Rješenja

11. Náboj Junior

24. studenog 2023.

Dragi čitatelju,

trenutno držiš knjižicu problema i rješenja zadataka koji su se pojavili na natjecanju Náboj Junior 2023. Náboj Junior je međunarodno natjecanje iz matematike i fizike osmišljeno za timove sastavljene od četiri učenika viših razreda osnovne škole. Natjecanje traje 120 minuta tijekom kojih natjecatelji pokušavaju timskim radom riješiti što više zadataka. Zadaci su osmišljeni tako da ne testiraju samo "naštrebano" znanje matematike i fizike, već da je za njihovo rješavanje potrebna kreativnost i razmišljanje izvan okvira.

Ovogodišnje, 11. izdanje natjecanja Náboj Junior održano je 24. studenog 2023, a na njemu je sudjelovalo čak 145 timova iz Hrvatske! Náboj Junior istovremeno se odvijao uživo u 54 gradova širom Češke, Poljske i Slovačke; te online u Belgiji, Hrvatskoj, Nizozemskoj i Španjolskoj.

Natjecanje u Hrvatskoj organizira udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" čiji su volonteri darovali svoje vrijeme i energiju kako bi se učenici iz Hrvatske također mogli natjecati i odmjeriti svoje znanje protiv vršnjaka iz drugih država. Cilj natjecanja Náboj Junior je razviti talent za matematiku i fiziku te pokazati kako prirodne znanosti mogu biti zanimljive, izazovne, ali i zabavne svim učenicima.

Natjecanje Náboj Junior stvoreno je kao zajednički projekt slovačke udruge Trojsten i čeških organizatora dopisnog seminara i natjecanja MFF UK Výfuk. Članovi organizacije su uglavnom studenti Fakulteta matematike, fizike i informatike Sveučilišta Komenskog u Bratislavi i Fakulteta za matematiku i fiziku Karlovog sveučilišta u Pragu, koji teže razviti talent i zanimanje učenika za prirodne znanosti.

Udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" provodi natjecanje u Hrvatskoj od 2022. Mentori u Udruzi su volonteri, bivši vrhunski natjecatelji, a danas uglavnom studenti zagrebačkih PMF-a i FER-a, ali i najboljih inozemnih fakulteta kao što su Cambridge, MIT i ETH. Kroz mnoge projekte populariziramo matematiku kao znanost, nudimo kvalitetne i besplatne pripreme za natjecanja, lokalno provodimo razna međunarodna natjecanja lokalno u Hrvatskoj, a organiziramo matematičke konferencije, ljetne kampove i zimske škole, i pružamo mogućnost učenicima da svoje matematičko znanje razvijaju izvan školskih okvira. Više o našim aktivnostima možete pronaći na našoj web stranici mnm.hr.

U nadi da ćeš se priključiti natjecanju dogodine, mentori Udruge

Zadatak 1 . . . Skupljači oblutaka

Anamarija i Božo skupljaju kamenčiće na plaži. Anamarija ima 49 kamenčića više nego Božo pa mu je odlučila dati malo svojih. Dala je Boži 11 kamenčića. Koliko više kamenčića Anamarija ima sada u odnosu na Božu?

Rezultat: 27

Rješenje: Kada Anamarija da Boži 11 svojih kamenčića, ona gubi 11 kamenčića, a Božo dobiva 11 kamenčića. Dakle, razlika u broju kamenčića se mijenja za $11 + 11 = 22$. Stoga, Anamarija će sada imati $49 - 22$ kamenčića nego Božo.

Zadatak 2 . . . Vozačica taksija

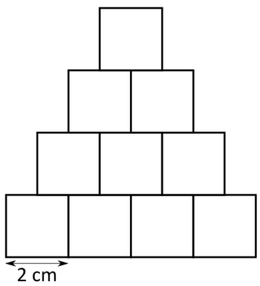
Kleopatra je profesionalna taksistica. Saznala je da je prešla 10 800 kilometara tijekom prva tri mjeseca 2023. i da tijekom tog razdoblja nije izlazila iz automobila. Kolika je bila Kleopatrina prosječna brzina u km/h tijekom tog razdoblja?

Rezultat: 5

Rješenje: Prva tri mjeseca 2023. su imali 31, 28 odnosno 31 dan. Zajedno čine $31 + 28 + 31 = 90$ dana, što je $90 \cdot 24 = 2160$ sati. Kleopatra je tako prešla 10800 kilometara u 2160 sati. Stoga je njezina prosječna brzina morala biti $\frac{10\,800\,\text{km}}{2160\,\text{h}} = 5\,\text{km/h}$.

Zadatak 3 . . . Kutije

Laura je fascinirana kutijama koje ima u svojoj sobi. Odlučila ih je nacrtati. Možete vidjeti njen crtež na slici. Svaki kvadrat na slici ima duljinu stranice 2 cm. Kolika je ukupna duljina svih dužina na Laurinom crtežu u centimetrima?



Rezultat: 56

Rješenje: Kako bi nacrtala donja četiri kvadrata, Laura treba nacrtati 13 dužina. Kako bi dodala tri kvadrata crta dodatnih 7 dužina. Za iduća dva kvadrata crta još 5 dužina. Konačno, za kvadrat na vrhu, Laura nacrta 3 dužine. Ukupno, nacrtala je $13 + 7 + 5 + 3 = 28$ dužina. Svaka je duljine 2 cm, pa je ukupna duljina svih dužina jednaka $28 \cdot 2\,\text{cm} = 56\,\text{cm}$.

Zadatak 4 . . . Američki problem

Mihaela je otišla na izlet u SAD. Otkrila je da tamo ljudi koriste drugačije, čudne mjerne jedinice. Kupila je limenku soka volumena 12 oz. Američka etiketa naznačuje da sok sadrži 150 kilokalorija po limenki. Koliko će kilokalorija Mihaela konzumirati popije li 100 ml Američkog soka?

Napomena: Neke pretvorbe mjernih jedinica možeš pronaći u korisnim formulama.

Rezultat: 45

Rješenje: Uz pretvorbe dane u formulama, odredimo da je 36 oz upravo 1 l. Dakle, volumen soka u litrama je $\frac{12\,\text{oz}}{36\,\text{oz/l}} = \frac{1}{3}$ l. Stoga, sok sadrži $3 \cdot 150 = 450$ kilokalorija po litri, odnosno $450 : 10 = 45$ kilokalorija u 100 ml.

Zadatak 5 ... Škrinja s blagom

Jan i njegovi prijatelji gusari otkrili su škrinju s blagom punu novčića. Odlučili su ravnomjerno podijeliti novčiće. Ispostavilo se da kad bi u škrinji bilo 48 novčića manje, svi bi dobili 6 novčića manje. Koliko prijatelja pirata Jan ima (ne računajući samog Jana)?

Rezultat: 7

Rješenje: Kad bi škrinja imala 48 novčića manje, svaki gusar bi dobio 6 novčića manje nego što trenutno ima. Dakle, mora biti $48 : 6 = 8$ gusara. Budući da je pitanje koliko Jan ima prijatelja gusara, točan odgovor je $8 - 1 = 7$.

Zadatak 6 ... Okolo naokolo

Svaki dan Sandra i Blanka odlaze na 18-minutno vježbanje (bez pauze). Sandra trči po kružnoj stazi radijusa 70 metara, a Blanka trči po kružnoj stazi radijusa 35 metara. Za jedan cijeli krug Sandri su potrebne 3 minute, a Blanki 2 minute. Izmjerile su duljinu svog jednog koraka prije trčanja i ispostavilo se da je 1 korak dug 100 centimetara. Koliko će ukupno koraka napraviti tijekom svog dnevnog treninga? Zaokružite rezultat na najbližu deseticu.

Napomena: Možete koristiti aproksimaciju $\pi = \frac{22}{7}$.

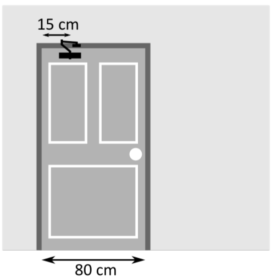
Rezultat: 4620

Rješenje: U 18 minuta Sandra otrči $18 : 3 = 6$ krugova. Svaki njezin krug ima duljinu od $2\pi \cdot 70\,\mathrm{m} = 140\pi\,\mathrm{m}$. Dakle, ona prijeđe udaljenost od $6 \cdot 140\pi\,\mathrm{m} = 840\pi\,\mathrm{m}$ i isti taj broj koraka. Slično, Blanka otrči $18 : 2 = 9$ krugova duljine $2\pi \cdot 35\,\mathrm{m} = 70\pi\,\mathrm{m}$. Ona prijeđe $9 \cdot 70\pi\,\mathrm{m} = 630\pi\,\mathrm{m}$ i isti taj broj koraka. Dakle, zajedno naprave $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ koraka. Ako koristimo aproksimaciju $\pi = \frac{22}{7}$, dobivamo da su napravile $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ koraka.

Napomena: Ako koristimo vrijednost $\pi = 3{,}14$, *dobit ćemo kao rezultat* $4615{,}8$, *što će nam dati isto rješenje nakon zaokruživanja na najbližu deseticu.*

Zadatak 7 ... Zatvaranje vrata

Aleksa fasciniraju zatvarači vrata, mehanizmi koji automatski pokušavaju zatvoriti vrata ako ih se otvori. Aleks ima vrata širine 80 cm. Zatvarač vrata nalazi se 15 cm od šarki vrata i na vrata djeluje silom od 48 N. Kolika je minimalna potrebna sila u njutnima da bi se vrata otvorila?



Rezultat: 9

Rješenje: Za otvoriti vrata uz minimalnu silu, trebamo postići ravnotežu momenta sile na krajevima poluge. Moment sile M zatvarača jednak je sili pomnoženoj s udaljenošću od šarki $M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. Koristeći istu jednadžbu, dobivamo da je sila potreba za otvoriti vrata s udaljenosti $a = 80\,\mathrm{cm}$:

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}$$

Zadatak 8 ... Opasivanje Zemlje

Eva je kupila vrlo dugačko uže kojim bi mogla Zemlju omotati oko ekvatora. Međutim, Adam je odlučio kupiti još dulje uže koje bi oko Zemlje omotao na visini 1 m od površine. Koliko bi metara Adamovo uže trebalo biti dulje u usporedbi s Evinim? Odgovor zaokruži na 2 decimalna mjesta.

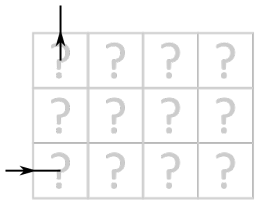
Napomena: Pretpostavi da je Zemlja savršena kugla.

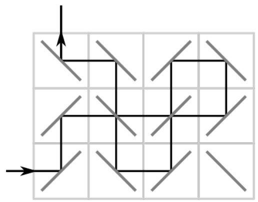
Rezultat: 6,28

Rješenje: Uz pretpostavku da je Zemlja savršena kugla, uže omotano oko ekvatora opisat će kružnicu. Označimo li radijus te kružnice s r, Evino će uže biti duljine $2\pi r$. S druge strane, Adamovo će uže činiti kružnicu radijusa $r + 1\,\mathrm{m}$, stoga mora biti duljine $2\pi(r + 1\,\mathrm{m})$. Razlika u duljinama dvaju užeta je $2\pi(r + 1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Zadatak 9 ... Optička igra

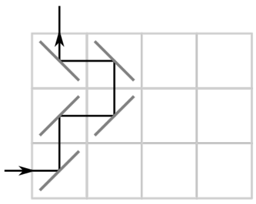
Mario ima optičku igru koja se sastoji od 3×4 ploče kao na lijevoj slici. Mario mora staviti obostrano zrcalo s obje strane kvadratića s upitnikom tako da kut između zrcala i stranica ploče bude 45°. Zatim Mario uzima laser i emitira svjetlosnu zraku koja se vraća kao što je prikazano na slici. Na desnoj slici nacrtana je jedna moguća situacija. Koliki mora biti najmanji broj refleksija svjetlosne zrake da bi ona ušla i izašla kao što je naznačeno?





Rezultat: 5

Rješenje: Svaki put kada svjetlosna zraka udari u zrcalo, ona mijenja svoj smjer za 90° udesno ili ulijevo (ovisno o orijentaciji zrcala). Lako je pronaći konfiguraciju zrcala gdje je potrebno samo 5 refleksija (orijentacija zrcala u praznim kvadratima nije bitna):



S druge strane, lako se vidi da nije moguće imati najkraću rutu kroz 3 kvadratića (zraka ne bi promijenila smjer u nekoliko kvadrata). Nadalje, vidi se da broj refleksija mora biti neparan - nakon svake neparne refleksije, zraka nastavlja vertikalno (nakon parne nastavlja horizontalno).
Dakle broj refleksija je neparan broj veći od 3 pa je jasno da je 5 najmanji takav broj.

Zadatak 10 ... Čupav problem

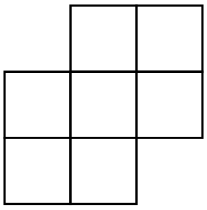
Tomica je izumio novu vrstu brojeva koje je nazvao "čupavi" brojevi. Pozitivan cijeli broj naziva čupavim ako su mu sve znamenke iste. Koliko ima čupavih cijelih brojeva većih od deset i manjih od milijun?

Rezultat: 45

Rješenje: Koristimo li samo znamenku 1, imamo 5 čupavih brojeva u danom rasponu, i to 11, 111, 1111, 11111 i 111111. Slično, imamo po 5 čupavih brojeva za svaku od znamenki od 2 do 9, a za znamenku 0 nemamo čupavih brojeva. Stoga imamo $9 \cdot 5 = 45$ čupavih brojeva većih od deset i manjih od milijun.

Zadatak 11 ... Stara ploča

Danijel je na tavanu pronašao staru ploču. Ploča je prikazana na slici. Danijel je otkrio da u kvadratiće ploče treba upisati brojeve 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tako da svaki kvadratić sadrži točno jedan broj te da se svaki broj iskoristi točno jednom. Štoviše, treba upisati brojeve tako da zbroj u svakom stupcu bude jednak. Danijel je to učinio na sve moguće načine i svaki put je izračunao umnožak brojeva u srednjem stupcu. Koliko različitih rezultata Danijel može dobiti?



Rezultat: 1

Rješenje: Zbroj svih brojeva upisanih na ploči je $0+1+2+3+4+5+6=21$. To znači da zbroj brojeva u svakom stupcu treba biti $21:3=7$. Tada broj 0 ne može biti u prvom ni zadnjem stupcu jer bismo u drugi kvadratić trebali upisati broj 7, ali taj broj ne smijemo koristiti. Dakle, 0 upisujemo u srednji stupac, zbog čega će umnožak u srednjem stupcu uvijek biti 0. Stoga Danijel može dobiti samo 1 rezultat, a to je 0.

Zadatak 12 ... Vrijeme je za kupanje

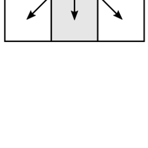
Dorijan ima kadu zapremine 150 l. Kada se može napuniti iz slavine s protokom 0,2 l/s. Međutim, kad odvod nije zatvoren, voda iz kade otječe brzinom 0,05 l/s. Dorijan je otvorio slavinu kako bi se kada napunila, ali je zaboravio zatvoriti odvod. Koliko će se sekundi dulje kada trebati puniti nego da nije zaboravio zatvoriti odvod?

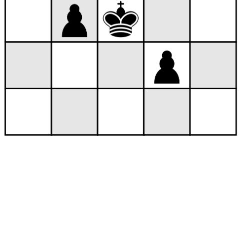
Rezultat: 250

Rješenje: Da Dorijan nije zaboravio zatvoriti odvod, kada bi se napunila u vremenu $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$. No, Dorijan je zaboravio zatvoriti odvod, što je smanjilo dotok vode na $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. Sada će se kada napuniti za $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$, pa će punjenje kade trajati $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ dulje.

Zadatak 13 ... Kraljeva šetnja

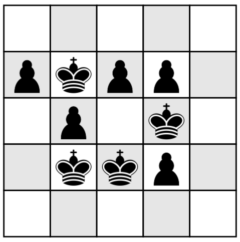
Bruno se igra šahovskim figurama, a najviše ga fascinira kralj. Kralj se može pomaknuti na bilo koje od susjednih polja (polja s kojim dijeli vrh ili stranicu), ali na tom polju ne smije biti druga figura. Bruno je postavio figure kao na desnoj slici. Na koliko polja kralj može završiti nakon što se pomakne točno dva puta?



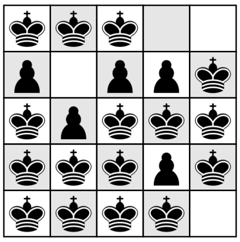


Rezultat: 16

Rješenje: Nakon prvog poteza, kralj se može pomaknuti na bilo koje polje prikazano na ovoj slici:



Sada je pitanje, na koliko polja se kralj može pomaknuti iz bilo koje pozicije s prethodne slike. Lako vidimo da se kralj može pomaknuti na bilo koje od ovih 16 polja.



Zadatak 14 ... Izrezani četverokut

Adamu je bilo dosadno na satu matematike, pa je nacrtao četverokut s opsegom 49 cm. Zatim je odlučio razrezati četverokut na 2 trokuta po jednoj od njegovih dijagonala. Otkrio je da je zbroj opsega novih trokuta 77 cm. Kolika je u centimetrima duljina dijagonale po kojoj je Adam prerezao četverokut?

Rezultat: 14

Rješenje: Dva nova trokuta imaju po dvije stranice iste kao stranice izvornog četverokuta i jednu stranicu duljine dijagonale. To znači da je novi opseg jednak zbroju opsega uvećanom za dvostruku duljinu dijagonale. Budući da se opseg povećao za $77\,\mathrm{cm} - 49\,\mathrm{cm} = 28\,\mathrm{cm}$, duljina dijagonale je $28\,\mathrm{cm} : 2 = 14\,\mathrm{cm}$.

Zadatak 15 ... Baci i zbriši

Sara vozi skateboard brzinom od 9 km/h. Odluči baciti loptu točno iznad sebe i to tako da će lopta pasti na tlo nakon točno 4 sekunde. Odmah nakon ispuštanja lopte, Sara ubrza do 18 km/h. Kolika će, u metrima, biti udaljenost između Sarinog skateboarda i lopte u trenutku udara lopte u tlo?
Napomena: Otpor zraka je zanemariv.

Rezultat: 10

Rješenje: Nakon bacanja, horizontalna komponenta brzine lopte bit će $9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$, a Sarina će nova brzina biti $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$. Dakle, relativna brzina između Sare i lopte bit će $5\,\mathrm{m/s} - 2{,}5\,\mathrm{m/s} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Stoga će, nakon 4 sekunde kada lopta padne na tlo, Sara od nje biti udaljena $2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$.

Zadatak 16 ... Večeras je naša fešta

Ana, Branka, Cvjeta i Dina idu na zabavu, a svaka dolazi u različito vrijeme. Kad su se konačno okupile, svaka je izrekla neistinitu tvrdnju:

Ana reče: "Došla sam druga."
Branka ustvrdi: "Stigla sam prije Ane."
Cvjeta doda: "Ja sam došla poslije Ane."
Dina zaključi: "Došla sam prva."

U kojem su poretku zapravo pristizale?

U rješenju zamijeni imena djevojaka s odgovarajućim slovom (prvim slovom imena). Npr. ako je odgovor Ana, Branka, Cvjeta, Dina, onda unesi ABCD.

Rezultat: CDAB

Rješenje: U prvom koraku određujemo Aninu poziciju. Budući da su sve tvrdnje lažne, Ana nije mogla doći druga. Branka i Cvjeta su došle nakon i prije Ane, tim redom. Dakle, barem je jedna djevojka stigla prije Ane i barem jedna nakon Ane, pa nije moguće da je Ana stigla prva ili zadnja. Ostaje samo mogućnost da je treća. Brankina lažna tvrdnja da je stigla prije Ane implicira da je stigla nakon nje, pa je Branka zadnja. Dina nije došla prva, dakle došla je druga jer smo već popunili treće i četvrto mjesto. Na kraju, Cvjeta je mogla doći samo prva, a to je u skladu s negacijom njezine tvrdnje. Proredak je CDAB.

Zadatak 17 ... Zagrebački električni tramvaj

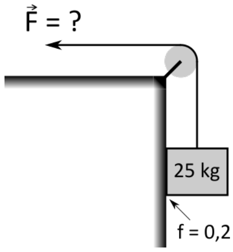
Jakov se jednom prilikom Zagrebom morao voziti tramvajem broj 12. Za vrijeme vožnje, primijetio je tramvaj 12 iz suprotnog smjera u prosjeku svake dvije minute. Pomislio je kako je nepošteno što linija 5 kojom svakog dana putuje u školu dolazi na stanicu samo svakih 6 minuta, dok 12-ica vozi tako često. Koliko više linija 12 stane na stanici u jednom satu u usporedbi s linijom 5?

Rezultat: 5

Rješenje: Izračunajmo interval tramvaja 12. Kad se Jakov vozi u tramvaju, njegova relativna brzina prema suprotnim tramvajima je dvostruko veća od stvarne brzine tih tramvaja. To znači da konstantnu udaljenost između dva uzastopna tramvaja prijeđe dvostruko brže. Dakle, pravi interval pristizanja na stanicu je dvostruko dulji nego što se čini Jakovu kad gleda tramvaje iz suprotnog smjera. Tramvaj 12 staje na stanici svake $2 \cdot 2 = 4$ minute. Po satu je to $60 : 4 = 15$ tramvaja broj 12.
Slično, tramvaja broj 5 po satu staje $60 : 6 = 10$. Dakle, na stanici u satu staje $15 - 10 = 5$ tramvaja 12 više nego tramvaja 5.

Zadatak 18 ... Možemo li popraviti?

Bob Graditelj bi želio odnijeti kutiju na viši kat zgrade. Uzeo je koloturnik i napravio mehanizam kao na slici te se zapita. Kutija je mase 25 kg, a koeficijent trenja između kutije i zida je 0,2. Kolika je najmanja sila u Newtonima kojom Bob može povući uže da bi se kutija pomaknula prema gore?



Rezultat: 250

Rješenje: Moramo razmisliti kako trenje utječe na kutiju. Sila trenja djeluje samo između čvrstih tijela koja međusobno na sebe djeluju nekom silom pritiska. No, u našem slučaju kutija ne uzrokuje nikakav pritisak na okomiti zid. Dakle, na kutiju ne djeluje sila trenja. To znači da je jedina sila (osim one od Boba) koja djeluje na kutiju gravitacijska sila $F_g = mg$, gdje je $m = 25\,\mathrm{kg}$ masa kutije. Bob mora djelovati silom F istog iznosa, pa mora vući uže silom $F = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Zadatak 19 ... Bobičasti pekmezi

Karolina organizira degustaciju svojih pekmeza. U skladištu ima 10 pekmeza od maline, 15 od borovnice, 7 od kupine, 15 od brusnice i 9 od jagode. Želi uzeti pekmeze tako da od svake vrste uzme barem jedan pekmez.

Štoviše, zna da njezini prijatelji vole maline i borovnice, pa želi uzeti barem 2 pekmeza od maline i barem 5 od borovnice. No, u skladištu je mračno pa ona ne može prepoznati koji je pekmez koje vrste. Koliko najmanje pekmeza Karolina mora uzeti da bi bila sigurna da je uzela dovoljno pekmeza da zadovolji sve svoje zahtjeve?

Rezultat: 50

Rješenje: Karolinini zahtjevi su da uzme barem 2 pekmeza od maline, 5 od borovnice, 1 od kupine, 1 od brusnice i 1 pekmez od jagode. Razmotrimo što bi se moglo dogoditi kad se neki od ovih zahtjeva ne bi ispunio. Najgori slučaj koji se mogao dogoditi zbog čega Karolina ne bi imala 2 pekmeza od maline je da je uzela sve pekmeze drugih vrsta i 1 pekmez od maline. Ukupno je to $1 + 15 + 7 + 15 + 9 = 47$ pekmeza. Međutim, da je uzela 48 pekmeza, taj problem se ne bi dogodio. Slično, problem bi bio da je uzela 4 pekmeza od borovnice i sve pekmeze ostalih vrsta - ukupno $10 + 4 + 7 + 15 + 9 = 45$ pekmeza. Dakle, treba uzeti barem 46 pekmeza. Ponavljajući istu ideju za kupine, brusnice i jagode, nema problema ako Karolina uzme redom barem $(10+15+0+15+9)+1 = 50$, $(10+15+7+0+9)+1 = 42$ ili $(10+15+7+15+0)+1 = 48$ pekmeza. Spojimo li sve, saznajemo da će svi zahtjevi biti ispunjeni ako je broj uzetih pekmeza najveći od brojeva 48, 46, 50, 42, 48. Stoga Karolina mora uzeti 50 pekmeza.

Zadatak 20 ... Tour de Náboj

Tijekom biciklističke utrke, natjecatelji su morali proći stazu isključivo uzbrdica i nizbrdica - jednu trećinu utrke čine uzbrdice, a dvije trećine nizbrdice. Nakon utrke, grupa statističara napravila je statistiku pobjednika. Pobjednik je postigao prosječnu brzinu od 24 km/h i potrošio je trostruko više vremena na uzbrdice, nego na nizbrdice. Koliko, u kilometrima na sat, iznosi prosječna brzina pobjednika na nizbrdicama?

Rezultat: 64

Rješenje: Neka je s ukupna duljina staze i t vrijeme koje je trebalo pobjedniku da dođe do cilja. Znamo da je prosječna brzina pobjednika 24 km/h pa je $\frac{s}{t} = 24\,\text{km/h}$.
Dvije trećine staze čine nizbrdice, što znači da je duljina nizbrdica ukupno $\frac{2}{3}s$. Nadalje, pobjednik je na uzbrdice potrošio 3 puta više više vremena, iz čega slijedi da je na nizbrdice potrošio $\frac{1}{4}t$. Prosječna je brzina na nizbrdicama:

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t}$$

Uvrštavanjem $\frac{s}{t} = 24\,\text{km/h}$ dobivamo da je prosječna brzina pobjednika na nizbrdicama:

$$v = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\text{km/h} = 64\,\text{km/h}$$

Zadatak 21 ... Magični kvadrat

Katarina se igra takozvanim magičnim kvadratom. Treba popuniti polja 3×3 ploče tako da zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale bude jednak. Katarina je već upisala neke brojeve. Koji je zbroj preostalih 5 brojeva koji nisu upisani u magični kvadrat?

17	16	
15		19

Rezultat: 95

Rješenje: Pogledajmo zadnji redak i drugi stupac. Oni trebaju imati jednak zbroj, ali imaju jedno zajedničko polje. Dakle, i zbrojevi preostalih polja koja nisu zajednička isto trebaju biti jednaki. Stoga zbroj brojeva 15 i 19 mora biti isti kao zbroj broja 16 i broja u srednjem polju. Ovaj zbroj je $15 + 19 = 34$, tako da broj u srednjem kvadratu mora biti $34 - 16 = 18$.

17	16	
	18	
15		19

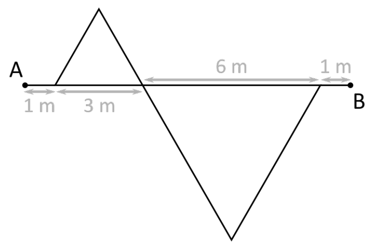
Sada imamo sve brojeve na jednoj od dijagonala. Dakle, zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale mora biti $17 + 18 + 19 = 54$. Lako sada popunimo cijelu tablicu.

17	16	21
22	18	14
15	20	19

Na kraju izračunamo da je zbroj brojeva koji nedostaju $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

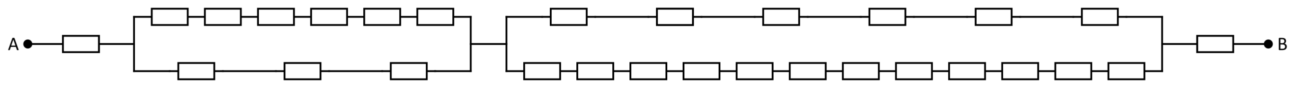
Zadatak 22 ... Zavareno

Anja je savila i zavarila lik od žice specifičnog otpora $0{,}1\,\Omega/\mathrm{m}$. Lik se sastoji od žice duljine $1\,\mathrm{m}$, jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $3\,\mathrm{m}$, jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $6\,\mathrm{m}$ te žice duljine $1\,\mathrm{m}$. Lik je prikazan na slici. Izračunaj, u omima, otpor ovog lika između vrhova A i B.



Rezultat: 0,8

Rješenje:
Možemo zamijeniti svaki $1\,\mathrm{m}$ žice s otpornikom otpora $R_0 = 0{,}1\,\Omega$. Na taj način dobivamo sljedeći dijagram:



Sad koristeći uobičajene formule za otpornike u serijskom i paralelnom spoju nalazimo da je otpor između vrhova A i B:

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Zadatak 23 ... SPA

Ana ne voli hladnu vodu u bazenu pa želi kupiti solarne panele. Njezin je bazen volumena $150\,\mathrm{hl}$ i željela bi ga zagrijati s $29\,^\circ\mathrm{C}$ na $33\,^\circ\mathrm{C}$ kroz 10 sati na konstantnoj sunčevoj svjetlosti. Zna da $1\,\mathrm{m}^2$ solarnih panela po takvom suncu daje 1,4 kW. Koliko m^2 solarnih panela Ani treba da bi zagrijala vodu na željenu temperaturu u zadanom vremenu?

Rezultat: 5

Rješenje:
Voda volumena $V = 150\,\mathrm{hl}$ ima masu $m = V\rho_{voda}$. Da bismo ju zagrijali s $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ na $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$ trebamo toplinu $Q = c_{voda}m(t_2 - t_1) = c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)$. Ova toplina mora biti jednaka radu koji izvrše solarni paneli. Oni imaju snagu $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$ po jedinici površine, stoga paneli, kako je ukupna površina S, imaju snagu $P = P_0S$. Nakon $t = 10\,\mathrm{h}$, izvršit će rad $W = Pt = P_0St$, a to je rad izvršen na vodi, pa imamo:

$$\begin{aligned} W &= Q \\ P_0St &= c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1) \\ S &= \frac{c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)}{P_0t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m^2} \end{aligned}$$

Dakle, Ana treba $5\,\mathrm{m}^2$ solarnih panela.

Zadatak 24 ... Nogometna utakmica

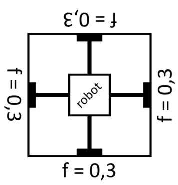
Tim fizičara igra nogometnu utakmicu u Náboj Kupu protiv tima matematičara. Na poluvremenu je rezultat 3 : 2 za fizičare, ali utakmica je završila rezultatom 4 : 5 za matematičare. Na koliko su mogućih načina timovi mogli postići pogotke?

Rezultat: 40

Rješenje: Označimo poredak golova kao niz slova F i M, gdje F označava pogodak fizičara, a M pogodak matematičara. Uz ovu notaciju, vidimo da postoji 10 mogućih redoslijeda postizanja pogodaka u prvom poluvremenu: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM, FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM, FFFMM. Slično vidimo da su golovi u drugom poluvremenu mogli biti raspoređeni na 4 načina: FMMM, MFMM, MMFM, MMMF. Prvo i drugo poluvrijeme su nezavisni pa bilo koji poredak prvog poluvremena može biti sparen s bilo kojim poretkom drugog poluvremena. Dakle, ukupni broj mogućnosti je $10 \cdot 4 = 40$.

Zadatak 25 ... Stabilni robot

Znanstvenici žele istražiti duboku rupu koju su iskopali, a čiji je presjek kvadrat. U tu su svrhu u rupu postavili malog robota mase 15 kg. Kako bi se stabilizirao, robot rukama gura svaku stranu rupe. Svakom rukom gura silom F. Znanstvenici su brzo odredili da je koeficijent trenja između ruku robota i svake strane 0,3. Nacrtali su skicu robota gledano odozgo kao na slici. Kojom minimalnom silom F u njutnima robot mora gurati strane rupe kako bi ostao stabilan?



Rezultat: 125

Rješenje: Kako robot svaku stranu gura silom F, sila trenja sa svake strane je $F_f = fF$ i usmjerena je prema gore, gdje je f koeficijent trenja $f = 0{,}3$. S druge strane, sila teža $F_g = mg$ djeluje na robota prema dolje. Kako bi robot ostao stabilan, sila teža mora biti jednaka zbroju sve četiri sile trenja. Dakle:

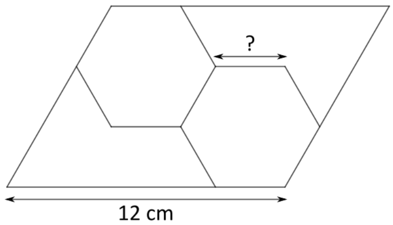
$$\begin{aligned} F_g &= 4F_f \\ mg &= 4fF \\ F &= \frac{mg}{4f} \end{aligned}$$

Konačno, sila F je:

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\mathrm{N}$$

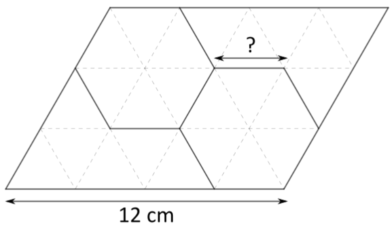
Zadatak 26 ... Novi logo

Paula dizajnira novi logo za svoju udrugu. Počela je crtajući paralelogram s jednom stranicom duljine 12 cm. Shvatila je da u paralelogram može upisati dva pravilna šesterokuta kao na slici. Kolika je duljina stranice tih šesterokuta u centimentira?



Rezultat: 3

Rješenje:
Svaki šesterokut možemo podijeliti na 6 jednakostraničnih trokuta. Tako preko slike možemo nacrtati mrežu trokuta:



Odavde odmah vidimo da je duljina stranice šesterokuta (koja je jednaka duljini stranice trokuta) $12\,\mathrm{cm} : 4 = 3\,\mathrm{cm}$.

Zadatak 27 ... Na morskom dnu

Pirat Patrik stupio je u bitku s drugim piratom. Njegov je brod pogođen topovskom kuglom i sada 50 l vode navire u brod svake sekunde. Patrik želi izračunati koliko vremena ima prije nego što brod potone. U računici je aproksimirao svoj brod kao kvadar dimenzija $10\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ s masom od 5 t. Koliko mu je vremena u sekundama ostalo prije nego što brod potone?

Rezultat: 1100

Rješenje: Brod će potonuti kada se gravitacijska sila izjednači sa silom uzgona. Maksimalna sila uzgona koja može djelovati na brod volumena V je $F_{uzg} = V\rho_{voda}g$. Gravitacijsku silu ćemo podijeliti u ovisnosti o tome djeluje li na sami brod ili na vodu koja u brod navire. Gravitacijska sila na sami brod iznosi $F_{g_1} = mg$. Voda navire u brod tokom Q, pa će nakon vremena t u brodu biti volumen vode jednak $V' = Qt$. Gravitacijska sila na tu vodu bit će $F_{g_2} = Qt\rho_{voda}g$. Uvjet za poniranje broda je $F_{uzg} = F_{g_1} + F_{g_2}$, odakle možemo dobiti da je vrijeme t:

$$V\rho_{voda}g = mg + Qt\rho_{voda}g$$
$$t = \frac{V\rho_{voda} - m}{Q\rho_{voda}}$$

Dakle, brod će potonuti nakon vremena:

$$t = \frac{V\rho_{voda} - m}{Q\rho_{voda}} = \frac{(10\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m})\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} - 5000\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{m^3/s}\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}} = 1100\,\mathrm{s}$$

Zadatak 28 ... Zbroj godina

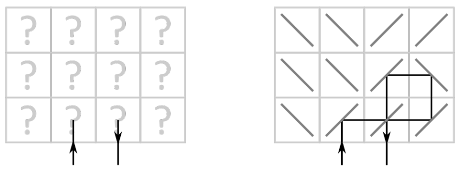
Danas su dvije prijateljice Ana i Ena izračunale zbroj godina u kojima su živjele. Enin zbroj ispao je za 19945 veći od Aninog. U kojoj je godini Ena rođena?

Rezultat: 1990

Rješenje: Obje su djevojke zbrajale godine počevši od onih u kojima su rođene do 2023. Ena je dobila veći rezultat, dakle ona je u svoju sumu dodala neke godine koje Ana nije. Kako svaki pribrojnik iznosi otprilike 2000, broj pribrojnika koji je dodala samo Ena je $19945 : 2000 \doteq 10$. To znači da su brojevi koje je dodala samo Ena redom x, $x+1$, ..., $x+9$, pri čemu je x godina rođenja Ene. Njihova je suma $10x + 45$. Ovime smo dobili jednadžbu $10x + 45 = 19945$ iz čega zaključujemo da je Ena rođena godine $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

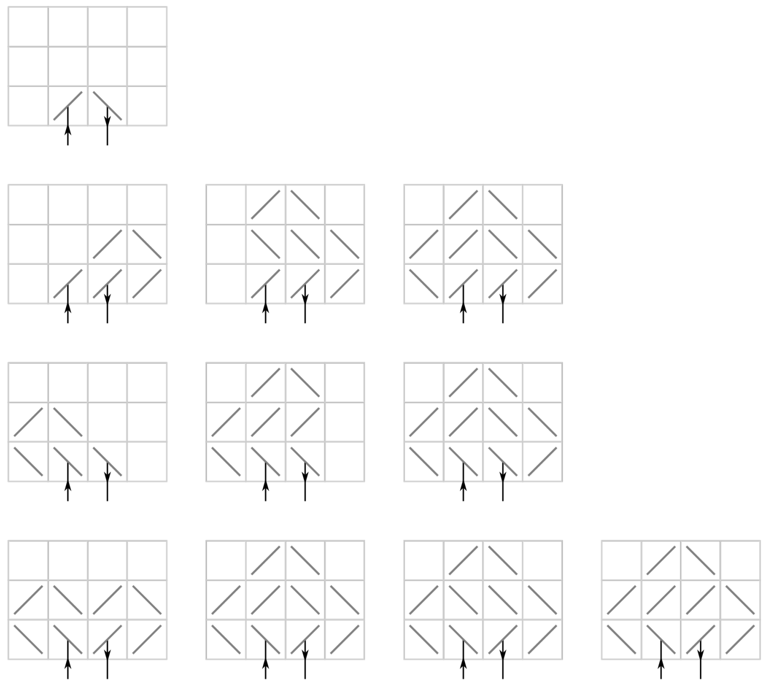
Zadatak 29 ... Optička igra se vratila

Mario ima optičku igru (opet). Igra uključuje 3×4 ploču kao što je prikazano na lijevoj slici. Mario mora staviti obostrano zrcalo na svako polje s upitnikom tako da kut između zrcala i stranica ploče bude 45°. Ovaj put Mario uzima laser i emitira svjetlosnu zraku koja se vraća kao što je prikazano na slici. Jedna moguća situacija koja se mogla dogoditi prikazana je na desnoj slici. Mario postavlja drugačije pitanje nego prije: Koliko je različitih putanja (uključujući i onu na desnoj slici) mogla proći svjetlosna zraka da uđe i izađe kao što je naznačeno?



Rezultat: 11

Rješenje: Isprobavamo mogućnosti na temelju orijentacije prvog i posljednjeg zrcala. Na temelju njih dobivamo retke sljedećih slike (radi boljeg uvida ne crtamo zrake i zrcala čija orijentacija nije bitna):



Dakle, vidimo da postoji $1+3+3+4=11$ mogućih putanja svjetlosne zrake.

Zadatak 30 ... Jednakiji četverokut

Andrija je nacrtao pravokutnik $ABCD$ tako da je $AB : BC = 9 : 8$. Označio je točke E i F redom na dužinama BC, CD, tako da je $CE = BE$ i $DF = 2 \cdot FC$. Na taj je način konstruirao četverokut $ABEF$. Zamolio je svog prijatelja Jakšu da odredi vrijednost opsega $ABEF$ u centimetrima, a svog prijatelja Ivana vrijednost površine $ABEF$ u kvadratnim centimetrima. Ispostavilo se da su dobili istu brojčanu vrijednost. Izračunajte opseg pravokutnika $ABCD$ u centimetrima. Odgovorite u obliku neskrativog razlomka.

Rezultat: $\frac{68}{3}$

Rješenje: Neka su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ $AB = 9x$ i $BC = 8x$ za neki x.
Najprije izračunamo opseg četverokuta $ABEF$. Katete u pravokutnom trokutu ECF imaju duljine $4x$ i $3x$. Dakle, Pitagorin poučak daje $EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. Slično, pravokutni trokut FDA ima katete duljina $6x$ i $8x$, pa je $FA = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Prema tome, opseg četverokuta je $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Sada izračunajmo površinu četverokuta $ABEF$. Pravokutni trokuti ECF i FDA imaju površine $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ i $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. Površina pravokutnika $ABCD$ je $(9x)\cdot(8x) = 72x^2$, pa je površina četverokuta $ABEF$ $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$. Znamo da su brojčane vrijednosti opsega i površine četverokuta $ABEF$ iste, što znači:

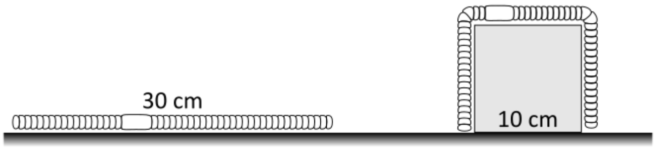
$$\frac{28x}{\mathrm{cm}} = \frac{42x^2}{\mathrm{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\mathrm{cm} = \frac{2}{3}\mathrm{cm}$$

Preostaje izračunati opseg pravokutnika $ABCD$ koji je $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}\mathrm{cm} = \frac{68}{3}\mathrm{cm}$.

Zadatak 31 ... Marljivi crvić

Homogeni crv s masom $3\,\mathrm{g}$ i duljinom $30\,\mathrm{cm}$ želi se popeti preko kocke s duljinom stranice $10\,\mathrm{cm}$ koja se nalazi u vrtu. Crv će se popeti na način kao što je prikazano na slici. Koji je rad potreban za to penjanje izražen u mJ

Napomena: Možete zanemariti trenje između crva i kocke.



Rezultat: 2

Rješenje: Rad koji crv mora obaviti bit će jednak maksimalnoj potencijalnoj energiji crva tijekom njegovog penjanja preko kocke (s pretpostavkom da je njegova potencijalna energija na početku bila jednaka nuli). Nije teško za vidjeti da će taj maksimum biti postignut točno u trenutku kad će crv biti u poziciji prikazanoj na slici (što je veći dio crva više, to mu je veća potencijalna energija).
"Razdijelimo" crva na 3 dijela- dva vertikalna i jedan horizontalni kao na slici. Svi će oni biti duljine 10 cm, što je trećina duljine crva. Kako je on homogen, sva 3 dijela imaju masu $m_0 = 3\,\mathrm{g} : 3 = 1\,\mathrm{g}$. Horizontalni dio ima težište na visini $h_2 = 10\,\mathrm{cm}$, pa je potencijalna energija tog dijela jednaka $E_2 = m_0 g h_2 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}001\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{mJ}$. Vertikalni dijelovi imaju svoja težišta na visini $h_1 = h_3 = 5\,\mathrm{cm}$, pa je njihova potencijalna energija jednaka $E_1 = E_3 = m_0 g h_1 = m_0 g h_3 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 0{,}0005\,\mathrm{J} = 0{,}5\,\mathrm{mJ}$. Dakle, makismalna potencijalna energija na crva bit će $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\mathrm{mJ} + 1\,\mathrm{mJ} + 0{,}5\,\mathrm{mJ} = 2\,\mathrm{mJ}$, što je jednako radu potrebnom za penjanje.

Zadatak 32 ... Zaboravljena lozinka

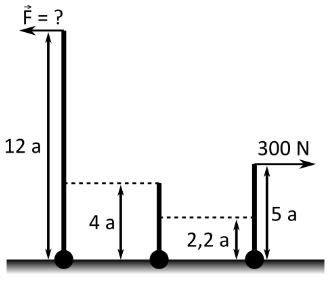
Tamara ima sve svoje najvrednije stvari u trezoru zaštićenom lozinkom od 5 slova engleske abecede. Nažalost, ona ne koristi upravitelj lozinki i potpuno je zaboravila lozinku za svoj trezor. Međutim, sjeća se da su prva dva slova bila NA i da je koristila samo englesku abecedu od 26 slova. Kako bi otvorila trezor, isprobava sve moguće kombinacije za preostala slova abecednim redom (AAA, AAB, AAC, ...). Ako je njezina izvorna kombinacija NABOJ, koliko pokušaja treba napraviti?

Rezultat: 1050

Rješenje: Problem možemo podijeliti na manje, lakše dijelove. Prvo, koliko pokušaja trebamo da dođemo do ABA? Budući da u engleskoj abecedi ima 26 slova, bit će potrebno 26 ponavljanja za promjenu posljednjeg slova. Koliko za BAA? Pa, za svakih 26 ponavljanja posljednjeg slova, drugo slovo će se povećati za 1, prema tome, da bismo došli do BAA od AAA, potrebno nam je $26 \cdot 26 = 676$ pokušaja. Sada da bismo došli do BOA od BAA potrebno nam je $26 \cdot 14 = 364$ pokušaja jer je O 15-to slovo abecede i moramo isprobati svih 14 slova prije njega. Konačno, J je 10-to slovo, stoga nam treba dodatnih 10 pokušaja da dođemo do BOJ-a od BOA. To sve zajedno čini $676 + 364 + 10 = 1050$ pokušaja.

Zadatak 33 ... Patrik vuče konce

Patrik je uzeo 3 poluge duljina $12a$, $4a$, $5a$ i povezao ih horizontalnom užadi kao na slici. Počeo je vuči najdesniju polugu silom od 300 N. Kolika je, u njutnima, sila kojom mora povuči najljeviju polugu kako bi mehanizam ostao mirovati?



Rezultat: 125

Rješenje: Mehanizam ostaje mirovati samo ako je moment sile koji djeluje na svaku polugu 0. Moramo, stoga, promotriti momente sile koji djeluju na poluge. U tu svrhu najprije moramo razumjeti užad. U svakom užetu postoji napetost pa će uže djelovati na obje poluge silom iznosa jednakog toj sili napetosti. Na primjer, uže koje spaja srednju i desnu polugu djelovat će jednakom silom na srednju polugu (u desno) i desnu polugu (u lijevo). Štoviše, te sile djeluju na istoj visini, zato i na jednakoj udaljenosti od osi rotacije poluga. Zaključujemo da svako uže na obje poluge djeluje momentom sile jednakog iznosa.
To znači da možemo ignorirati srednju polugu. Uistinu, sila koja djeluje na desnu polugu uzrokuje na njoj moment sile iznosa M. To treba kompenzirati momentom sile koje stvara napetost užeta pričvršćenog za desnu polugu. Budući da užad nosi moment sile, iznos momenta kojim desno uže djeluje na srednju polugu mora također biti M. Slično, kada raspišemo silu napetosti lijevog užeta, dobivamo da je moment sile na lijevu polugu ponovo M.
Dakle, kako bi mehanizam ostao mirovati, dvije relevantna sile moraju imati moment sile istog iznosa, što daje jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
F \cdot (12a) &= 300\,\mathrm{N} \cdot (5a) \\
F &= \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

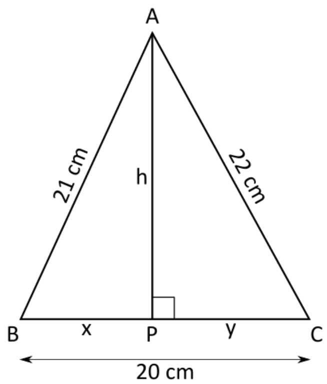
Patrik mora povući polugu silom od $125\,\mathrm{N}$.

Zadatak 34 ... Visina nas dijeli i spaja

Zvonimir je nacrtao trokut s duljinama stranica $20\,\mathrm{cm}$, $21\,\mathrm{cm}$ i $22\,\mathrm{cm}$ na ploču. Zatim je spustio visinu na stranicu duljine $20\,\mathrm{cm}$. Podijelio je ovu stranicu na dva dijela. Kolika je pozitivna razlika duljina ta dva odsječka u centimetrima?

Rezultat: 2,15

Rješenje: Neka duljine i nazivi vrhova budu kao na ovoj slici:



Promotrimo pravokutne trokute ABP i ACP. Možemo za njih napisati kako glasi Pitagorin poučak te dobivamo:

$$
\begin{aligned}
h^2 + x^2 &= (21\,\mathrm{cm})^2 \\
h^2 + y^2 &= (22\,\mathrm{cm})^2
\end{aligned}
$$

Ako izrazimo h^2 iz obje jednakosti i usporedimo ih, dobivamo:

$$
\begin{aligned}
(21\,\mathrm{cm})^2 - x^2 &= (22\,\mathrm{cm})^2 - y^2 \\
y^2 - x^2 &= (22\,\mathrm{cm})^2 - (21\,\mathrm{cm})^2
\end{aligned}
$$

Sada možemo primijeniti formulu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ na obje strane kako bismo dobili:

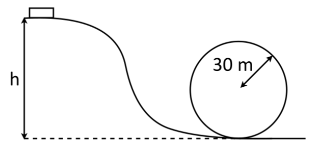
$$(y-x)(y+x) = (1\,\text{cm})(43\,\text{cm}) = 43\,\text{cm}^2$$

Ali znamo da je $y + x = 20\,\text{cm}$. Dakle, razlika duljina $y - x$ koju trebamo pronaći je:

$$y - x = \frac{43\,\text{cm}^2}{x+y} = \frac{43\,\text{cm}^2}{20\,\text{cm}} = \frac{43}{20}\,\text{cm} = 2{,}15\,\text{cm}$$

Zadatak 35 ... Informativni vlak smrti

Matej je čitajući knjigu naučio sljedeću informaciju: ako se automobil mase m giba brzinom v u zavoju koji je dio kružnice radijusa r, na auto mora djelovati centripetalna sila $F_c = \frac{mv^2}{r}$.
Matej je zatim pošao u zabavni park gdje mu je zanimanje privukao vlak smrti. U određenom dijelu, vagon je pušten slobodno padati s visine h i onda napraviti petlju radijusa 30 m, kao što je prikazano na slici. Kolika je minimalna potrebna visina h kako bi vagon napravio petlju bez da padne?



Rezultat: 75

Rješenje: Neka je m masa vagona, $r = 30\,\text{m}$ radijus petlje i v brzina vagona u najvišoj točki petlje.
Iz prvog dijela zadatke znamo da u najvišoj točki petlje na vagon mora djelovati centripetalna sila $F_c = \frac{mv^2}{r}$.
Dvije sile mogu na taj način i u pravom smjeru djelovati na vagon - gravitacijska sila $F_g = mg$ i neka sila podloge kojom djeluju tračnice petlje. Želimo da centripetalna sila bude što manja (za veću centripetalnu silu vagon će trebati veću brzinu, što znači više energije na početku). Budući da se ne možemo riješiti gravitacijske sile, minimalna je upravo sila $F_c = F_g$. Odavde dobivamo:

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$
$$\frac{v^2}{r} = g$$
$$v^2 = rg$$

Promotrimo sada energije. Na početku vagon ima samo potencijalnu energiju $E_1 = mgh$. Međutim, na vrhu petlje vagon ima i potencijalnu i kinetičku energiju. U najvišoj točki nalazit će se na visini $2r$ i imati brzinu v pa će mu energija biti $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. Kako je energija sačuvana, $E_1 = E_2$. U kombinaciji s jednadžbom za v^2 dobivamo:

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$
$$gh = 2gr + \frac{1}{2}rg$$
$$h = \frac{5}{2}r$$

Stoga bi kolica trebala početi padati s visine $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\text{m} = 75\,\text{m}$.

Zadatak 36 ... Križić-kružić turnir

Na turniru u križić-kružiću sudjelovalo je 24 natjecatelja. Svaki natjecatelj može igrati protiv bilo kojeg drugog natjecatelja, ali najviše jednu partiju. U određenom je trenutku Matko uočio da ne postoji skupina natjecatelja u kojoj je svaki natjecatelj odigrao barem dvije partije protiv natjecatelja iz te skupine. Koji je najveći mogući broj partija odigranih na turniru do tog trenutka?

Rezultat: 23

Rješenje: Rješenje se prirodno dijeli na dva dijela. Najprije pokazujemo da su mogle biti odigrane 23 partije. Nakon toga, pokazujemo da bi postojala skupina natjecatelja iz teksta zadatka ukoliko je odigrano 24 partija. To će dokazati da je odgovor 23.
Prvi dio. Označimo natjecatelje brojevima $1, 2, \ldots, 24$. Neka su odigrane partije između natjecatelja 1 i 2, 2 i 3, …, 23 i 24. Odaberemo li bilo koju skupinu natjecatelja, u njoj uvijek postoji natjecatelj s najmanjim brojem - nazovimo ga P. U toj skupini, natjecatelj P mogao je odigrati partiju samo s natjecateljem $P+1$, s obzirom da $P-1$ ne može biti član skupine (u tom bi slučaju on bio natjecatelj s najmanjim brojem). Prema tome, natjecatelj P odigrao je partiju s najviše 1 osobom iz skupine. Budući da to vrijedi za proizvoljnu skupinu natjecatelja, ne postoji skupina koja zadovoljava uvjet iz teksta zadatka. Dakle, mogle su se odigrati 23 partije.
Drugi dio. Dokažimo da, ukoliko su odigrane 24 partije, uvijek postoji skupina natjecatelja sa svojstvom iz teksta zadatka. Ukoliko postoji neki par igrača koji su odigrali barem dvije partije međusobno, oni trivijalno tvore traženu skupinu. Dakle, možemo pretpostaviti da ne postoji takav par.
Pretpostavimo najprije da je svaki natjecatelj odigrao barem dvije partije. Odaberimo natjecatelje na sljedeći način. Počnimo s proizvoljnim natjecateljem P_0. On je odigrao partiju s natjecateljem P_1. P_1 je odigrao s barem dva natjecatelja, stoga postoji $P_2 \neq P_0$ koji je s njime odigrao partiju. Slično, pronađimo $P_3 \neq P_1$ s kojim je partiju odigrao P_2. Nastavimo na isti način, sve dok u nekom trenutku ne dođemo do natjecatelja koji je već na neki način označen. Sada imamo skup natjecatelja $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_n$ sa svojstvom da je P_i igrao protiv P_{i-1} i P_{i+1}, dok su P_k i P_n igrali međusobno. Drugim riječima, možemo ih posložiti u krug navedenim redoslijedom tako da je svaki igrao sa svojim susjedima. To dokazuje da takva skupina ima svojstvo iz zadatka. Dakle, ukoliko je svaki natjecatelj odigrao barem dvije partije, gotovi smo.
Preostaje provjeriti slučaj kad je netko odigrao manje od dvije partije. Tada možemo zanemariti tog natjecatelja te ostajemo s manjim ukupnim brojem natjecatelja. Ipak, broj partija odigranih u preostalom skupu natjecatelja svakako je veći ili jednak broju natjecatelja. Dakle, nakon zanemarivanja natjecatelja preostaju dvije mogućnosti: ili su svi preostali natjecatelji odigrali barem dvije partije, ili postoji natjecatelj koji je odigrao jednu ili nijednu. U prvom slučaju prethodni argument pokazuje da postoji skupina natjecatelja sa svojstvom iz teksta zadataka. U suprotnom, postoji još jedan natjecatelj kojega zanemarujemo. Nastavljamo postupak. Ukoliko možemo neprestano smanjivati broj natjecatelja, nakon dovoljno ponavljanja (točnije 21 ponavljanje) ovog postupka, dolazimo do tri natjecatelja koji su međusobno odigrali barem tri partije. Jedina je mogućnost da su odigrali jedan protiv drugoga, tako da njih troje formiraju skupinu koju pokušavamo pronaći.
Ovime smo dokazali da tražena skupina postoji ukoliko su odigrane 24 partije.
Iz svega navedenog zaključujemo da je najveći mogući broj odigranih partija do tog trenutka 23.

Zadatak 37 … Brzopleto množenje

Luciju je zanimalo koliki je umnožak pozitivnih uzastopnih neparnih brojeva od jedan do trideset jedan, tj. koliko je $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Izvadila je svoj kalkulator i užurbano počela množiti brojeve. Lucija misli da je možda izostavila jedan od njih. Vidi da je znamenka stotice broja prikazanog na njezinom kalkulatoru 4. Koji je broj Lucija izostavila?

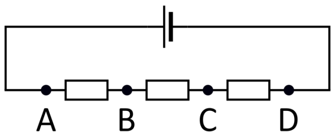
Rezultat: 25

Rješenje: Prvo trebamo otkriti pravilo o djeljivosti sa 125. Kriterij je da posljednje 3 znamenke broja moraju biti djeljive sa 125 (ovo je slično kriterijima o djeljivosti sa 2, 4, 8, 16 …, ali s 5, 25 , 125 …). Zašto? Zapišimo bilo koji broj kao $1000A + B$, gdje je $B < 1000$. Dakle, B je broj sastavljen od posljednje 3

znamenke. Primijetimo da je 1000 djeljiv sa 125 jer je $1000 = 8 \cdot 125$. Dakle, da bi broj $1000A + B$ bio djeljiv sa 125, B mora biti djeljiv sa 125. Ovime smo dokazali kriterij djeljivosti.
Sada pogledajmo kakve to posljedice ima. Jedini brojevi s najviše 3 znamenke djeljivi sa 125 su 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750 i 875. Nijedan od njih ne počinje znamenkom 4. Stoga zaključujemo da višekratnici od 125 ne mogu imati znamenku 4 kao stoticu.
Konačno, vratimo se našem izvornom problemu. Znamo da je znamenka stotica 4, tako da Lucijin rezultat ne može biti višekratnik od 125. Da nije izostavila nijedan broj, konačni umnožak bio bi djeljiv s $5 \cdot 15 \cdot 25$. Dakle, rastav umnoška na proste faktore sadržavao bi broj 5 četiri puta. Dakle, moramo ukloniti 5 najmanje dva puta, ali tako da izostavimo samo jedan broj. To je moguće samo izostavljanjem broja 25. To znači da je Lucija izostavila broj 25.

Zadatak 38 . . . Naposlijetku napon

Martin ima svoj najdraži strujni krug koji je nacrtan na slici. Bira točke A, B, C i D te mjeri napon između svakog para tih točaka. Izmjerene je vrijednosti zapisao na list papira. Nakon nekog vremena, pronašao je taj papir, ali jedna je od vrijednosti bila nečitljiva. Ostalih je pet vrijednosti u nekom poretku 7 V, 8 V, 10 V, 15 V and 18 V. Martin je počeo razmišljati i na temelju informacija s papira, uspio je odrediti dvije mogućnosti za šestu vrijednost napona. Koliki je, u voltima, zbroj te dvije mogućnosti?
Napomena: Otpori svih otpornika nisu nužno jednaki.



Rezultat: 28

Rješenje: Napon između dvije točke opisuje razliku iznosa potencijala tih dviju točaka. Potencijal opisuje (električnu) potencijalnu energiju čestice naboja 1 C. U svakoj od točaka A, B, C i D, ta bi čestica imala neku potencijalnu energiju pa taj broj možemo pridružiti svakoj od ovih točaka. Tada naponi opisuju razlike između tih brojeva.
Možemo, stoga, preformulirati zadatak u matematički problem pridruživanja brojeva nekim A, B, C i D (ove oznake nemaju veze s originalnim točkama fizikalnog zadatka) i to tako da njihove razlike u parovima budu 7, 8, 10, 15, 18 uz nepoznatu razliku. Primijetimo zanimljivo svojstvo: uzmemo neka tri slova X, Y i Z i definiramo uređaj, na primjer $X > Y > Z$. Tada je razlika $X - Z$ zbroj razlika $X - Y$ i $Y - Z$ (očito $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Dakle, ako uzmemo bilo koju trojku brojeva, jedna od razlika između njih bit će zbroj preostale dvije.
Vratimo se početnom zadatku. Recimo da je nepoznata razlika upravo razlika između C i D. Uzmimo brojeve A, B i C. Sve tri razlike među njima su poznate. Budući da jedna mora biti zbroj druge dvije imamo samo dvije mogućnosti: $7 + 8 = 15$ ili $8 + 10 = 18$. Slično vrijedi za A, B i D, pa jedna od te dvije trojke mora imati razlike 7, 8 i 15, a druga 8, 10 i 18. Neka je trojka A, B i C (u nekom poretku) ona s razlikama 7, 8 i 15. Trojke A, B, C i A, B, D se podudaraju samo u razlici između A i B pa upravo ta razlika mora biti 8 (to je jedina vrijednost razlika koja se pojavljuje u obje trojke 7, 8, 15 i 8, 10, 18).
Za sada se brojevi A i B mogu međusobno zamijeniti, tako da možemo izabrati da razlika između A i C bude 15, a da razlika između B i C bude 7. U trojki A, B, C brojevi A i C su ili najveći ili najmanji. Odaberimo ih tako da A bude najveći. Imamo dvije mogućnosti za razliku između D i brojeva A i B.
1. slučaj: razlika između A i D je 18. To znači da je u trojki A, B, D jedan od brojeva A i D je najveći, a drugi najmanji. Međutim, u trojki A, B, C odabrali smo A za najveći broj, dakle A je veći od B pa onda i najveći u trojki A, B, D. Sve ovo daje da je A za 15 veći od C i za 18 veći od D. Dakle, razlika između C i D je $(A - 15) - (A - 18) = 3$. To je naše prvo rješenje.
2. slučaj: razlika između A i D je 10. To znači da je u trojki A, B, D jedan od brojeva B i D najveći, a drugi najmanji. Slično prvom slučaju znamo da je A veći od B, pa je B očito najmanji u trojki. Iz toga slijedi da

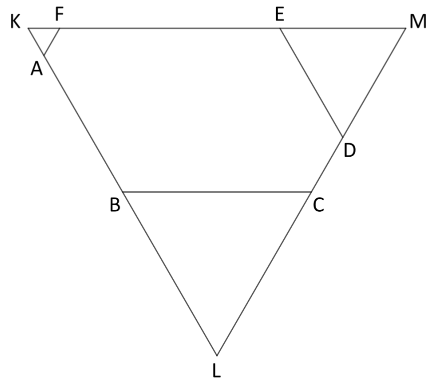
je C za 7 manji od B i da je D za 18 veći od B. To znači da je razlika između C i D $(B+18)-(B-7)=25$. To je drugo rješenje.
Konačno, vidimo da nepoznata razlika može biti samo 3 ili 25. U kontekstu početnog problema to znači da nepoznati napon može biti samo $3\,\mathrm{V}$ ili $25\,\mathrm{V}$. Zbroj mogućih nepoznatih napona je $3\,\mathrm{V}+25\,\mathrm{V}=28\,\mathrm{V}$.

Zadatak 39 ... Heksafleksatastično

U gradu postoji igralište. Ima oblik konveksnog šesterokuta, čiji su svi unutarnji kutovi 120°. Duljine stranica igrališta su $10\,\mathrm{m}$, $12\,\mathrm{m}$, $4\,\mathrm{m}$, $8\,\mathrm{m}$, $14\,\mathrm{m}$, $2\,\mathrm{m}$. Poznato je da se površina ovog igrališta može napisati kao $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Odredite koliko je a.

Rezultat: 91

Rješenje: Prije nego što počnemo, pogledajmo površinu jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine x. Pomoću Pitagorinog poučka lako je izračunati da je visina ovog trokuta $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Dakle, površina jednakostraničnog trokuta je $\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Sada se vratimo na izvorni problem. Označimo vrhove šesterokuta A, B, C, D, E, F, tako da je $AB=10\,\mathrm{m}$, $BC=12\,\mathrm{m}$, $CD=4\,\mathrm{m}$, $DE=8\,\mathrm{m}$, $EF=14\,\mathrm{m}$, $FA=2\,\mathrm{m}$. Produljimo pravce AB, CD i EF kako bismo dobili trokut KLM kao na slici:



Kako su unutarnji kutovi šesterokuta $ABCDEF$ 120°, dobivamo da su trokuti KAF, LBC i MDE jednakostranični. To odmah daje da je trokut KLM jednakostraničan s duljinom stranice $24\,\mathrm{m}$.
Površina šesterokuta $ABCDEF$ dana je kao razlika površine jednakostraničnog trokuta KLM i zbroja površina jednakostraničnih trokuta KAB, LBC i MDE. Dakle, površina šesterokuta $ABCDEF$ je:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right)=(12^2-1^2-6^2-4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2=91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

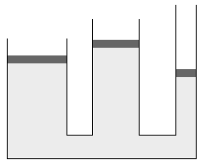
To znači da je $a=91$.

Zadatak 40 ... Pokusni kunić

Maja kod kuće ima hidraulički pogon s 3 klipa kao na slici. Zna da je površina prvog klipa jednaka zbroju površina preostala dva klipa. Maja također ima kunića s kojim će napraviti sljedeće pokuse:

Kad kunića stavi na prvi klip, klip se pomakne prema dolje za $15\,\mathrm{mm}$.
Kada ga stavi na drugi klip, on se pomakne prema dolje za $30\,\mathrm{mm}$.

Koliko se milimetara prema dolje pomakne treći klip kad Maja na njega položi svog kunića?



Rezultat: 75

Rješenje: Neka P_1 označava površinu prvog klipa, P_2 površinu drugog klipa, a P_3 površinu trećeg klipa. Prema uvjetima zadatka, $P_1 = P_2 + P_3$.
Nadalje, neka je m masa kunića i $\Delta h_1 = 15\,\text{mm}$ visina za koju se prvi klip pomakne prema dolje kad Maja na njega položi kunića. Istovremeno, drugi se klip pomakne prema gore za Δh_2, a treći za Δh_3. Nakon stavljanja kunića na prvi klip, događaju se dvije stvari. Najprije, dio vode ispod prvog klipa mora se podijeliti između drugog i trećeg klipa. To nam daje jednadžbu $P_1\Delta h_1 = P_2\Delta h_2 + P_3\Delta h_3$. S druge strane, tlak sva tri klipa mora biti jednak. Ako s p označimo početni tlak sustava, a s ρ gustoću vode, dobivamo $p+\frac{mg}{P_1} - \Delta h_1\rho g = p+\Delta h_2\rho g = p+\Delta h_3\rho g$. Oduzimanjem p i dijeljenjem s g slijedi $\frac{m}{P_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$. Druga jednakost daje nam $\Delta h_2 = \Delta h_3$. Uvrstimo li to u prethodne jednadžbe, dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} P_1\Delta h_1 &= (P_2+P_3)\Delta h_2 \\ \frac{m}{P_1} - \Delta h_1\rho &= \Delta h_2\rho \end{aligned}$$

Drugim riječima,

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2+P_3}\Delta h_1 &= \Delta h_2 \\ \frac{m}{P_1\rho} - \Delta h_1 &= \Delta h_2 \end{aligned}$$

Usporedimo li te dvije jednadžbe, slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{m}{P_1\rho} - \Delta h_1 &= \frac{P_1}{P_2+P_3}\Delta h_1 \\ \frac{m}{P_1\rho} &= \frac{P_1+P_2+P_3}{P_2+P_3}\Delta h_1 \end{aligned}$$

Neka sada Δh_2 i Δh_3 označavaju, redom, visine za koje se drugi i treći klip pomaknu prema dolje kad Maja na njih stavi kunića. Kao i prije, dolazimo do jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{m}{P_1\rho} &= \frac{P_1+P_2+P_3}{P_2+P_3}\Delta h_1 \\ \frac{m}{P_2\rho} &= \frac{P_1+P_2+P_3}{P_1+P_3}\Delta h_2 \\ \frac{m}{P_3\rho} &= \frac{P_1+P_2+P_3}{P_1+P_2}\Delta h_3 \end{aligned}$$

Podijelimo li prve dvije jednakosti i iskoristimo da je $P_1 = P_2 + P_3$, dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \frac{2P_1 - P_2}{P_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} \\ P_2 &= (2P_1 - P_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2P_1 - P_2)\frac{15\,\text{mm}}{30\,\text{mm}} = \frac{2P_1 - P_2}{2} \\ 3P_2 &= 2P_1 \\ P_2 &= \frac{2}{3}P_1 \end{aligned}$$

Iz $P_1 = P_2 + P_3$ slijedi da je $P_3 = P_1 - P_2 = P_1 - \frac{2}{3}P_1 = \frac{1}{3}P_1$. Dijeljenjem prve i treće jednakosti iz prethodnog skupa dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{P_3}{P_1} &= \frac{P_1+P_2}{P_2+P_3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \frac{\frac{1}{3}P_1}{P_1} &= \frac{P_1+\frac{2}{3}P_1}{\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_1}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \frac{1}{3} &= \frac{5}{3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \Delta h_3 &= 5\Delta h_1 = 5\cdot 15\,\mathrm{mm} = 75\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

Dakle, stavi li Maja kunića na treći klip, on se pomakne prema dolje 75 mm.

Zadatak 41 ... Umnožen broj

Matija ima omiljeni broj. To je njegov omiljeni broj jer je najmanji cijeli broj veći od 1 sa sljedećim svojstvom: ako Matija pomnoži zbroj znamenki tog broja tim brojem, dobije umnožak znamenki tog broja. Koja je vrijednost ovog broja?

Rezultat: 999

Rješenje: Matijin omiljeni broj ne može biti jednoznamenkast. Ako bi bio jednak znamenki a, uvjet nam daje $a^2 = a$ što je istina samo za $a = 0$ ili $a = 1$, ali broj mora biti veći od 1.
Matijin omiljeni broj ne može biti niti dvoznamenkast. Zaista, ako je broj $10a + b$ imali bismo $(a + b)^2 = ab$ ili $a^2 + ab + b^2 = 0$. Međutim, budući da su a i b nenegativni i a je pozitivan, uvijek imamo $a^2 + ab + b^2 > 0$, pa nikad ne može vrijediti $a^2 + ab + b^2 = 0$.
Sada ćemo pokazati da je 999 jedini troznamenkasti broj sa zadanim svojstvima. Lako se provjeri da 999 zadovoljava zadana svojstva ($(9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$).
Neka je $100a + 10b + c$ broj sa zadanim svojstvima, znači da vrijedi $(a + b + c)^2 = abc$. Brojevi a, b i c su znamenke, pa mora biti $0 \le a, b, c \le 9$. Jasno, ako je neka od znamenki jednaka 0, zbog relacije $(a + b + c)^2 = abc$ moraju i sve preostale znamenke biti 0, stoga možemo pretpostaviti $1 \le a, b, c$. Nadalje, relacija $(a + b + c)^2 = abc$ je simetrična u odnosu na vrijednosti a, b, c, pa možemo pretpostaviti $a \le b \le c$ (zbog ovog uvjeta ćemo dobiti najmanji troznamenkasti broj od bilo koje trojke koja zadovoljava uvjete). Dakle, pretpostavljamo

$$1 \le a \le b \le c \le 9.$$

Promotrimo izraz $(a+b+c)^2 = abc$. To se može zapisati kao $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc$. Iskoristimo li $c \le 9$, dobivamo $abc \le 9ab$. S druge strane, koristeći $a \le b \le c$ imamo:

$$\begin{aligned}c^2 &\ge ab\\ ac &\ge ab\\ bc &\ge ab\end{aligned}$$

Također, $(a - b)^2 \ge 0$ pa je $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Kombinirajući ove nejednakosti dobivamo:

$$9ab \le a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc \le 9ab$$

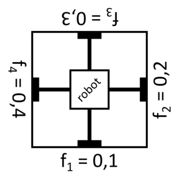
Budući da su lijeva i desna strana ove nejednakosti jednake, moramo imati jednakosti u svim nejednakostima.

- U nejednakosti $abc \le 9ab$ vrijedi jednakost ako i samo ako je $c = 9$.
- U nejednakosti $ac \ge ab$ vrijedi jednakost ako i samo ako je $b = c$.
- U nejednakosti $bc \ge ab$ vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = c$.

Spajajući ova tri zapažanja dobivamo da je jedini mogući slučaj $a = b = c = 9$. Kako smo već provjerili, to je zaista i rješenje. Dakle, broj 999 je jedini troznamenkasti broj koji zadovoljava zadana svojstva. To je najmanji cijeli broj veći od 1 sa traženim svojstvom, što znači da je 999 Matijin omiljeni broj.

Zadatak 42 ... Stabilni robot uzvraća udarac

Znanstvenici žele istražiti drugu duboku rupu koju su iskopali, a čiji je presjek kvadrat. Ponovno su u rupu postavili malog robota mase 15 kg. Da bi se stabilizirao, robot opet rukama gura sve strane rupe, svakom rukom silom F, no ovaj su put znanstvenici otkrili da su koeficijenti trenja između ruka robota i svake od strana redom 0,1, 0,2, 0,3 i 0,4. Napravili su skicu robota, gledano odozgo, kao na slici. Kojom minimalnom silom F, u njutnima, robot mora gurati ovaj put kako bi ostao stabilan?



Rezultat: 250

Rješenje: Radimo slično kao u zadatku 25., samo što ovaj put moramo i razmisliti što različiti koeficijenti trenja rade. Usredotočimo se samo na smjer u kojem su koeficijenti trenja $f_1 = 0{,}1$ i $f_3 = 0{,}3$. Znamo da u formuli $F_f = fF$ ova sila predstavlja maksimalnu silu trenja, tj. $F_f \leq fF$. Na ovaj način dobivamo dvije sile trenja $F_{f_1} \leq f_1 F$ i $F_{f_3} \leq f_3 F$. Kad bi ove dvije sile bile različite, uzrokovale bi moment sile (oko osi koja prolazi kroz druge dvije robotove ruke) na robotu. Mora, dakle, vrijediti $F_{f_1} = F_{f_3}$. Kombiniranjem dvije nejednakosti uz $f_1 \leq f_3$, dobivamo $F_{f_1} = F_{f_3} = f_1 F$. Slično za $f_2 = 0{,}2$ i $f_4 = 0{,}4$ imamo $F_{f_2} = F_{f_4} = f_2 F$. Kako bismo kompenzirali gravitacijsku silu $F_g = mg$ treba nam:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} + F_{f_4} \\ mg &= f_1 F + f_2 F + f_1 F + f_2 F \\ mg &= 2(f_1 + f_2)F \\ F &= \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} \end{aligned}$$

To znači da robot mora gurati silom:

$$F = \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}$$

Zahvale

Predsjednik povjerenstva za izbor zadataka

Marián Poturnay

Prijedlozi zadataka

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Tekstovi i rješenja zadataka

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Recenzenti

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Prevoditelji

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Koordinatori

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Lokacije natjecanja:

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť