky 125 nemohou mít číslici 4 na místě stovek.
Nyní se vraťme k našemu původnímu problému. Víme, že číslo na místě stovek je 4, takže Lucčino číslo nemůže být násobek 125. Pokud by nevynechala jediné číslo, její výsledek by byl dělitelný $5 \cdot 15 \cdot 25$. Výsledný součin tedy nemůže obsahovat prvočinitele 5 čtyřikrát. Musíme tedy odstranit 5 minimálně dvakrát, což se nám podaří pouze vynecháním čísla 25. To znamená, že Lucka zapomněla právě číslo 25.

Příklad 38 ... Nečitelné napětí

Martin má svůj oblíbený elektrický obvod, který je znázorněn na obrázku. Vybral si na něm body A, B, C a D, změřil napětí mezi každou dvojicí těchto bodů a zapsal si výsledné hodnoty na papír. Po nějakém čase ten papír našel, ale jedna hodnota byla nečitelná. Ostatních pět hodnot bylo v nějakém pořadí 7 V, 8 V, 10 V, 15 V a 18 V. Martin začal přemýšlet nad hodnotami na papíře a došel k tomu, že jsou dvě možné hodnoty pro šestou hodnotu napětí. Jaký je součet těchto dvou hodnot ve voltech?
Poznámka: Odpor rezistorů nemusí být vždy stejný.



Výsledek: 28

Řešení: Napětí mezi dvěma body popisuje velikost rozdílu potenciálů v těchto dvou bodech. Potenciál vyjadřuje pouze (elektrickou) potenciální energii částice s nábojem 1 C. V každém z bodů A, B, C a D by tato částice měla určitou potenciální energii. Takové číslo můžeme přiřadit každému z bodů. Napětí potom pouze popisuje rozdíly mezi těmito čísly.
Můžeme tedy reformulovat úlohu na přiřazení čtyř čísel k A, B, C a D (tato písmena nyní nemají nic společného s písmeny v původním zadání), tak, aby jejich rozdíly byly 7, 8, 10, 15, 18 a poslední neznámý. Všimněme si jedné zajímavé vlastnosti. Vezmeme 3 z našich čísel, řekněme X, Y a Z, a uspořádejme je tak, že $X > Y > Z$. Potom rozdíl $X - Z$ je součet rozdílů $X - Y$ a $Y - Z$ (zřejmě $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Pokud tedy vezmeme libovolná 3 čísla, pak rozdíl mezi nimi bude mít tu vlastnost, že jedno bude součtem zbylých dvou.
Nyní se vraťme zpět k našemu problému. Řekněme, že náš neznámý rozdíl je rozdíl mezi C a D. Vezměme čísla A, B a C. Všechny rozdíly mezi nimi jsou mezi známými. Protože jeden z nich musí být součet zbylých dvou, máme pouze dvě možnosti: $7 + 8 = 15$ nebo $8 + 10 = 18$. Obdobná vlastnost musí platit i pro trojici A, B a D, takže jedna z trojic bude mít rozdíly 7, 8 a 15 a druhá bude mít rozdíly 8, 10 a 18. Řekněme, že trojice A, B a C má (v určitém pořadí) rozdíly 7, 8 a 15. Trojice A, B, C a A, B, D se shodují pouze v rozdílu mezi A a B, takže tento rozdíl musí být 8 (je to jediný rozdíl, ve kterém se trojice 7, 8, 15 a 8, 10, 18 shodují).
Čísla A a B můžeme vzájemně zaměnit, takže si můžeme vybrat rozdíl mezi A a C takový, aby byl 15, a rozdíl mezi B a C 7. Ve trojici A, B a C víme, že obě čísla A a C jsou buď největší nebo nejmenší. Vybereme je tak, že A je to největší. Nyní máme dvě možnosti, jaký může být rozdíl mezi D a čísly A a B.
Případ 1: Rozdíl mezi A a D je 18. Dostáváme, že ve trojici A, B a D je jedno z čísel A a D největši a druhé nejmenší. Ve trojici A, B a C jsme si ale vybrali, že A je největší, takže je větší, než B. Tím pádem víme, že ve trojici A, B, D, je A největší. Z toho plyne, že A je o 15 větší než C a o 18 větší než D. Takže rozdíl mezi C a D je $(A - 15) - (A - 18) = 3$. Tohle je naše první řešení.
Případ 2: Rozdíl mezi A a D je 10. To znamená, že ve trojici A, B a D je jedno z čísel B a D největší a druhé nejmenší. Obdobně jako v předchozí části víme, že A je větší než B, takže B musí být nejmenší. Takže C je o 7 menší než B a D je o 18 větší než B. To znamená, že rozdíl mezi C a D je $(B + 18) - (B - 7) = 25$, což je naše druhé řešení.

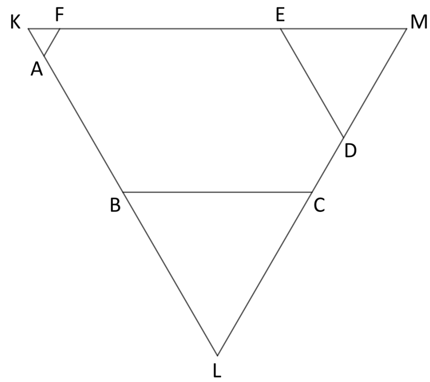
Zjistili jsme, že naše neznámé hodnoty mohou být 3 nebo 25. V našem původním problému to vyjadřuje fakt, že hodnoty napětí mohou být pouze 3 V nebo 25 V. Součet obou možných napětí je tedy $3\,\mathrm{V} + 25\,\mathrm{V} = 28\,\mathrm{V}$.

Příklad 39 ... Šestiúhelníkové hřiště

Ve městě je hřiště ve tvaru konvexního šestiúhelníku, jehož vnitřní úhly jsou 120°. Délky stran hřiště jsou 10 m, 12 m, 4 m, 8 m, 14 m, 2 m. Víme, že plocha tohoto hřiště může být napsána jako $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Spočítejte hodnotu a.

Výsledek: 91

Řešení: Nejprve se podíváme na obsah rovnostranného trojúhelníku s délkou strany x. S pomocí Pythagorovy věty snadno zjistíme, že výška tohoto trojúhelníku je $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Plocha rovnostranného trojúhelníku je tedy $\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Nyní se vraťme k původnímu příkladu. Pojmenujme vrcholy šestiúhelníku A, B, C, D, E, F tak, že $AB = 10\,\mathrm{m}$, $BC = 12\,\mathrm{m}$, $CD = 4\,\mathrm{m}$, $DE = 8\,\mathrm{m}$, $EF = 14\,\mathrm{m}$, $FA = 2\,\mathrm{m}$. Vepíšeme úsečky AB, CD a EF do trojúhelníku KLM jako na obrázku:



Protože vnitřní úhly v šestiúhelníku $ABCDEF$ byly 120°, získáme, že trojúhelníky KAF, LBC a MDE jsou rovnostranné. To nám ovšem dává, že i trojúhelník KLM je rovnostranný s délkou strany 24 m.
Obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ získáme jako rozdíl obsahu rovnostranného trojúhelníku KLM a součtu obsahů rovnostranných trojúhelníků KAB, LBC a MDE. Obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ je tedy:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right) = (12^2 - 1^2 - 6^2 - 4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2 = 91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

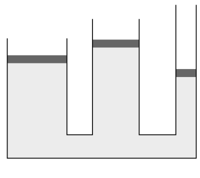
To znamená, že hodnota a je 91.

Příklad 40 ... Pokusný křeček

Majo má doma hydraulický systém se 3 písty jako na obrázku. Ví, že plocha prvního pístu je stejná jako součet ploch zbývajících dvou. Majo má také křečka, se kterým udělal několik následujících experimentů:

Když postaví křečka na první píst, posune se dolů o 15 mm.
Když postaví křečka na druhý píst, posune se dolů o 30 mm.

O kolik centimetrů se posune třetí píst, pokud na něj Majo postaví křečka?



Výsledek: 75 mm

Řešení: Označme si plochu prvního pístu S_1, druhého pístu S_2 a třetího S_3. Ze zadání víme, že $S_1 = S_2 + S_3$. Dále nechť m je hmotnost křečka a $\Delta h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ výška, o kterou se první píst pohne dolů, pokud na něm stojí křeček. Ve stejnou chvíli se druhý píst zvedne o Δh_2 a třetí píst o Δh_3. Po položení křečka na první píst se musí stát dvě věci. První z nich je, že voda z prvního pístu se přesune do dalších dvou. To nám dává vztah $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2 + S_3\Delta h_3$. Zároveň musí být tlak všech pístů stejný. Pokud p byl původní tlak v systému a ρ je hustota vody, potom dostáváme: $p + \frac{mg}{S_1} - \Delta h_1\rho g = p + \Delta h_2\rho g = p + \Delta h_3\rho g$. Můžeme odečíst p a dělit g, čímž dostaneme $\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$. Druhá část této rovnice nám dá, že $\Delta h_2 = \Delta h_3$. Po dosazení do první rovnice potom máme:

$$S_1\Delta h_1 = (S_2 + S_3)\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho$$

Případně v jiném tvaru:

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 = \Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \Delta h_2$$

Porovnáním těchto dvou rovnic dostaneme:

$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$

Nyní předefinujeme Δh_2 aby znamenalo výšku, o kterou se druhý píst posune dolů, když se na něj postaví křeček a obdobně Δh_3 pro třetí píst. Stejně jako výše zjistíme, že:

$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_2\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_3}\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_3\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2}\Delta h_3$$

Pokud vydělíme první dvě rovnice a využijeme, že $S_1 = S_2 + S_3$, dostaneme:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2S_1 - S_2}{S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}$$
$$S_2 = (2S_1 - S_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2S_1 - S_2)\frac{15\,\mathrm{mm}}{30\,\mathrm{mm}} = \frac{2S_1 - S_2}{2}$$
$$S_2 = \frac{2}{3}S_1$$

Ze vztahu $S_1 = S_2 + S_3$ dostáváme, že $S_3 = S_1 - S_2 = S_1 - \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_1$. Podílem první a třetí rovnice z předchozí soustavy rovnic dostaneme:

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\frac{\frac{1}{3}S_1}{S_1} = \frac{S_1 + \frac{2}{3}S_1}{\frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\Delta h_3 = 5\Delta h_1 = 5 \cdot 15\,\mathrm{mm} = 75\,\mathrm{mm}$$

Pokud tedy postavíme křečka na poslední píst, pohne se dolů o 75 mm.

Příklad 41 ... Zvláštní oblíbené číslo

Matyáš má oblíbené číslo. To je nejmenší přirozené číslo vyšší než 1, které má následující vlastnost: Pokud by Matyáš vynásobil součet jeho cifer sebou samým, dostane součin cifer svého oblíbeného čísla. Jaké je jeho oblíbené číslo?

Výsledek: 999

Řešení: Matyášovo oblíbené číslo nemůže být jednociferné. Pokud bychom měli číslici a, tak naše podmínka by říkala, že $a^2 = a$, což je pravda pouze pro $a = 0$ a $a = 1$, což je v rozporu se zadáním.
Matyášovo číslo rovněž nemůže být dvojciferné. Pokud by jeho číslo bylo ve tvaru $10a + b$, měli bychom $(a + b)^2 = ab$ nebo $a^2 + ab + b^2 = 0$. Protože jsou ale a a b nezáporná a a je kladné, vždy budeme mít $a^2 + ab + b^2 > 0$, takže $a^2 + ab + b^2 = 0$ nikdy nebude platit.
Dále ukážeme, že 999 je jediné třímístné číslo s danou vlastností. Je snadné ověřit, že číslo 999 takovou vlastnost skutečně má ($(9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$).
Nechť $100a + 10b + c$ je naše číslo s danými vlastnostmi, což znamená, že $(a + b + c)^2 = abc$ platí. Čísla a, b a c jsou číslice, takže musí platit $0 \leq a, b, c \leq 9$. Je zřejmé, že pokud je jakákoliv z číslic 0, pak rovnost $(a + b + c)^2 = abc$ vyžaduje, aby byly 0 i všechny ostatní cifry. Tím pádem můžeme uvažovat $1 \leq a, b, c$. Dále víme, že rovnost $(a + b + c)^2 = abc$ je symetrická v hodnotách a, b, c, takže můžeme předpokládat, že $a \leq b \leq c$ (Tahle podmínka nám zaručí nejmenší možné číslo z jakékoliv validní trojice). Předpokládáme tedy, že:

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$$

Podíváme se pozorněji na $(a + b + c)^2 = abc$, což můžeme zapsat jako $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc$. Užitím $c \leq 9$ víme, že $abc \leq 9ab$. Použitím $a \leq b \leq c$ zase víme, že:

$$c^2 \geq ab$$
$$ac \geq ab$$
$$bc \geq ab$$

Tím pádem $(a - b)^2 \geq 0$, takže $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Kombinací těchto dvou nerovností získáme:

$$9ab \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc \leq 9ab$$

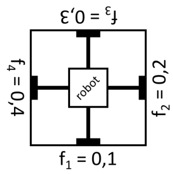
Protože je levá a pravá strana nerovnosti stejná, musíme mít na místě všech nerovností rovnosti.

- V nerovnosti $abc \leq 9ab$ nastává rovnost tehdy a právě tehdy, pokud $c = 9$.
- V nerovnosti $ac \geq ab$ nastává rovnost tehdy a právě tehdy, pokud $b = c$.
- V nerovnosti $bc \geq ab$ nastává rovnost tehdy a právě tehdy, pokud $a = c$.

Kombinací těchto tří pozorování dostáváme, že jediný možný případ je $a = b = c = 9$. Jak jsme již dříve zkontrolovali, tohle je naše řešení. Číslo 999 je tedy jediným trojciferným číslem (a tedy i nejmenším číslem větším než 1), které splňuje zadané podmínky, což z něj dělá Matyášovo oblíbené číslo.

Příklad 42 ... Stabilní robot 2

Vědci chtějí zkoumat další hlubokou díru, kterou vykopali, a jejíž průřez je čtverec. Spustili do díry robota, který vážil 15 kg. Aby byl robot stabilní, začal jako vždy tlačit rameny do každé ze stěn díry. Každá paže tlačila silou F. Tentokrát ale vědci rychle zjistili, že koeficienty tření mezi stěnou a rameny jsou různé, a to 0,1, 0,2, 0,3 a 0,4. Nakreslili si tedy náčrt situace při pohledu shora, jako na obrázku. Jaká je minimální síla F v newtonech, kterou robot musí tlačit, aby zůstal stabilní?



Výsledek: 250

Řešení: Budeme postupovat podobně jako v příkladu 25. Tentokrát se ale budeme muset zamyslet, jaký vliv mají různé koeficienty tření. Zaměřme se nyní jen na směr, kde máme koeficienty tření $f_1 = 0{,}1$ a $f_3 = 0{,}3$. Víme, že v rovnici $F_f = fF$ je tato síla největší třecí síla, tedy $F_f \leq fF$. Tímto způsobem dostaneme dvě třecí síly $F_{f_1} \leq f_1 F$ a $F_{f_3} \leq f_3 F$. Pokud by tyto síly byly různé, způsobilo by to krut (kolem osy spojující druhá dvě ramena) robota. To by ho destabilizovalo. Tím pádem musíme mít $F_{f_1} = F_{f_3}$. Zkombinujeme-li tyto nerovnosti s tím, že $f_1 \leq f_3$, dostaneme, že $F_{f_1} = F_{f_3} = f_1 F$. Obdobně pro $f_2 = 0{,}2$ a $f_4 = 0{,}4$ máme $F_{f_2} = F_{f_4} = f_2 F$. Ke kompenzaci tíhové síly $F_g = mg$ potřebujeme:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} + F_{f_4} \\ mg &= f_1 F + f_2 F + f_1 F + f_2 F \\ mg &= 2(f_1 + f_2)F \\ F &= \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} \end{aligned}$$

Robot tedy musí tlačit silou:

$$F = \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}$$

Poděkování

Odborný garant soutěže

Marián Poturnay

Návrhy úloh

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Zadání a řešení úloh

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Korektury

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Překlady

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Koordinátoři

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Organizační místa

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť