Solutions

11ème édition de Naboj Junior

24 Novembre 2023

Bonjour,

Vous avez actuellement entre vos mains un livret avec les problèmes et les solutions du concours Náboj Junior 2023. Náboj Junior est une compétition internationale de mathématiques et de physique conçue principalement pour des équipes de 4 élèves de 4ème et 3ème. La compétition dure 120 minutes au cours desquelles les équipes tentent de résoudre autant de problèmes que possible. Les problèmes portent non seulement sur les connaissances en mathématiques et en physique mais aussi sur la capacité à aborder les problèmes de manière innovante et ingénieuse.

La 11ème édition de Náboj Junior a eu lieu le 24 novembre 2023. Cette année, la France n'a malheureusement pas pu participer à la compétition mais la compétition a continué dans les autres pays. Náboj Junior s'est déroulé dans 54 villes en Slovaquie, République Tchèque et Pologne. En même temps, la compétition s'est déroulée en ligne en Espagne, aux Pays-Bas, en Belgique et en Croatie.

La compétition en France est organisée par des étudiants universitaires bénévoles, qui consacrent leur temps et leur énergie pour permettre aux élèves français de concourir et de tester leurs connaissances. L'objectif de Náboj Junior est de développer les talents des enfants en mathématiques et en physique tout en démontrant que les sciences naturelles offrent de nombreux défis ainsi que beaucoup d'intérêts à tous et à toutes.

La compétition Náboj Junior a été créée en tant que projet commun de l'association Trojsten (Slovaquie) et de la compétition MFF UK Výfuk (République Tchèque). Les membres de ces organisations sont des étudiants universitaires de la Faculté de mathématiques, de physique et d'informatique de l'Université Comenius de Bratislava et de la Faculté de mathématiques et de physique de l'Université Charles de Prague, qui s'efforcent de développer les talents des étudiants et d'accroître l'intérêt pour les sciences naturelles.

Nous avons déjà hâte de vous voir participer l'année prochaine,

Juraj pour l'équipe Náboj Junior Française

Problème 1 ... Collecte de galets

Alice et Bob ramassent des galets sur la plage. Alice a 49 galets de plus que Bob, et elle décide de lui en donner quelques-uns. Elle donne 11 de ses propres galets à Bob. Combien de galets de plus Alice a-t-elle maintenant par rapport à Bob ?

Résultat: 27

Solution: Quand Alice donne à Bob onze de ses galets, elle en perd 11 et Bob en gagne 11. Ainsi, la différence dans le nombre de galets qu'ils ont diminue de $11 + 11 = 22$. Donc, à la fin, Alice aura $49 - 22 = 27$ galets de plus que Bob.

Problème 2 ... Chauffeuse de taxi

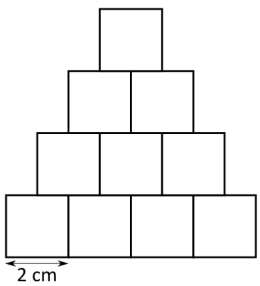
Tania est une chauffeuse de taxi professionnelle. Elle s'est rendue compte qu'elle a parcouru 10 800 kilomètres au cours des trois premiers mois de l'année 2023 et qu'elle n'a jamais quitté sa voiture pendant cette période. Quelle était la vitesse moyenne de Tania en km/h pendant cette période ?

Résultat: 5

Solution: Les trois premiers mois de l'année 2023 avaient respectivement 31, 28 et 31 jours. Ensemble, ils totalisent $31 + 28 + 31 = 90$ jours, ce qui équivaut à $90 \cdot 24 = 2160$ heures. Tania a donc parcouru 10 800 km en 2160 heures. Par conséquent, sa vitesse moyenne doit avoir été de $\frac{10\,800\,\mathrm{km}}{2160\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km/h}$.

Problème 3 ... Boîtes

Laura a été fascinée par les boîtes qu'elle a dans sa chambre. Elle a donc décidé de les dessiner. Vous pouvez voir son dessin sur la figure. Le côté de chaque carré sur le dessin a une longueur de 2 cm. Quelle est la longueur totale de tous les segments sur le dessin de Laura en centimètres ?



Résultat: 56

Solution: Pour dessiner uniquement les quatre carrés du bas, Laura doit dessiner 13 segments. Pour ajouter les trois carrés suivants, elle dessine 7 segments supplémentaires. Pour ajouter les deux carrés suivants, elle dessine 5 segments de plus. Enfin, pour dessiner le carré du haut, Laura dessine 3 segments. Au total, elle dessine $13 + 7 + 5 + 3 = 28$ segments. Chacun d'entre eux a une longueur de 2 cm, donc la longueur totale des segments est de $28 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 56\,\mathrm{cm}$.

Problème 4 ... Problème américain

Margot était en voyage aux États-Unis. Elle a découvert qu'ils utilisent des unités différentes. Elle a acheté une canette de coca d'un volume de 12 oz. L'étiquette de la canette américaine indique que le coca contient 150 kilocalories dans une canette. Combien de kilocalories Margot consommerait-elle en buvant 100 ml du coca américain ?

Résultat: 45

Solution: En consultant les conversions dans la fiche de formules et constantes, nous trouvons que 36 oz équivaut à 1 l. Ainsi, le volume de la canette en litres est $\frac{12\,\mathrm{oz}}{36\,\mathrm{oz/l}} = \frac{1}{3}$ l. Par conséquent, il y a $3 \cdot 150 = 450$ kilocalories dans un litre de coca, et $450 : 10 = 45$ kilocalories dans 100 ml.

Problème 5 ... Le coffre au trésor

Anthony et ses amis pirates ont découvert un coffre au trésor rempli de pièces de monnaie. Ils ont décidé de diviser équitablement les pièces de monnaie. Il s'est avéré que s'il y avait 48 pièces de moins dans le coffre, chacun recevrait 6 pièces de moins. Combien d'amis pirates Anthony a-t-il (sans compter Anthony lui-même) ?

Résultat: 7

Solution: Si le coffre avait 48 pièces de moins, chaque pirate recevrait 6 pièces de moins que ce qu'il/elle a actuellement. Il doit donc y avoir $48 : 6 = 8$ pirates. Comme la question demande combien d'amis pirates Anthony a, la réponse correcte est $8 - 1 = 7$.

Problème 6 ... Courir autour

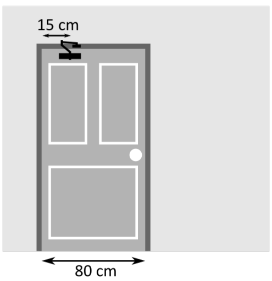
Chaque jour, Andréas et Zoé font un entraînement de 18 minutes (sans pause). Andréas court sur une piste circulaire avec un rayon de 70 mètres et Zoé court sur une piste circulaire avec un rayon de 35 mètres. Andréas met 3 minutes pour faire un tour complet et Zoé met 2 minutes. Ils ont mesuré la longueur de leur pas avant de courir, et ils ont trouvé qu'un pas mesure 100 centimètres. Combien de pas cumuleront-ils après leur entraînement ? Arrondissez le résultat à la dizaine la plus proche.
Note: Vous pouvez utiliser l'approximation $\pi = \frac{22}{7}$.

Résultat: 4620

Solution: En 18 minutes, Andréas parcourt $18 : 3 = 6$ tours. Chaque tour a une longueur de $2\pi \cdot 70\,\mathrm{m} = 140\pi\,\mathrm{m}$. Donc, il parcourt une distance de $6 \cdot 140\pi\,\mathrm{m} = 840\pi\,\mathrm{m}$, et autant de pas. De la même manière, Zoé parcourt $18 : 2 = 9$ tours, chacun de longueur $2\pi \cdot 35\,\mathrm{m} = 70\pi\,\mathrm{m}$. Elle parcourt $630\pi\,\mathrm{m}$ et autant de pas. Ainsi, au total, ils font $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ pas. Si nous utilisons l'approximation $\pi = \frac{22}{7}$, nous obtenons qu'ils ont fait $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ pas.
Note: Si nous utilisons la valeur $\pi = 3{,}14$*, nous obtiendrons le résultat* 4615,8*, ce qui donnerait le même résultat après arrondissement à la dizaine la plus proche.*

Problème 7 ... Fermeture de la porte

Axel a une porte avec un mécanisme de fermeture automatique, une fois la porte ouverte. La porte a une largeur de 80 cm. Le mécanisme est situé à 15 cm des gonds et exerce une force de 48 N sur la porte. Quelle est la force minimale en newtons nécessaire pour ouvrir la porte ?



Résultat: 9

Solution: Pour ouvrir la porte avec une force minimale, nous devons atteindre l'équilibre du couple. Le couple M du mécanisme de fermeture est égal à sa force multipliée par la distance par rapport aux gonds :

$M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. En utilisant la même équation, nous obtenons la force F nécessaire pour ouvrir la porte à la distance $a = 80\,\mathrm{cm}$:

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}$$

Problème 8 . . . Envelopper la Terre

Ève a acheté une corde très longue avec laquelle elle pourrait enrouler la Terre autour de l'équateur. Cependant, Adam a décidé d'acheter une corde encore plus longue, qu'il veut utiliser pour enrouler la Terre autour de l'équateur à une hauteur de 1 m au-dessus du sol. De combien de mètres de corde Adam aura-t-il besoin de plus par rapport à Ève ? Arrondissez votre réponse à 2 décimales.

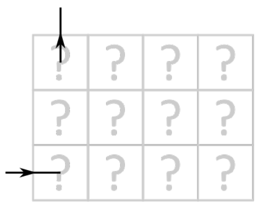
Note: Supposez que la Terre est une sphère parfaite.

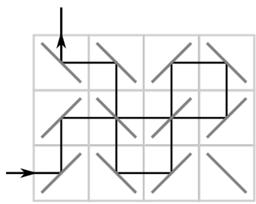
Résultat: 6,28

Solution: En supposant que la Terre est une sphère parfaite, une corde enroulée autour de son équateur formera un cercle parfait. En notant le rayon de ce cercle r, la corde d'Ève devra mesurer $2\pi r$. Adam, quant à lui, prévoit de former un cercle dont le rayon est $r+1\,\mathrm{m}$. Par conséquent, la corde d'Adam doit mesurer $2\pi(r+1\,\mathrm{m})$. La différence entre la corde d'Adam et celle d'Ève s'élève donc à $2\pi(r+1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Problème 9 . . . Jeu optique

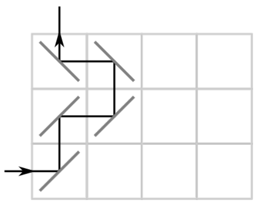
Mathieu possède un jeu optique de taille 3×4 comme dans la figure de gauche. Mathieu doit placer un miroir double face dans chaque carré avec un point d'interrogation, de sorte que l'angle entre le miroir et les côtés du carré soit de 45°. Ensuite, Mathieu prend un laser et émet un rayon lumineux, qui ressort de la grille comme indiqué dans la figure de gauche. La figure de droite montre une situation possible. Quel est le nombre minimal de réflexions du rayon lumineux pour qu'il entre et sorte comme indiqué ?





Résultat: 5

Solution: Chaque fois que le rayon lumineux touche le miroir, il change de direction de 90°, soit vers la droite, soit vers la gauche (en fonction de l'orientation du miroir). Il est facile de trouver une configuration des miroirs où seules 5 réflexions sont nécessaires (l'orientation des miroirs dans les carrés vides n'a pas d'importance) :



D'autre part, il est facile de voir que le chemin le plus court passant par 3 carrés est impossible (le rayon ne changerait pas de direction dans plusieurs carrés). De plus, on peut voir qu'il doit y avoir un nombre impair de réflexions - après chaque réflexion de nombre impair, le rayon va dans la direction verticale (et après chaque réflexion de nombre pair, il va dans la direction horizontale).

Ainsi, le nombre de réflexions doit être un nombre impair supérieur à 3, ce qui signifie que 5 est effectivement le nombre minimal de réflexions.

Problème 10 . . . Nombre durs

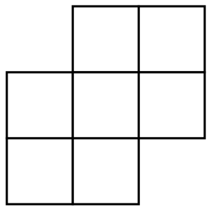
Thomas a inventé un nouveau type de nombre qu'il a appelé "nombre dur". Il appelle un entier positif "dur" si tous ses chiffres sont identiques. Combien y a-t-il de nombres "durs" supérieurs à dix et inférieurs à un million ?

Résultat: 45

Solution: Si nous utilisons uniquement le chiffre 1, nous obtenons 5 nombres "durs" dans l'intervalle donné : 11, 111, 1111, 11111 et 111111. De la même manière, nous obtenons 5 nombres "durs" pour chacun des chiffres de 2 à 9, et nous n'obtenons aucun nombre "dur" avec le chiffre 0. Par conséquent, il y a $9 \cdot 5 = 45$ nombres "durs" supérieurs à dix et inférieurs à un million.

Problème 11 . . . Ancien tableau

Daniel a trouvé un vieux tableau dans le grenier. Le tableau est représenté sur la figure suivante. Il doit écrire les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dans les cases du tableau, de sorte que chaque case contienne exactement un chiffre et que chaque chiffre soit utilisé exactement une fois. De plus, la somme des chiffres dans chaque colonne doit être la même. Pour chaque possibilité, Daniel a calculé le produit des chiffres dans la colonne du milieu. Combien de résultats différents peut-il obtenir Daniel ?



Résultat: 1

Solution: La somme de tous les chiffres écrits sur le tableau est $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Cela signifie que la somme des chiffres dans chaque colonne doit être $21 : 3 = 7$. Ensuite, le chiffre 0 ne peut pas être dans la première ou la dernière colonne, car nous aurions besoin d'utiliser le chiffre 7, que nous n'avons pas. Ainsi, le chiffre 0 sera utilisé dans la colonne du milieu, ce qui force le produit des chiffres dans la colonne du milieu à être toujours 0. Par conséquent, Daniel ne peut obtenir qu'un seul résultat, à savoir 0.

Problème 12 . . . Temps de bain

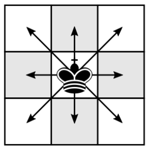
Pierre a une baignoire d'un volume de 150 l. La baignoire est remplie par un robinet avec qui a un débit de 0,2 l/s. Cependant, lorsque le clapet (le bouchon de la baignoire) est ouvert, l'eau s'écoule à un débit de 0,05 l/s. Pierre a laissé la baignoire se remplir avec le robinet mais a oublié de boucher le clapet. Combien de secondes de plus faudra-t-il pour remplir la baignoire par rapport à un remplissage où Pierre n'a pas oublié de fermer le clapet ?

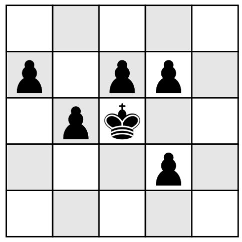
Résultat: 250

Solution: Si Pierre n'avait pas oublié de boucher le clapet, la baignoire se serait remplie en $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$. Mais Pierre a oublié de boucher le clapet, ce qui a réduit le débit d'arrivée de l'eau à $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. La baignoire se remplira maintenant en $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$, de sorte que le temps nécessaire pour remplir la baignoire sera de $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ de plus.

Problème 13 . . . Jeu d'échecs

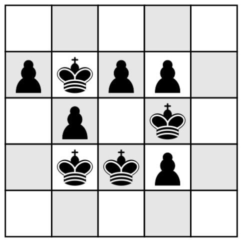
Jonas joue avec des pièces d'échecs. D'abord, il joue avec le roi du jeu d'échecs. Le roi peut se déplacer sur l'une des 8 cases adjacentes par un bord ou un sommet, mais la case ne doit pas être occupée par une autre pièce d'échecs. Jonas a disposé les pièces d'échecs comme dans la figure de droite. Combien de cases le roi peut-il atteindre après avoir bougé exactement deux fois ?



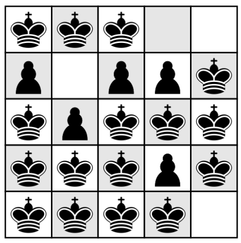


Résultat: 16

Solution: Après le premier mouvement, le roi peut se déplacer vers l'une des cases comme dans cette figure :



Maintenant, la question est de savoir combien de cases le roi peut atteindre à partir de n'importe laquelle des positions de la figure précédente. Nous trouvons facilement que le roi peut se déplacer vers l'une de ces 16 cases :



Problème 14 ... Quadrilatère coupé

Adam s'ennuyait en cours de maths, du coup il a dessiné un quadrilatère ayant un périmètre de 49 cm. Ensuite, il a décidé de découper le quadrilatère en 2 triangles en traçant l'une de ses diagonales. Il a découvert que la somme des périmètres des nouveaux triangles est de 77 cm. Quelle est la longueur en centimètres de la diagonale le long de laquelle Adam a découpé le quadrilatère ?

Résultat: 14

Solution: Les deux nouveaux triangles partagent deux côtés avec le quadrilatère original et ont un côté de longueur égale à la diagonale. Cela signifie que le nouveau périmètre est égal à la somme des périmètres, plus deux fois la longueur de la diagonale. Comme le périmètre a augmenté de $77\,\mathrm{cm} - 49\,\mathrm{cm} = 28\,\mathrm{cm}$, la longueur de la diagonale est de $28\,\mathrm{cm} : 2 = 14\,\mathrm{cm}$.

Problème 15 ... Lancer, courir et ne pas attraper

Sophie fait du skateboard. Elle roule à la vitesse de 9 km/h. Elle décide de lancer une balle directement au-dessus d'elle de sorte à ce que la balle touche le sol après 4 secondes. Immédiatement après le lancer, Sophie accélère à la vitesse de 18 km/h. Quelle est la distance en mètres entre le skateboard de Sophie et la balle au moment où la balle touche le sol ?

Note: Supposez que la résistance de l'air est négligeable.

Résultat: 10

Solution: Après le lancer, la composante horizontale de la vitesse de la balle sera de $9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$ tandis que Sophie accélère à une vitesse de $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$. Par conséquent, la vitesse relative entre Sophie et la balle sera de $5\,\mathrm{m/s} - 2{,}5\,\mathrm{m/s} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Par conséquent, après 4 secondes, le moment où la balle touche le sol, Sophie sera à une distance de $2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$.

Problème 16 . . . C'est l'heure de la fête

Alice, Béatrice, Charlotte et Daisy sont allées à une fête. Elles sont arrivées à des moments différents. Une fois qu'elles sont toutes arrivées, chacune d'entre elles a dit une phrase fausse :

Alice a dit : "Je suis venue en deuxième."
Béatrice a dit : "Je suis arrivée avant Alice."
Charlotte a dit : "Je suis arrivée après Alice."
Daisy a dit : "Je suis arrivée en première."

Quel était l'ordre réel dans lequel elles sont arrivées ?

Remplacez le nom de chaque fille par la lettre correspondante dans la réponse. Par exemple, si la réponse était Alice, Béatrice, Charlotte, Daisy, vous devriez soumettre ABCD.

Résultat: CDAB

Solution: Dans la première étape, nous allons essayer de trouver la position d'Alice. Puisque toutes les déclarations sont fausses, Alice ne peut pas être la deuxième. Béatrice et Charlotte sont arrivées après et avant Alice, respectivement. Cela signifie qu'au moins une fille est à la fois avant et après Alice, ce qui rend impossible pour Alice d'être la première ou la quatrième. La seule possibilité pour elle est d'être arrivée en troisième. La déclaration fausse de Béatrice selon laquelle elle est arrivée avant Alice implique qu'elle doit être après Alice, ce qui en fait la dernière. Daisy n'est pas arrivée en première, ce qui lui laisse la deuxième place, car les troisième et quatrième positions sont déjà prises. Dans la dernière étape, nous attribuerons Charlotte à la première place, le seul emplacement libre restant, et il est clair que sa déclaration correspond à sa position. Par conséquent, l'ordre final d'arrivée est : Charlotte, Daisy, Alice, Bella (CDAB).

Problème 17 . . . Tramways de Lyon

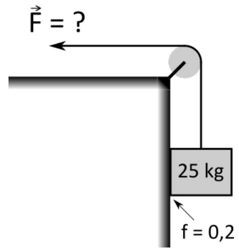
Jean a dû voyager autour de Lyon en tramway numéro 12. Il a remarqué que pendant son trajet, il voyait le tramway 12 en direction opposée toutes les deux minutes en moyenne. Il a trouvé injuste que la ligne 5 qu'il prend pour aller à l'école dessert son arrêt que toutes les six minutes, alors que le 12 circule aussi souvent. Par heure, de combien de tramways 12 de plus dessert-on un arrêt par rapport au nombre de tramways numéro 5 ?

Résultat: 5

Solution: Calculons l'intervalle de passage du tramway 12. Lorsque Jean voyage en tramway, sa vitesse relative par rapport aux tramways en direction opposée est deux fois plus rapide que la vitesse réelle des tramways. Cela signifie qu'il voit que la distance constante entre deux tramways consécutifs est parcourue deux fois plus rapidement. Par conséquent, l'intervalle réel de desserte de l'arrêt est deux fois plus long que l'intervalle auquel Jean observe les tramways en direction opposée. Ainsi, le tramway 12 dessert l'arrêt toutes les $2 \cdot 2 = 4$ minutes. En une heure, $60 : 4 = 15$ tramways 12 desserviront l'arrêt.
De même, $60 : 6 = 10$ tramways 5 desserviront l'arrêt en une heure. Par conséquent, le tramway 12 dessert l'arrêt $15 - 10 = 5$ fois de plus que le tramway 5.

Problème 18 . . . Pouvons-nous réparer ça ?

Bob le bricoleur souhaite faire monter une boîte d'un étage dans un bâtiment. Il a pris une poulie et a créé un mécanisme comme sur la figure. Maintenant, il se questionne. La boîte pèse $25\,\mathrm{kg}$ et le coefficient de frottement entre la boîte et le mur est de 0,2. Quelle est la force minimale en Newtons avec laquelle Bob doit tirer sur la corde pour que la boîte monte ?



Résultat: 250

Solution: Nous devons réfléchir à la manière dont le frottement affecte la boîte. La force de frottement n'agit que entre les solides qui agissent sur eux-mêmes avec une certaine force de pression. Mais dans notre cas, la boîte n'exerce aucune pression sur le mur vertical. Par conséquent, aucune force de frottement n'agit sur la boîte. Cela signifie que la seule force (à l'exception de celle de Bob) agissant sur la boîte est la force gravitationnelle $F_g = mg$, où $m = 25\,\mathrm{kg}$ est la masse de la boîte. Bob doit agir avec une force F de la même magnitude, il doit donc tirer sur la corde avec une force $F = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Problème 19 ... Les Confitures de Caroline

Caroline organise une dégustation de ses confitures. Dans sa cave, elle a 10 pots de confiture de framboises, 15 de myrtilles, 7 de mûres, 15 de groseilles et 9 de fraises. Elle souhaite prendre des confitures pour s'assurer d'avoir au moins une confiture de chaque type. De plus, elle sait que ses amis aiment les framboises et les myrtilles, donc elle veut prendre au moins 2 pots de confiture de framboises et au moins 5 pots de confiture de myrtilles. Cependant, il fait noir dans la cave, donc elle ne peut pas reconnaître le type de confiture. Combien de pots de confiture Caroline doit-elle prendre au minimum pour être sûre d'avoir pris suffisamment de confitures pour satisfaire toutes ses exigences ?

Résultat: 50

Solution: Les exigences de Caroline sont de prendre au moins 2 pots de confiture de framboises, 5 pots de confiture de myrtilles, 1 pot de confiture de mûres, 1 pot de confiture de groseilles et 1 pot de confiture de fraises. Nous allons réfléchir à ce qui pourrait se passer si certaines de ces exigences ne sont pas remplies. Le pire scénario possible qui empêcherait Caroline d'avoir 2 pots de confiture de framboises est qu'elle prenne tous les pots de différents types, sauf 1 pot de confiture de framboises. Au total, cela ferait $1 + 15 + 7 + 15 + 9 = 47$ pots de confiture. Cependant, si elle en prend 48, ce problème ne se poserait pas. De la même manière, le problème serait de prendre 4 pots de confiture de myrtilles et tous les pots des autres types, ce qui ferait un total de $10 + 4 + 7 + 15 + 9 = 45$ pots de confiture. Par conséquent, elle doit prendre au moins 46 pots de confiture. En appliquant la même idée aux mûres, aux groseilles et aux fraises, nous constatons qu'il n'y aurait pas de problème si Caroline prenait au moins $(10 + 15 + 0 + 15 + 9) + 1 = 50$, $(10 + 15 + 7 + 0 + 9) + 1 = 42$ ou $(10 + 15 + 7 + 15 + 0) + 1 = 48$ pots de confiture, respectivement. En combinant tout cela, nous découvrons que les exigences seront satisfaites si le nombre de pots de confiture pris est le plus élevé parmi les nombres 48, 46, 50, 42, 48. Par conséquent, Caroline doit prendre 50 pots de confiture.

Problème 20 ... Tour de Náboj

Lors d'une course de vélo, les cyclistes devaient parcourir un circuit composé uniquement de montées et de descentes. Un tiers de la distance de la course était constitué de montées et les deux tiers étaient des descentes. Après la compétition, des statisticiens ont analysé la performance du vainqueur. Le vainqueur a atteint une vitesse moyenne de $24\,\mathrm{km/h}$ et il a passé 3 fois plus de temps dans les montées que dans les descentes. Quelle était la vitesse moyenne du vainqueur dans les descentes du circuit en kilomètres par heure ?

Résultat: 64

Solution: Soit s la longueur du circuit et t le temps du vainqueur à l'arrivée. Nous savons que la vitesse moyenne du vainqueur était de $24\,\mathrm{km/h}$, donc $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$.

Les deux tiers de la distance de la course étaient en descente, donc la longueur des descentes est $\frac{2}{3}s$. De plus, le vainqueur a passé 3 fois plus de temps dans les montées. Par conséquent, il a passé un temps $\frac{1}{4}t$ dans les descentes. La vitesse moyenne du vainqueur dans les descentes est donc :

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t}$$

En remplaçant $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$, nous trouvons que la vitesse moyenne du vainqueur dans les descentes est :

$$v = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\mathrm{km/h} = 64\,\mathrm{km/h}$$

Problème 21 . . . Carré magique

Catherine joue avec un carré magique. Elle doit remplir les cases d'un tableau 3×3 avec des nombres, de manière à ce que la somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne et sur les deux diagonales soit la même. Catherine a déjà compléter certaines cases. Quelle est la somme des cinq nombres qui ne sont pas encore écrits dans le carré magique ?

17	16	
15		19

Résultat: 95

Solution: Regardons la dernière ligne et la deuxième colonne. Elles doivent avoir la même somme, mais elles partagent également une case en commun. Par conséquent, elles doivent également avoir la même somme pour les nombres qui ne sont pas en commun. Par conséquent, la somme des nombres 15 et 19 doit être la même que la somme du nombre 16 et du nombre dans la case du milieu. Cette somme est $15 + 19 = 34$, ce qui signifie que le nombre dans la case du milieu doit être $34 - 16 = 18$.

17	16	
	18	
15		19

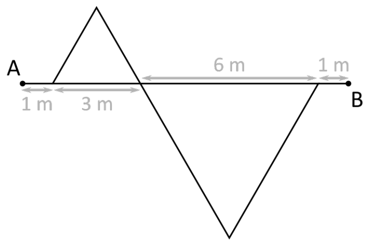
Maintenant, nous avons tous les nombres sur l'une des diagonales. Par conséquent, la somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne et sur les deux diagonales doit être $17 + 18 + 19 = 54$. À partir de là, il est facile de compléter l'ensemble du tableau.

17	16	21
22	18	14
15	20	19

Enfin, nous calculons que la somme des nombres manquants est $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

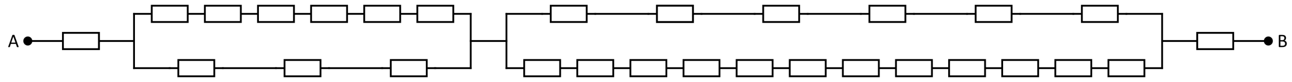
Problème 22 . . . Soudé

Annaëlle a plié et soudé la forme ci-dessous à partir d'un fil avec une résistance électrique de 0,1 Ω/m. Cette forme est composée d'un segment de longueur 1 m, d'un triangle équilatéral de côté 3 m, d'un triangle équilatéral de côté 6 m et d'un dernier segment de longueur 1 m. Calculez la résistance de cette forme entre les sommets A et B en ohms.



Résultat: 0,8

Solution: Nous pouvons remplacer chaque 1 m de fil par une résistance ayant une résistivité de $R_0 = 0{,}1\,\Omega$. Si nous faisons cela, nous obtenons le schéma suivant :



Maintenant, nous pouvons utiliser les formules pour les résistances connectées en série et en parallèle. Nous obtenons que la résistivité entre les points A et B est :

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Problème 23 ... Spa

Ann n'aime pas l'eau froide de la piscine, et elle souhaite acheter des panneaux solaires. Sa piscine a un volume de 150 hl et elle aimerait la chauffer de 29 °C à 33 °C en 10 heures d'ensoleillement constant. Elle sait également qu'un 1 m^2 de panneaux solaires a une puissance de sortie de 1,4 kW avec ce taux d'ensoleillement. Combien de m^2 de panneaux solaires Ann a-t-elle besoin pour chauffer l'eau à la température souhaitée dans le temps imparti ?

Résultat: 5

Solution: Un volume $V = 150\,\mathrm{hl}$ d'eau a une masse $m = V\rho_{water}$. Pour la chauffer de la température $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ à $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$, nous devons lui ajouter la chaleur $Q = c_{water} m(t_2 - t_1) = c_{water} V \rho_{water}(t_2 - t_1)$. Cette chaleur doit être égale au travail exercé par les panneaux solaires. Ils ont une puissance $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$ par unité de surface, donc si la surface totale des panneaux solaires est S, ils ont une puissance $P = P_0 S$. Après un certain temps $t = 10\,\mathrm{h}$, ils exerceront le travail $W = Pt = P_0 St$. C'est le travail exercé sur l'eau, donc nous devons avoir :

$$\begin{aligned} W &= Q \\ P_0 St &= c_{water} V \rho_{water}(t_2 - t_1) \\ S &= \frac{c_{water} V \rho_{water}(t_2 - t_1)}{P_0 t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m^2} \end{aligned}$$

Ainsi, Ann a besoin de 5 m^2 de panneaux solaires.

Problème 24 ... Match de football

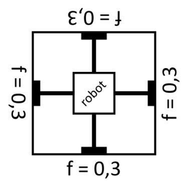
Une équipe de physiciens jouait un match de football dans la Coupe Náboj contre une équipe de mathématiciens. À la mi-temps, le score était de 3 : 2 en faveur des physiciens, mais le match s'est terminé avec un score de 4 : 5 en faveur des mathématiciens. Combien de manières différentes y a-t-il pour que les équipes marquent leurs buts ?

Résultat: 40

Solution: Nous pouvons représenter l'ordre des buts avec une chaîne de P et de M, où P représente un but marqué par les physiciens et M un but marqué par les mathématiciens. Avec cette notation, nous pouvons voir qu'il y a 10 ordres possibles dans lesquels les buts de la première mi-temps ont pu être marqués : MMPPP, MPMPP, MPPMP, MPPPM, PMMPP, PMPMP, PMPPM, PPMMP, PPMPM, PPPMM. En suivant une procédure similaire pour les 4 buts restants de la deuxième mi-temps, nous trouvons qu'il y avait 4 ordres possibles : PMMM, MPMM, MMPM, MMMP. Comme la première et la deuxième mi-temps sont des parties indépendantes du match, n'importe quel ordre des buts de la première mi-temps peut être associé à n'importe quel ordre des buts de la deuxième mi-temps. Par conséquent, le nombre total de manières possibles dont tous les buts ont été marqués est de $10 \cdot 4 = 40$.

Problème 25 . . . Un robot stable

Des scientifiques souhaitent explorer un trou carré qu'ils ont creusé. Pour ce faire, ils ont suspendu un petit robot d'un poids de 15 kg dedans. Pour se stabiliser, le robot pousse avec un bras de chaque côté du trou. Chaque bras exerce une force F. Les scientifiques ont rapidement découvert que les coefficients de friction entre les côtés et les bras du robot sont de 0,3. Ils ont donc esquissé le robot vu d'en haut comme sur la figure. Quelle est la force minimale F en newtons avec laquelle le robot doit pousser pour rester stable ?



Résultat: 125

Solution: Si le robot pousse avec une force F de chaque côté, alors la force de frottement de chaque côté est $F_f = fF$ et elle est dirigée vers le haut, où f est le coefficient de frottement $f = 0{,}3$. D'autre part, la force gravitationnelle $F_g = mg$ agit sur le robot vers le bas. Pour que le robot reste stable, la force gravitationnelle doit être égale à la somme des quatre forces de frottement. Donc, nous devons avoir :

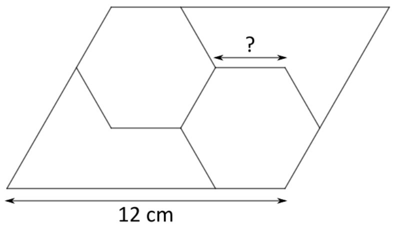
$$\begin{aligned} F_g &= 4F_f \\ mg &= 4fF \\ F &= \frac{mg}{4f} \end{aligned}$$

Par conséquent, la force F doit être :

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\mathrm{N}$$

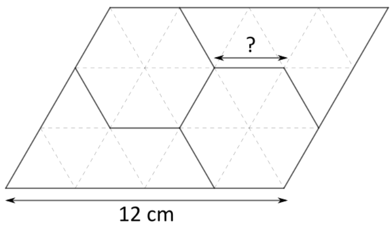
Problème 26 . . . Nouveau logo

Paula était en train de créer un logo pour sa boutique. Elle a commencé par dessiner un parallélogramme avec un côté de longueur 12 cm. Elle a découvert qu'elle pouvait dessiner deux hexagones réguliers dans le parallélogramme comme sur la figure. Quelle est la longueur du côté de ces hexagones en centimètres ?



Résultat: 3

Solution: Chaque hexagone peut être divisé en 6 triangles équilatéraux. Cela nous permet de dessiner une grille triangulaire sur la figure :



À partir de là, nous voyons immédiatement que la longueur du côté de l'hexagone (qui est la même que la longueur du côté des triangles) est de $12\,\mathrm{cm} : 4 = 3\,\mathrm{cm}$.

Problème 27 . . . Vers le fond de la mer

Patrick le Pirate s'est retrouvé dans une bataille avec un autre pirate. Son navire a été touché par un boulet de canon et maintenant $50\,\mathrm{l}$ d'eau entre dans le navire chaque seconde. Patrick a commencé à calculer le temps qu'il lui reste avant que le navire ne sombre complètement. Il a approximé son navire comme un cuboïde creux avec des dimensions de $10\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ et une masse de $5\,\mathrm{t}$. Combien de temps en secondes Patrick a-t-il avant que le navire ne sombre complètement ?

Résultat: 1100

Solution: Le navire sombrera complètement lorsque la force gravitationnelle sera égale à la force de flottabilité. La force de flottabilité maximale qui peut agir sur le navire avec un volume V est $F_{buoy} = V\rho_{water}g$. La force gravitationnelle se compose de deux parties : la force gravitationnelle du navire lui-même et la force gravitationnelle de l'eau qui a coulé dans le navire. La force gravitationnelle du navire avec une masse m est $F_{g_1} = mg$. L'eau coule dans le navire avec un débit Q, donc après un certain temps t, il y aura un volume $V' = Qt$ d'eau dans le navire. Donc, sa force gravitationnelle sera $F_{g_2} = Qt\rho_{water}g$. La condition pour la submersion est $F_{buoy} = F_{g_1} + F_{g_2}$, à partir de laquelle nous pouvons exprimer le temps t :

$$V\rho_{water}g = mg + Qt\rho_{water}g$$
$$t = \frac{V\rho_{water} - m}{Q\rho_{water}g}$$

Par conséquent, le navire sombrera complètement après un certain temps :

$$t = \frac{V\rho_{water} - m}{Q\rho_{water}g} = \frac{(10\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m}) \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} - 5000\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{m^3/s} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 1100\,\mathrm{s}$$

Problème 28 . . . Somme des années

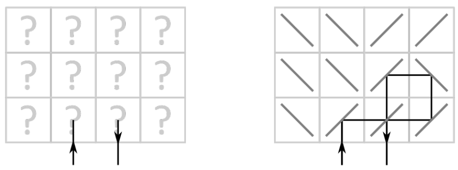
Aujourd'hui, deux amies, Amily et Emily, ont calculé la somme des années au cours desquelles elles ont vécu. Il s'est avéré que le résultat d'Emily était supérieur de 19945 à celui d'Amily. En quelle année est née Emily ?

Résultat: 1990

Solution: Les deux amies ont ajouté les années de leur naissance au nombre 2023. Emily a obtenu un résultat supérieur, elle a donc ajouté certaines années que Amily n'a pas incluses. Étant donné que chaque sommande est d'environ 2000, le nombre de sommes ajoutées uniquement par Emily est de 19945 : 2000 $\doteq$ 10. Cela signifie que les années ajoutées uniquement par Emily sont x, $x+1$, …, $x+9$, où x est l'année de naissance d'Emily. Leur somme est $10x+45$. Ainsi, nous obtenons l'équation $10x+45 = 19945$ à partir de laquelle nous découvrons qu'Emily est née en l'an $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

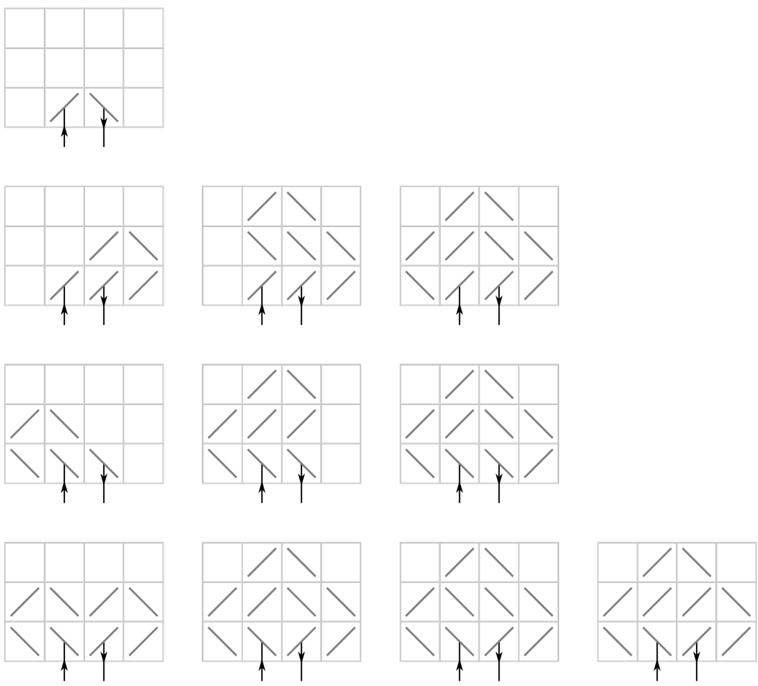
Problème 29 . . . Le jeu optique est de retour

Marcel a de nouveau un jeu optique de taille 3×4 comme sur la figure de gauche. Marcel doit placer un miroir double face sur chaque carré avec un point d'interrogation de manière à ce que l'angle entre le miroir et les côtés de la table soit de 45°. Cette fois, Marcel prend un laser et émet un rayon lumineux, et il revient comme indiqué sur la figure. Une situation possible est montrée sur la figure de droite. Marcel pose une question différente de celle précédente : Combien de trajectoires différentes (y compris celle de la figure de droite) le rayon lumineux aurait-il pu emprunter pour entrer et sortir comme indiqué ?



Résultat: 11

Solution: Essayez les possibilités en fonction de l'orientation du premier et du dernier miroir. En fonction d'eux, nous obtenons les rangées de la figure suivante (pour une meilleure compréhension, nous ne dessinons pas les rayons et les miroirs dont l'orientation est immatérielle) :



Donc, nous constatons qu'il existe $1+3+3+4 = 11$ trajectoires possibles du rayon lumineux.

Problème 30 . . . Quadrilatère égal

Andréas a dessiné un rectangle $ABCD$ tel que $AB : BC = 9 : 8$. Il a marqué les points E et F sur les segments BC et CD, respectivement, de telle manière que $CE = BE$ et $DF = 2 \cdot FC$. Ainsi, il a construit un quadrilatère $ABEF$. Il a demandé à son ami Jake de déterminer la valeur du périmètre de $ABEF$ en centimètres, et à son ami John la valeur de la surface de $ABEF$ en centimètres carrés. Il s'est avéré qu'ils ont obtenu la même valeur numérique. Déterminez la valeur du périmètre du rectangle $ABCD$ en centimètres. Répondez par une fraction sous forme la plus simple.

Résultat: $\frac{68}{3}$

Solution: Soient les longueurs des côtés du rectangle $ABCD$ égales à $AB = 9x$ et $BC = 8x$ pour un certain x. Tout d'abord, calculons le périmètre du quadrilatère $ABEF$. Les côtés du triangle rectangle ECF ont des longueurs de $4x$ et $3x$. Ainsi, le triangle de Pythagore donne $EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. De même, le triangle rectangle FDA a des côtés de longueurs $6x$ et $8x$, donc $FA = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Par conséquent, le périmètre du quadrilatère est de $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Maintenant, calculons la surface du quadrilatère $ABEF$. Les triangles rectangles ECF et FDA ont des aires de $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ et $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. L'aire du rectangle $ABCD$ est $(9x) \cdot (8x) = 72x^2$, donc l'aire du quadrilatère $ABEF$ est de $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$.
Nous savons que les valeurs numériques du périmètre et de la surface du quadrilatère $ABEF$ sont les mêmes, ce qui signifie :

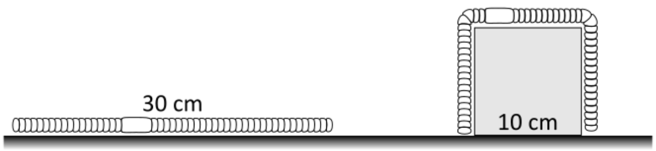
$$\frac{28x}{\text{cm}} = \frac{42x^2}{\text{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\text{ cm} = \frac{2}{3}\text{ cm}$$

Il reste à calculer le périmètre du rectangle $ABCD$, qui est de $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}$ cm $= \frac{68}{3}$ cm.

Problème 31 ... Le travail du ver travailleur

Un ver homogène d'une masse de 3 g et d'une longueur de 30 cm veut grimper sur un cube avec un côté de 10 cm dans le jardin. Le ver grimpera comme indiqué sur l'image. Quel est le travail que le ver doit effectuer en mJ ?

Note: Vous pouvez négliger la friction entre le ver et le cube.



Résultat: 2

Solution: Le travail du ver sera l'énergie potentielle maximale du ver pendant son ascension sur le cube (en supposant que son énergie potentielle est initialement nulle). Il est facile de voir que le maximum sera atteint précisément au moment où le ver se trouvera dans la position indiquée dans l'image de l'énoncé (plus ses parties sont élevées, plus son énergie potentielle est élevée).
Divisez le ver en 3 parties (ne vous inquiétez pas, elles se régénéreront) - deux parties verticales et une horizontale comme indiqué dans l'image de l'énoncé. Elles ont toutes une longueur de 10 cm, soit un tiers de la longueur totale du ver. Le ver étant homogène, ces 3 parties ont une masse de $m_0 = 1$ g. La partie horizontale a son centre de gravité à une hauteur de $h_2 = 10$ cm, donc l'énergie potentielle de cette partie est de $E_2 = m_0gh_2 = 0{,}001\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 0{,}1\,\text{m} = 0{,}001\,\text{J} = 1\,\text{mJ}$. Les parties verticales ont leur centre de gravité à une hauteur de $h_1 = h_3 = 5$ cm, donc leur énergie potentielle est de $E_1 = E_3 = m_0gh_1 = m_0gh_3 = 0{,}001\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 0{,}05\,\text{m} = 0{,}0005\,\text{J} = 0{,}5\,\text{mJ}$.
Par conséquent, l'énergie potentielle maximale du ver sera de $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\text{mJ} + 1\,\text{mJ} + 0{,}5\,\text{mJ} = 2\,\text{mJ}$, ce qui est également le travail que le ver doit effectuer.

Problème 32 ... Mot de passe oublié

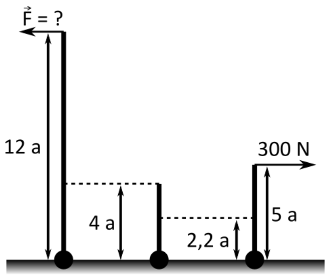
Tania a tous ses biens les plus précieux dans un coffre-fort protégé par un mot de passe à 5 lettres. Malheureusement, elle n'utilise pas de gestionnaire de mots de passe et a complètement oublié le mot de passe de son coffre-fort. Cependant, elle se souvient que les deux premières lettres étaient NA, et qu'elle n'a utilisé que l'alphabet anglais de 26 lettres. Pour ouvrir le coffre-fort, elle essaie toutes les combinaisons possibles pour les lettres restantes dans l'ordre alphabétique (AAA, AAB, AAC, ...). Si sa combinaison d'origine est NABOJ, combien d'essais doit-elle faire ?

Résultat: 1050

Solution: Nous pouvons diviser le problème en parties plus gérables. Tout d'abord, combien d'essais nous faut-il pour arriver à ABA ? Puisque l'alphabet anglais compte 26 lettres, il faudra 26 itérations pour changer la dernière lettre. Et BAA ? Eh bien, pour chaque 26 itérations de la dernière lettre, la deuxième lettre augmentera de 1, donc pour passer de AAA à BAA, nous avons besoin de $26 \cdot 26 = 676$ essais. Maintenant, pour passer de BAA à BOA, il nous faut $26 \cdot 14 = 364$ essais, car O est la 15-ème lettre de l'alphabet et nous devons essayer toutes les 14 lettres qui la précèdent. Enfin, J est la 10-ème lettre, donc nous avons besoin de 10 essais supplémentaires pour passer de BOA à BOJ. Tout cela fait un total de $676 + 364 + 10 = 1050$ essais.

Problème 33 ... Patrick tire les cordes

Patrick a pris 3 leviers de longueurs $12a$, $4a$ et $5a$. Il les a reliés avec des cordes horizontales comme sur la figure. Il a commencé par tirer sur le levier le plus à droite avec une force de 300 N. Avec quelle force en newtons doit-il tirer sur le levier le plus à gauche pour que le mécanisme reste au repos ?



Résultat: 125

Solution: Le mécanisme reste au repos uniquement si le moment de force agissant sur chacun des leviers s'annule. Nous devons donc examiner les moments de force agissant sur les leviers. Pour cela, commencez par comprendre les cordes. Il y aura une tension dans chaque corde, de sorte que la corde agira sur les deux leviers avec une force de même magnitude que cette tension. Par exemple, la corde reliant le levier du milieu et le levier de droite agira avec la même force sur le levier du milieu (vers la droite) que sur le levier de droite (vers la gauche). De plus, notez que ces forces agissent également à la même hauteur, elles agissent donc à la même distance des axes de rotation des leviers. Par conséquent, chaque corde agit également sur les deux leviers avec un moment de force de même magnitude.

Cela signifie essentiellement que nous pouvons oublier le levier du milieu. En effet, la force agissant sur le levier de droite provoque un certain moment de force de magnitude M sur le levier de droite. Cela doit être compensé par le moment de force de la corde attachée au levier de droite. Puisque les cordes portent le moment de force, la magnitude du moment de force avec lequel la corde de droite agit sur le levier du milieu doit être à nouveau M. De même, le moment de force sur le levier de gauche aura une magnitude de M.

Par conséquent, pour que le mécanisme reste au repos, les deux forces pertinentes doivent avoir un moment de force de même magnitude. Cela nous mène à l'équation :

$$F \cdot (12a) = 300\,\mathrm{N} \cdot (5a)$$

$$F = \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}$$

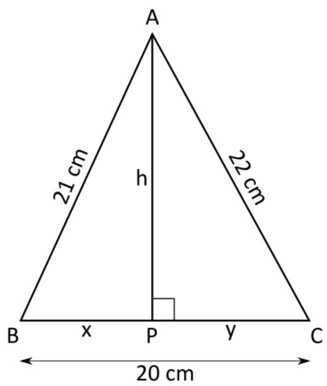
Ainsi, Patrick doit tirer avec une force d'intensité 125 N.

Problème 34 ... Grand triangle

Aaron a dessiné un triangle avec des longueurs de côtés de 20 cm, 21 cm et 22 cm sur le tableau. Ensuite, il a dessiné la hauteur sur le côté de longueur 20 cm et a divisé ce côté en deux segments. Quelle est la différence positive des longueurs de ces deux segments en centimètres ?

Résultat: 2,15

Solution: Soit les longueurs et les noms des sommets comme dans la figure suivante :



Considérons les triangles rectangles ABP et ACP. Par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$h^2 + x^2 = (21\,\mathrm{cm})^2$$
$$h^2 + y^2 = (22\,\mathrm{cm})^2$$

Si nous exprimons h^2 des deux égalités et les comparons, nous obtenons :

$$(21\,\mathrm{cm})^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - y^2$$
$$y^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - (21\,\mathrm{cm})^2$$

Maintenant, nous pouvons appliquer la formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ des deux côtés pour obtenir :

$$(y - x)(y + x) = (1\,\mathrm{cm})(43\,\mathrm{cm}) = 43\,\mathrm{cm}^2$$

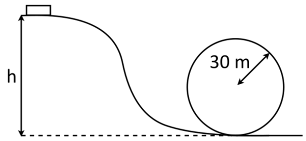
Mais nous savons que $y + x = 20\,\mathrm{cm}$. Par conséquent, la différence des longueurs $y - x$, que nous devons trouver, est :

$$y - x = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{x + y} = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{20\,\mathrm{cm}} = \frac{43}{20}\,\mathrm{cm} = 2{,}15\,\mathrm{cm}$$

Problème 35 ... Montagnes russes de l'information

Mathieu lisait un livre où il a appris l'information suivante : si une voiture avec une masse m se déplace à une vitesse v le long d'un virage qui est une partie d'un cercle de rayon r, il y a une force centripète $F_c = \frac{mv^2}{r}$ agissant sur la voiture.

Ensuite, Mathieu est allé dans un parc d'attractions où il a été fasciné par une montagne russe. Pour un segment spécifique, ils ont laissé le chariot descendre librement d'une hauteur h puis faire une boucle avec un rayon de 30 m comme illustré dans la figure. Quelle est la hauteur minimale h en mètres nécessaire pour compléter la boucle sans que les chariots tombent ?



Résultat: 75

Solution: Désignons par m la masse d'un chariot de montagnes russes, $r = 30\,\mathrm{m}$ le rayon de la boucle et v la vitesse du chariot au point le plus élevé de la boucle.
D'après la première partie de l'énoncé du problème, nous savons qu'au point le plus élevé de la boucle, il doit y avoir une certaine force centripète $F_c = \frac{mv^2}{r}$. Il y a deux forces qui peuvent agir sur le chariot dans cette direction - la force gravitationnelle $F_g = mg$ et une force de la boucle. Mais nous voulons que la force centripète soit aussi faible que possible (plus la force centripète est grande, plus le chariot doit avoir de vitesse et plus l'énergie qu'il a au départ doit être élevée). Comme nous ne pouvons pas nous débarrasser de la force gravitationnelle, dans le cas minimal, nous aurons $F_c = F_g$. De cela, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{r} &= mg\\ \frac{v^2}{r} &= g\\ v^2 &= rg\end{aligned}$$

Maintenant, regardons les énergies. Au départ, le chariot n'a que de l'énergie potentielle $E_1 = mgh$. Cependant, au sommet de la boucle, le chariot a à la fois de l'énergie potentielle et cinétique. Il se trouve à une hauteur $2r$ et a une vitesse v, donc son énergie est $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. L'énergie doit se conserver, donc $E_1 = E_2$. En combinant cela avec l'équation pour v^2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}mgh &= mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2\\ gh &= 2gr + \frac{1}{2}rg\\ h &= \frac{5}{2}r\end{aligned}$$

Par conséquent, le chariot doit descendre d'une hauteur de $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{m}$.

Problème 36 ... Tournoi de tic-tac-toe

Dans un tournoi de tic-tac-toe, 24 joueurs ont participé. Dans ce tournoi, n'importe quel joueur peut jouer contre n'importe quel autre joueur, mais il n'y a jamais plus d'un match en cours. À un certain moment du tournoi, Marc a remarqué qu'il n'y avait pas de groupe de joueurs où chaque joueur a joué au moins 2 matchs avec d'autres joueurs de ce groupe. Quel est le nombre maximum de matchs joués jusqu'à ce moment ?

Résultat: 23

Solution: La solution se divise naturellement en deux parties. Dans la première, nous montrons que 23 matchs pourraient avoir été joués. Dans la deuxième, nous prouvons que si 24 matchs avaient été joué, il existerait un tel groupe. Cela signifie que la réponse est de 23.
Première partie : Numérotez les joueurs avec des numéros de 1 à 24. Les matchs se déroulent entre le joueur 1 et le joueur 2, le joueur 2 et le joueur 3, et ainsi de suite jusqu'au joueur 23 et le joueur 24. Choisissez n'importe quel groupe de joueurs. Dans ce groupe, il y a toujours un joueur avec le plus petit numéro, appelons-le P. Au sein de ce groupe, ce joueur ne peut jouer qu'un match avec $P + 1$, car le joueur $P - 1$ ne peut pas être dans le groupe (il aurait un numéro plus bas). Par conséquent, le joueur avec le numéro P n'a pas joué contre au moins 2 personnes de ce groupe. Cela vaut pour n'importe quel groupe, il n'y a donc pas

de groupe de joueurs satisfaisant la condition de l'énoncé du problème. Par conséquent, 23 matchs pourraient avoir été joués.
Deuxième partie : Nous devons prouver que si 24 matchs étaient joués, il existe toujours un groupe avec la propriété de l'énoncé du problème. Si une paire de joueurs avait joué au moins deux matchs l'un contre l'autre, ils formeraient un groupe valide. Nous pouvons donc supposer qu'il n'y a pas de telle paire.
Maintenant, supposons que chaque joueur ait joué au moins 2 matchs. Sélectionnez les joueurs comme suit : commencez par n'importe quel joueur, appelez-le P_0. Il a joué avec quelqu'un, disons P_1. Le joueur P_1 a joué avec au moins deux joueurs, il y a donc un joueur P_2 différent de P_0, avec lequel P_1 a joué. De la même manière, nous trouvons un joueur P_3 différent de P_1, tel que P_2 a joué avec P_1 et P_3. De cette façon, nous continuons à prendre des joueurs. À un moment donné, nous obtenons un joueur qui a déjà été nommé. À ce stade, nous avons des joueurs P_k, P_{k+1}, ..., P_n ayant la propriété que le joueur P_i a joué avec les joueurs P_{i-1} et P_{i+1}, et les joueurs P_k et P_n ont joué l'un contre l'autre. En d'autres termes, nous pouvons les disposer en cercle dans l'ordre donné de telle sorte que chacun d'entre eux ait joué avec ses deux voisins. Cela prouve que ce groupe a la propriété requise. Donc, si tout le monde avait joué au moins 2 matchs, nous avons terminé.
Il reste à vérifier ce qui se passe si un joueur a joué moins de 2 matchs. Dans ce cas, nous oublions ce joueur. Après avoir fait cela, il nous restera moins de joueurs. Cependant, le nombre de matchs restera toujours au moins égal au nombre de joueurs. Après avoir oublié ce joueur, il y a deux possibilités : soit tout les joueurs restants ont joué au moins 2 matchs, soit il y a à nouveau quelqu'un qui a joué moins de 2 matchs. Dans le premier cas, l'argument précédent montre qu'il existe un groupe satisfaisant la condition de l'énoncé du problème. Sinon, nous avons un autre joueur à oublier. De cette manière, nous continuons. Si nous pouvons continuer à diminuer le nombre de joueurs, nous finirons par n'avoir que 3 joueurs, qui ont joué au moins 3 matchs entre eux. Ceci n'est possible que s'ils ont joué les uns contre les autres, formant ainsi le groupe que nous essayons de trouver.
Cela prouve que si 24 matchs avaient été joués, un tel groupe existerait. En combinant tout cela, nous concluons que le nombre maximum de matchs joués est de 23.

Problème 37 ... Multiplication imprudente

Lucie était curieuse de connaître le produit des nombres impairs consécutifs de un à trente-et-un, c'est-à-dire le produit des nombres $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Elle a sorti sa calculatrice et a commencé à multiplier les nombres précipitamment. Lucie pense qu'elle a pu en omettre un. Elle voit que le chiffre des centaines du nombre affiché sur sa calculatrice est 4. Quel nombre Lucie a-t-elle omis ?

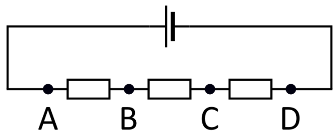
Résultat: 25

Solution: Tout d'abord, nous devons découvrir la règle de divisibilité par 125. Le critère est que le nombre formé par les trois derniers chiffres doit être divisible par 125 (ceci est similaire aux critères de divisibilité par 2, 4, 8, 16 ..., mais aussi avec 5, 25, 125 ...). Pourquoi ? Écrivez un nombre comme $1000A + B$, où $B < 1000$. B est donc le nombre formé par les trois derniers chiffres. Remarquez que 1000 est divisible par 125 car $1000 = 8 \cdot 125$. Par conséquent, pour que le nombre $1000A + B$ soit divisible par 125, il faut que B soit divisible par 125. Cela prouve le critère.
Maintenant, voyons quelles en sont les conséquences. Les seuls nombres d'au plus 3 chiffres divisibles par 125 sont 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750 et 875. Aucun d'entre eux ne commence par le chiffre 4. Par conséquent, nous en concluons que les multiples de 125 ne peuvent pas avoir le chiffre 4 comme chiffre des centaines.
Enfin, revenons à notre problème initial. Nous savons que le chiffre des centaines est 4, donc le résultat de Lucie ne peut pas être un multiple de 125. Si elle n'avait omis aucun nombre, le produit final serait divisible par $5 \cdot 15 \cdot 25$. Par conséquent, la décomposition en facteurs premiers du produit contiendrait le nombre 5 quatre fois. Nous devons donc supprimer le nombre 5 au moins deux fois. Cela n'est possible qu'en enlevant le nombre 25. Cela signifie que Lucie a omis le nombre 25.

Problème 38 ... Tension à la fin

Martin a son circuit électrique préféré représenté sur la figure. Il a choisi les points A, B, C et D sur ce circuit, mesuré la tension entre chaque paire de ces points et noté ces six valeurs sur une feuille de papier. Après un certain temps, il a retrouvé cette feuille, mais l'une des valeurs était illisible. Les cinq autres valeurs étaient dans un certain ordre $7\,\mathrm{V}$, $8\,\mathrm{V}$, $10\,\mathrm{V}$, $15\,\mathrm{V}$ et $18\,\mathrm{V}$. Martin a commencé à réfléchir et, en se basant sur les informations de la feuille, il a découvert qu'il existe deux valeurs possibles pour la sixième tension. Quelle est la somme de ces deux valeurs de tension en volts ?

Note: Les résistances ne doivent pas être toutes identiques.



Résultat: 28

Solution: Une tension entre deux points décrit la magnitude de la différence de potentiels entre ces deux points. Le potentiel décrit uniquement l'énergie potentielle (électrique) d'une particule de charge $1\,\mathrm{C}$. À chacun des points A, B, C et D, cette particule aurait une certaine énergie potentielle, et nous pouvons attribuer ce nombre à chacun de ces points. Ensuite, les tensions ne font que décrire les différences entre ces nombres.

Nous pouvons donc reformuler le problème en un problème mathématique consistant à attribuer quatre nombres à A, B, C et D (maintenant, ces lettres n'ont rien à voir avec les points du problème de physique d'origine), de telle sorte que leurs différences soient de 7, 8, 10, 15, 18 et une inconnue. Remarquez une propriété intéressante : prenons trois des nombres, disons X, Y et Z, et supposons qu'ils soient ordonnés de telle sorte que $X > Y > Z$. Alors, la différence $X - Z$ est la somme des différences $X - Y$ et $Y - Z$ (clairement $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Ainsi, si nous prenons n'importe quel triplet de nombres, alors les différences entre eux auront la propriété que l'une d'entre elles sera la somme des deux autres.

Nous pouvons maintenant revenir au problème. Disons que la différence inconnue est la différence entre C et D. Prenez les nombres A, B et C. Les trois différences entre eux font partie de celles connues. Comme l'une d'entre elles doit être la somme des deux autres, nous n'avons que deux possibilités : $7 + 8 = 15$ ou $8 + 10 = 18$. La même chose doit s'appliquer au triplet A, B et D, de sorte que l'une de ces paires de triplets contienne les différences 7, 8 et 15 et l'autre les différences 8, 10 et 18. Disons que le triplet A, B et C a (dans un certain ordre) les différences 7, 8 et 15. Les triplets A, B et C et A, B et D ne coïncident que dans la différence entre A et B, alors cette différence doit être de 8 (c'est la seule différence dans laquelle les triplets 7, 8, 15 et 8, 10, 18 coïncident).

Jusqu'à présent, les nombres A et B peuvent être échangés, nous pouvons donc choisir la différence entre A et C pour être de 15 et la différence entre B et C pour être de 7. Dans le triplet A, B et C, nous savons que les nombres A et C sont soit les plus grands, soit les plus petits. Choisissons-les de telle sorte que A soit le plus grand. Maintenant, nous avons deux possibilités pour les différences entre D et les nombres A et B.

Cas 1 : Si la différence entre A et D est de 18. Cela signifie que dans le triplet A, B et D, l'un des nombres A et D est le plus grand et l'autre le plus petit. Mais dans le triplet A, B et C, nous avons choisi A comme le plus grand, il est donc plus grand que B. Par conséquent, dans le triplet A, B, D, nous savons que A doit être le plus grand. Cela signifie que A est supérieur de 15 à C et de 18 à D. Par conséquent, la différence entre C et D est $(A - 15) - (A - 18) = 3$. C'est la première solution.

Cas 2 : Si la différence entre A et D est de 10. Cela signifie que dans le triplet A, B et D, l'un des nombres B et D est le plus grand et l'autre le plus petit. De manière similaire au cas précédent, nous savons que A est supérieur à B, donc B doit être le plus petit. Par conséquent, nous savons que C est inférieur de 7 à B et que D est supérieur de 18 à B. Cela signifie que la différence entre C et D est $(B + 18) - (B - 7) = 25$, ce qui est la deuxième solution.

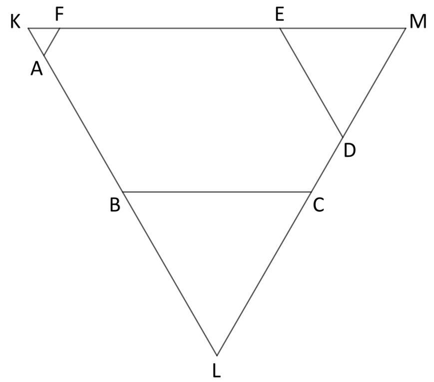
Pour résumer, nous avons découvert que la différence inconnue ne peut être que 3 ou 25. Dans le problème d'origine, cela signifie que la tension inconnue ne peut être que $3\,\mathrm{V}$ ou $25\,\mathrm{V}$. La somme de ces deux tensions inconnues possibles est donc $3\,\mathrm{V} + 25\,\mathrm{V} = 28\,\mathrm{V}$.

Problème 39 . . . Aire de jeu hexagonale

Il y a une aire de jeu dans la ville. C'est un hexagone convexe dont tous les angles intérieurs sont de 120°. Les longueurs des côtés de l'aire de jeu sont de 10 m, 12 m, 4 m, 8 m, 14 m et 2 m. On sait que l'aire de cette aire de jeu peut être écrite sous la forme $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Calculez la valeur de a.

Résultat: 91

Solution: Avant de commencer, examinons l'aire d'un triangle équilatéral de côté x. En utilisant le théorème de Pythagore, il est facile de calculer que la hauteur de ce triangle est $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Ainsi, l'aire d'un triangle équilatéral est $\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Revenons maintenant au problème original. Nommons les sommets de l'hexagone A, B, C, D, E, F, de telle sorte que $AB = 10\,\mathrm{m}$, $BC = 12\,\mathrm{m}$, $CD = 4\,\mathrm{m}$, $DE = 8\,\mathrm{m}$, $EF = 14\,\mathrm{m}$, $FA = 2\,\mathrm{m}$. Faisons interagir les lignes AB, CD et EF pour obtenir le triangle KLM comme dans la figure :



Puisque les angles intérieurs dans l'hexagone $ABCDEF$ étaient de 120°, nous obtenons que les triangles KAF, LBC et MDE sont équilatéraux. Cela donne immédiatement que le triangle KLM est équilatéral de côté 24 m.
L'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est donnée comme la différence entre l'aire du triangle équilatéral KLM et la somme des aires des triangles équilatéraux KAB, LBC et MDE. Par conséquent, l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right) = (12^2 - 1^2 - 6^2 - 4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2 = 91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

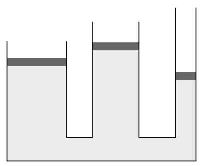
Cela signifie que la valeur de a est 91.

Problème 40 . . . Animal expérimental

Mathéo a chez lui un système hydraulique avec 3 pistons comme sur la figure. Il sait que la surface du premier piston est la somme des surfaces des deux autres pistons. Mathéo a également un hamster avec lequel il effectue plusieurs expériences :

Lorsqu'il place le hamster sur le premier piston, le piston descend de 15 mm.
Lorsqu'il place le hamster sur le deuxième piston, le piston descend de 30 mm.

De combien de millimètres le troisième piston descend-il lorsque Mathéo le met sur celui-ci ?



Résultat: 75

Solution: Désignons les surfaces du premier piston S_1, du deuxième piston S_2 et du troisième piston S_3. Les conditions données indiquent que $S_1 = S_2 + S_3$.
De plus, soit m la masse du hamster et $\Delta h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ la hauteur de descente du premier piston lorsque le hamster y est placé. En même temps, le deuxième piston monte de Δh_2 et le troisième piston monte de Δh_3. Après avoir placé le hamster sur le premier piston, deux choses doivent se produire. Premièrement, l'eau provenant du premier piston doit se diviser entre les autres pistons. Cela donne la condition $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2 + S_3\Delta h_3$. D'autre part, la pression des trois pistons doit être la même. Si p était la pression initiale dans le système et ρ la densité de l'eau, cela donne : $p + \frac{mg}{S_1} - \Delta h_1\rho g = p + \Delta h_2\rho g = p + \Delta h_3\rho g$. Nous pouvons soustraire p et diviser par g pour obtenir $\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$. La deuxième partie de cette équation donne que $\Delta h_2 = \Delta h_3$. En utilisant cette équation dans les équations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_1\Delta h_1 &= (S_2 + S_3)\Delta h_2 \\ \frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 &= \Delta h_2\rho \end{aligned}$$

Ou sous une autre forme :

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 &= \Delta h_2 \\ \frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 &= \Delta h_2 \end{aligned}$$

En comparant ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 &= \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 \\ \frac{m}{S_1\rho} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1 \end{aligned}$$

Nous redéfinissons maintenant Δh_2 pour désigner la hauteur de descente du deuxième piston lorsque le hamster y est placé et de même Δh_3 pour le troisième piston. De la même manière que ci-dessus, nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \frac{m}{S_1\rho} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1 \\ \frac{m}{S_2\rho} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_3}\Delta h_2 \\ \frac{m}{S_3\rho} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2}\Delta h_3 \end{aligned}$$

Si nous divisons les deux premières équations et utilisons $S_1 = S_2 + S_3$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{2S_1 - S_2}{S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} \\ S_2 &= (2S_1 - S_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2S_1 - S_2)\frac{15\,\mathrm{mm}}{30\,\mathrm{mm}} = \frac{2S_1 - S_2}{2} \\ 3S_2 &= 2S_1 \\ S_2 &= \frac{2}{3}S_1 \end{aligned}$$

À partir de $S_1 = S_2 + S_3$, nous obtenons que $S_3 = S_1 - S_2 = S_1 - \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_1$. En divisant les deux premières équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{S_3}{S_1} &= \frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3} \\
\frac{\frac{1}{3}S_1}{S_1} &= \frac{S_1 + \frac{2}{3}S_1}{\frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3} \\
\frac{1}{3} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3} \\
\Delta h_3 &= 5\Delta h_1 = 5 \cdot 15\,\mathrm{mm} = 75\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

Donc, si on met le hamster sur le troisième piston, il descendra de 75 mm.

Problème 41 ... Nombre préféré étrange

Matthias a un nombre préféré. C'est son nombre préféré car c'est le plus petit entier supérieur à 1 ayant la propriété suivante : si Matthias multiplie la somme des chiffres de ce nombre par lui-même, il obtient le produit des chiffres de ce nombre. Quelle est la valeur de ce nombre ?

Résultat: 999

Solution: Le nombre préféré de Matthias ne peut pas être un nombre formé d'un seul chiffre. Si c'était un chiffre a, la condition signifierait que $a^2 = a$, ce qui n'est vrai que pour $a = 0$ ou $a = 1$, mais le nombre doit être supérieur à 1.
Le nombre préféré de Matthias ne peut pas non plus être un nombre à deux chiffres. En effet, si le nombre est $10a + b$, nous aurions $(a + b)^2 = ab$ ou $a^2 + ab + b^2 = 0$. Mais comme a et b sont des nombres non négatifs et que a est positif, nous avons toujours $a^2 + ab + b^2 > 0$, donc $a^2 + ab + b^2 = 0$ ne peut jamais être vérifié.
Ensuite, nous montrons que 999 est le seul nombre à trois chiffres ayant les propriétés données. On trouve facilement qu'il satisfait ces propriétés ($(9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$). Il nous reste à démontrer que c'est le seul nombre à trois chiffres qui les satisfait.
Soit $100a + 10b + c$ le nombre ayant les propriétés données, ce qui signifie que $(a + b + c)^2 = abc$. a, b et c sont des chiffres, donc nous devons avoir $0 \le a, b, c \le 9$. De toute évidence, si l'un des chiffres est 0, la relation $(a + b + c)^2 = abc$ force tous les autres chiffres à être 0. Nous pouvons donc supposer que $1 \le a, b, c$. De plus, la relation $(a + b + c)^2 = abc$ est symétrique par rapport aux valeurs de a, b et c, nous pouvons donc supposer que $a \le b \le c$ (cette condition produira le plus petit nombre à trois chiffres à partir de n'importe quel triplet valide). Ainsi, nous supposons que :

$$1 \le a \le b \le c \le 9$$

Examinons de plus près $(a + b + c)^2 = abc$. Il peut être écrit comme $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc$. En utilisant $c \le 9$, nous savons que $abc \le 9ab$. D'un autre côté, en utilisant $a \le b \le c$, nous savons que :

$$\begin{aligned}
c^2 &\ge ab \\
ac &\ge ab \\
bc &\ge ab
\end{aligned}$$

De plus, $(a - b)^2 \ge 0$, donc $a^2 + b^2 \ge 2ab$. En combinant ces inégalités, nous obtenons :

$$9ab \le a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc \le 9ab$$

Puisque le côté gauche et le côté droit de cette inégalité sont les mêmes, toutes les inégalités utilisées doivent être vérifiées.

— Dans l'inégalité $abc \le 9ab$, il y a égalité si et seulement si $c = 9$.

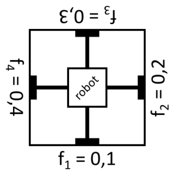
— Dans l'inégalité $ac \ge ab$, il y a égalité si et seulement si $b = c$.

— Dans l'inégalité $bc \ge ab$, il y a égalité si et seulement si $a = c$.

En combinant ces trois observations, nous en concluons que le seul cas possible est $a = b = c = 9$. Comme nous l'avons déjà vérifié, c'est effectivement une solution. Donc, le nombre 999 est le seul nombre à trois chiffres satisfaisant les conditions données. Par conséquent, c'est le plus petit nombre supérieur à 1 ayant les conditions données, ce qui signifie que 999 est le nombre préféré de Matthias.

Problème 42 ... Deuxième robot stable

Les scientifiques veulent maintenant explorer un autre trou carré qu'ils ont creusé. Ils ont de nouveau suspendu un petit robot d'un poids de 15 kg dans le trou. Pour rendre le robot stable, le robot a commencé à pousser de chaque côté du trou avec un bras. Chaque bras a poussé avec une force F. Mais cette fois, les scientifiques ont rapidement découvert que les coefficients de frottement entre les côtés et les bras du robot sont de 0,1, 0,2, 0,3 et 0,4. Ils ont donc dessiné un schéma du robot vu du dessus comme sur la figure. Quelle est la force minimale F en newtons avec laquelle le robot doit pousser pour rester stable ?



Résultat: 250

Solution: Nous procédons de manière similaire au problème 25. Mais cette fois, nous devons réfléchir à ce que font les différents coefficients de frottement. Concentrons-nous uniquement sur la direction où nous avons les coefficients de frottement $f_1 = 0{,}1$ et $f_3 = 0{,}3$. Nous savons que dans la formule $F_f = fF$, cette force représente la force de frottement maximale, c'est-à-dire que $F_f \leq fF$. De cette manière, nous obtenons deux forces de frottement $F_{f_1} \leq f_1 F$ et $F_{f_3} \leq f_3 F$. Si ces deux forces étaient différentes, elles provoqueraient un couple (autour de l'axe reliant les deux autres bras du robot) sur le robot. Cela rendrait le robot instable. Par conséquent, nous devons avoir $F_{f_1} = F_{f_3}$. En combinant les deux inégalités avec le fait que $f_1 \leq f_3$, nous obtenons que $F_{f_1} = F_{f_3} = f_1 F$. De même pour $f_2 = 0{,}2$ et $f_4 = 0{,}4$, nous avons $F_{f_2} = F_{f_4} = f_2 F$. Pour compenser la force gravitationnelle $F_g = mg$, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} F_g &= F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} + F_{f_4} \\ mg &= f_1 F + f_2 F + f_1 F + f_2 F \\ mg &= 2(f_1 + f_2)F \\ F &= \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} \end{aligned}$$

Cela signifie que le robot doit pousser avec la force :

$$F = \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}$$

Remerciements

Président du comité de sélection des problèmes

Marián Poturnay

Proposition des problèmes

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Énoncés et solutions des problèmes

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Révisions

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Traductions

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Coordinateur

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Sites de compétition

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť