Oplossingen

11e Naboj Junior

24 november 2023

Hallo,

u heeft op dit moment het boekje met de opgaven en oplossingen van Náboj Junior 2023 in uw handen. Náboj Junior is een internationale wiskunde- en natuurkundewedstrijd die voornamelijk ontworpen is voor teams van 4 leerlingen uit klas 2 en 3. De wedstrijd duurt 120 minuten, en in die tijd proberen de teams zoveel mogelijk opgaven op te lossen. De vragen streven ernaar niet alleen kennis van wiskunde en natuurkunde te toetsen, maar ook het vermogen om problemen innovatief en vindingrijk te benaderen.

De 11e editie van Náboj Junior vond plaats op 24 november 2023. Dit jaar deden er 41 teams mee in Nederland. Náboj Junior vond plaats in 54 steden in Slowakije, Tsjechië en Polen. Tegelijkertijd werd de wedstrijd in een online vorm gehouden in België, Spanje en Kroatië.

De wedstrijd in Nederland wordt georganiseerd door een team van vrijwilligers die hun tijd en energie besteden om de deelnemers te laten concurreren en hun kennis te laten testen. Het doel van Náboj Junior is om de vaardigheden van leerlingen op het gebied van wiskunde en natuurkunde te ontwikkelen en te laten zien dat de natuurwetenschappen veel interessante uitdagingen en mogelijkheden bieden voor een breed scala aan leerlingen.

De Náboj Junior wedstrijd is ontstaan als een gezamenlijk project van de Trojsten Association (Slowakije) en de MFF UK Výfuk wedstrijd (Tsjechië). De leden van de organisaties zijn universiteitsstudenten van de faculteit Wiskunde, Natuurkunde en Informatica van de Comeniusuniversiteit in Bratislava en de faculteit Wiskunde en Natuurkunde van de Karelsuniversiteit in Praag, die ernaar streven de talenten van studenten te ontwikkelen en de belangstelling voor natuurwetenschappen te vergroten.

We kijken ernaar uit om je volgend jaar weer te zien,

Tomas Miskov, Hoofdorganisator voor Nederland

Opgave 1 ... Kiezelsteentjes verzamelen

Allie en Bas zijn kiezelsteentjes aan het verzamelen op het strand. Aangezien Allie al 49 kiezelsteentjes meer dan Bas heeft, besluit ze om vanuit haar eigen collectie 11 kiezelsteentjes aan Bas te geven. Hoeveel kiezelsteentjes meer heeft Allie nu vergeleken met Bas?

Antwoord: 27

Oplossing: Het geven van 11 kiezelsteentjes aan Bas door Allie komt erop neer dat Allie 11 kiezelsteentjes verliest en Bob er 11 krijgt. Het verschil in kiezelsteentjes wordt dus met $11 + 11 = 22$ kleiner. Het verschil is nu dus $49 - 22 = 27$.

Opgave 2 ... Taxichauffeur

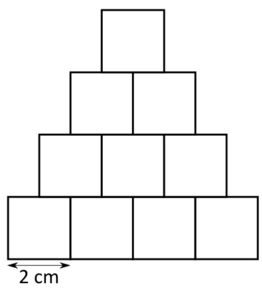
Rikkie is taxichauffeur. Hij is erachter gekomen dat hij 10 800 kilometer heeft afgelegd gedurende de eerste drie maanden van 2023, en daarbij heeft hij ook nooit zijn taxi verlaten. Wat was Rikkies gemiddelde snelheid in km/h gedurende deze periode?

Antwoord: 5

Oplossing: Merk op dat de eerste drie maanden van 2023 respectievelijk 31, 28 en 31 dagen hebben. Als we dit samen nemen, krijgen we dus $31 + 28 + 31 = 90$ dagen, ofwel $90 \cdot 24 = 2160$ uur. Rikkie heeft dus 10800 kilometer in 2160 afgelegd. Zijn gemiddelde snelheid is dus $\frac{10\,800\,\mathrm{km}}{2160\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km/h}$ geweest.

Opgave 3 ... Dozen

Een van Sylvies favoriete bezigheden is om vol bewondering naar haar dozen in haar kamer te kijken, en ze heeft er dan ook een tekening van gemaakt. Zie de figuur voor haar tekening. Elk vierkant in haar tekening heeft zijdelengtes van 2 cm. Wat is de totale lengte van alle lijnstukken in Sylvies tekening?



Antwoord: 56

Oplossing: Om de onderste 4 vierkantjes te tekenen heeft Sylvie 13 lijnstukken nodig. Om vervolgens de 3 vierkantjes erboven te tekenen heeft Sylvie 7 extra lijnstukken nodig. En voor de 2 vierkantjes daar weer boven heeft ze er weer 5 nodig. En voor het laatste vierkantje tot slot nog 3. In totaal heeft ze dus $13+7+5+3 = 28$ lijnstukken van elk 2 cm getekend. In totaal is dat dus $28 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 56\,\mathrm{cm}$.

Opgave 4 ... Amerikaanse opgave

Michele is op vakantie naar de VS. Bij het kopen van een blikje cola heeft hij in levenden lijve ondervonden dat men daar verschillende eenheden gebruikt: het blikje cola bevat namelijk 12 oz cola. Op het etiket staat verder dat één blikje cola 150 kilocalorie bevat. Hoeveel kilocalorie zou Michele binnenkrijgen als hij 100 ml aan cola opdrinkt?

Opmerking: Je kunt omzettingen in de lijst van handige formules opzoeken.

Antwoord: 45

Oplossing: In de lijst van handige formules vinden we dat 36 oz gelijk is aan 1 l. De volume van het blikje cola is dus $\frac{12\,\text{oz}}{36\,\text{oz/l}} = \frac{1}{3}$ l. Er zit dus $3 \cdot 150 = 450$ kilocalorie in één liter cola, en dus $450/10 = 45$ kilocalorie in 100 ml.

Opgave 5 . . . Schatkist

Hans en zijn piratenvrienden hebben een schatkist vol gouden munten gevonden. Ze verdelen de buit gelijkmatig onder elkaar. Als er 48 minder munten in de schatkist waren geweest, zou iedereen met 6 munten minder terug de boot in zijn gegaan. Hoeveel piratenvrienden heeft Hans (waarbij Hans zelf niet meetelt)?

Antwoord: 7

Oplossing: Als de schatkist 48 minder munten zou hebben gehad, zou iedereen 6 munten minder krijgen. Er zijn dus $48/6 = 8$ piraten. Omdat er werd gevraagd naar het aantal piratenvrienden van Hans, is het antwoord nu $8 - 1 = 7$.

Opgave 6 . . . Rondjes rennen

Nils en Ward gaan elke ochtend 18 minuten lang een paar rondjes rennen als hun dagelijkse workout. Nils rent daarbij steeds rondjes op een cirkelvormig pad met een straal van 70 meter, en Ward op een cirkelvormig pad met een straal van 35 meter. Het kost Nils 3 minuten en Ward 2 minuten om een rondje te lopen over hun eigen pad. Bij elke stap die ze nemen, leggen ze 100 centimeter af. Hoeveel stappen zullen ze in totaal hebben genomen na hun workout? Rond je antwoord af op het dichtstbijzijnde tienvoud.

Opmerking: Het volstaat voor deze opgave om $\pi = \frac{22}{7}$ *te nemen.*

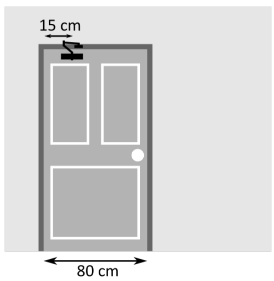
Antwoord: 4620

Oplossing: In 18 minuten rent Nils $18/3 = 6$ rondjes. Elk rondje is daarbij $2\pi \cdot 70\,\text{m} = 140\pi\,\text{m}$ lang. In totaal legt hij dus $6 \cdot 140\pi\,\text{m} = 840\pi\,\text{m}$ af, en een gelijk aantal stappen.
We beredeneren vergelijkbaar voor Ward: hij legt $18/2 = 9$ rondjes met elk een lengte van $2\pi \cdot 35\,\text{m} = 70\pi\,\text{m}$. In totaal legt hij dus $9 \cdot 70\pi\,\text{m} = 630\pi\,\text{m}$ af, en een gelijk aantal stappen.
In totaal hebben Nils en Ward dus $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ stappen gemaakt. Met de afschatting dat $\pi = \frac{22}{7}$ zijn dat dus $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ stappen.

Opmerking: Ook de nauwkeurigere afschatting $\pi = 3{,}14$ *zou ons een antwoord gegeven hebben van* 4615,8*, wat afgerond op tientallen op hetzelfde eindantwoord neer zou zijn gekomen.*

Opgave 7 . . . Deursluiter

André bekijkt een deursluiter, die als de deur open is, hem automatisch weer probeert te sluiten. Andrés deur heeft een breedte van 80 cm. De deursluiter bevindt zich 15 cm van de scharnieren, en oefent een kracht van 48 N uit op de deur. Hoeveel kracht is er minstens nodig om de deur te openen, in Newton?



Antwoord: 9

Oplossing: Om de deur met de minst benodigde druk te openen, willen we dat de hefboom precies in evenwicht is. De koppel M van de deursluiter is gelijk aan de kracht maal de afstand van de scharnieren, ofwel $M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. Met dezelfde formule, toegepast op het uiteinde van de deur voor zoveel mogelijk koppel met dus een afstand van $a = 80\,\mathrm{cm}$, krijgen we dat

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}.$$

Opgave 8 . . . De aarde omwikkelen

Eva heeft een zeer lang touw gekocht waarmee ze de aarde om de evenaar kan omwikkelen. Adam besluit echter om een nog langer touw te kopen waarmee hij de aarde om de evenaar kan omwikkelen op een hoogte van 1 m van de grond. Hoeveel meter langer moet het touw van Adam zijn dan het touw van Eva? Rond je antwoord af op 2 decimalen.

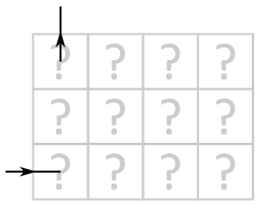
Opmerking: Neem aan dat de aarde een perfecte bol is.

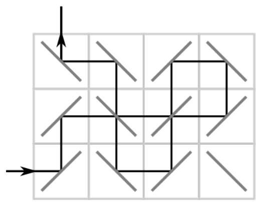
Antwoord: 6,28

Oplossing: Aangenomen dat de aarde een perfecte bol is, omgeeft een touw gewikkeld om de evenaar een perfecte cirkel. Als we de straal van deze cirkel r noemen, moet de lengte van Eva's touw $2\pi r$ zijn. Adam is daarentegen van plan een cirkel met als straal $r + 1\,\mathrm{m}$ te omgeven. Nu moet de lengte van Adams touw $2\pi(r+1\,\mathrm{m})$ zijn. Het verschil in lengte van Adams touw en Eva's touw is dan $2\pi(r+1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Opgave 9 . . . Spiegeldoolhof

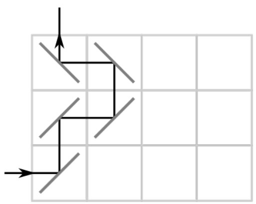
Marcel speelt een spelletje met spiegels. Het bestaat uit een 3×4-tabel zoals in de linkerfiguur. Marcel moet een (tweezijdige) spiegel diagonaal in elk van de vakjes neerzetten. Marcel schiet vervolgens met een laser een lichtstraal af, die uiteindelijk het spiegeldoolhof weer verlaat. In de rechterfiguur staat zo'n mogelijke situatie. Wat is het kleinst mogelijke aantal keren dat de lichtstraal in een spiegel gereflecteerd wordt, om vanuit hetzelfde beginpunt hetzelfde eindpunt te bereiken?





Antwoord: 5

Oplossing: Het is makkelijk om de volgende configuratie met 5 reflecties te vinden:



Maar merk nu ook op dat bij elke reflectie de richting van de lichtstraal van verticaal naar horizontaal, of andersom gaat. Bij elke oneven reflectie is de richting dus verticaal, terwijl die bij elke even reflectie horizontaal is. Het aantal reflecties moet daarom oneven zijn.

We ondervinden daarnaast ook dat (1 en) 3 reflecties onmogelijk zijn: anders zou de lichtstraal enkel door de 3 meest linkervakjes zijn geweest, wat wegens het steeds veranderen van richting onmogelijk is.

Het aantal reflecties is dus een oneven getal dat groter is dan 3, en dus vinden we dat het kleinst mogelijke aantal inderdaad 5 is.

Opgave 10 ... Een eentonige opgave

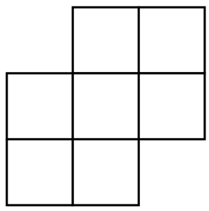
Thomas heeft zijn eigen soorten getallen bedacht, die hij *eentonig* noemt. Een (strikt) positief geheel getal noemt hij eentonig, als al zijn cijfers gelijk aan elkaar zijn. Hoeveel eentonige getallen groter dan tien en kleiner dan een miljoen zijn er?

Antwoord: 45

Oplossing: Als we enkel het cijfer 1 zouden gebruiken, dan krijgen we 11, 111, 1111, 11111 en 111111 als onze 5 mogelijkheden. Voor alle andere mogelijke cijfers, in totaal dus 9 omdat 0 niet mee kan doen, redeneren we net zo. In totaal zijn er dus $9 \cdot 5 = 45$ eentonige getallen die groter zijn dan tien en kleiner dan een miljoen.

Opgave 11 ... Oud bord

Wouter heeft een oud bord op zolder gevonden: zie figuur. Hij wil de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6 op het bord plaatsen, zodanig dat elk vakje precies één cijfer bevat en elk cijfer ook precies één keer is gebruikt. Dit moet gedaan worden op zo'n manier, dat de som van de getallen in elk van de kolommen allemaal gelijk aan elkaar zijn. Wouter is elke mogelijke configuratie nagegaan en heeft ook steeds het product van de getallen in de middelste kolom opgeschreven. Hoeveel verschillende getallen heeft Wouter opgeschreven?



Antwoord: 1

Oplossing: Omdat de som van alle getallen gelijk is aan $0+1+2+3+4+5+6 = 21$, is de som van de getallen in elk van de kolommen gelijk aan $21/3 = 7$. Dit betekent dat het getal 0 zich niet in een van de buitenste kolommen kan bevinden, omdat we anders voor het andere vakje binnen dezelfde kolom dan een 7 zouden moeten gebruiken die we niet tot onze beschikking hebben. De 0 moet dus altijd wel in de middelste kolom voorkomen, waardoor Wouters product altijd een 0 is. Wouter kan dus maar hoogstens 1 getal opgeschreven, namelijk 0. Het is verder ook niet moeilijk om überhaupt een oplossing te vinden, waardoor Wouter ook echt die ene 0 opschrijft en het aantal opgeschreven getallen dus 1 is.

Opgave 12 ... Badtijd

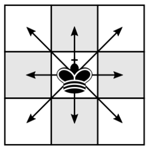
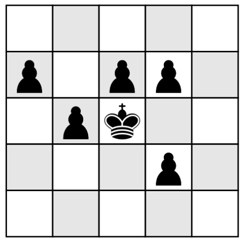
Tycho heeft een bad met een volume van $150\,\mathrm{l}$. De kraan vult het bad met een debiet van $0{,}2\,\mathrm{l/s}$, en het afvoerputje leegt het bad met een debiet van $0{,}05\,\mathrm{l/s}$. Tycho vult het bad met de kraan, maar vergeet daarbij de stop op het afvoerputje te doen. Hoeveel seconden langer moet hij nu wachten totdat het bad volledig gevuld is dan wanneer hij niet vergeten was om het afvoerputje af te dichten met de stop?

Antwoord: 250

Oplossing: Als Tycho de stop op het afvoerputje had gedaan, dan zou het bad in $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$ gevuld zijn geweest. Maar omdat Tycho dat juist vergeten was, is het debiet nu nog maar $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. Dus nu kost het $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$ om het bad te vullen, wat dus $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ langer wachten betekent.

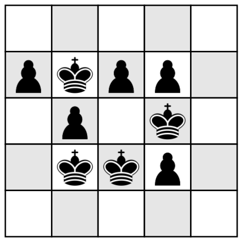
Opgave 13 ... Schaken

Jonas is aan het spelen met wat schaakstukken, nu met de koning. De koning kan naar elk van de 8 aangrenzende vakjes bewegen die een zijde of hoekpunt met zijn eigen vakje gemeen hebben, maar dat vakje moet dan wel nog niet door een ander stuk bezet zijn: zie de linkerfiguur. Jonas heeft de schaakstukken opgezet zoals in de rechterfiguur. Hoeveel vakjes kan de koning bereiken na precies 2 zetten?

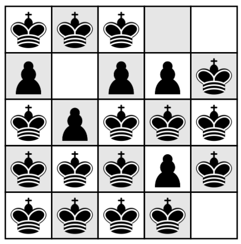



Antwoord: 16

Oplossing: Na de eerste zet kan de koning elk van de volgende vakjes bereiken:



En na de tweede zet kan de koning elk van de vakjes bereiken die weer grenzen aan die vakjes, en dat zijn er nu 16:



Opgave 14 ... Uitgeknipte vierhoek

Anastasia begon zich te vervelen tijdens de wiskundeles, en besloot daarom maar een vierhoek met een omtrek van 49 cm te tekenen. Toen heeft ze de vierhoek langs de diagonaal geknipt, zodat er er nu nog 2 driehoeken overblijven. De som van de omtrekken van deze 2 uitgeknipte driehoeken blijkt nu 77 cm te zijn. Wat is de lengte van de diagonaal waar Anastasia langs geknipt heeft, in centimeter?

Antwoord: 14

Oplossing: De omtrek van de twee nieuwe driehoeken samen bevat uit de zijden van de originele vierhoek, en de diagonaal twee keer (namelijk één keer voor elke driehoek). De som van de omtrekken van de twee driehoeken (77 cm) is dus gelijk aan de omtrek van de vierhoek (49 cm), plus tweemaal de lengte van de diagonaal. Tweemaal de lengte van de diagonaal is dus $77\,\text{cm} - 49\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$, en de lengte van de diagonaal zelf dus $28\,\text{cm} : 2 = 14\,\text{cm}$.

Opgave 15 ... (Laten) vallen en oprapen

Camellia is op zijn skateboard aan het rijden met een snelheid van 9 km/h. Hij gooit een bal op, zodat die precies 4 seconden later de grond gaat raken. Precies zodra hij de bal opgegooid heeft, versnelt Camellia naar een snelheid van 18 km/h. Hoeveel meter is Camellia verwijderd van de bal wanneer de bal de grond raakt?

Opmerking: Neem aan dat de luchtweerstand verwaarloosbaar is.

Antwoord: 10

Oplossing: Precies nadat Camellia de bal opgegooid heeft, is de horizontale snelheid van de bal gelijk aan $9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$, terwijl Camellia's horizontale snelheid $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$ is. De relatieve snelheid waarmee Camellia op de bal uiteindelijk voorloopt is dus $5\,\mathrm{m/s} - 2{,}5\,\mathrm{m/s} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Zodra de bal de grond geraakt heeft, na 4 seconden dus, is de afstand tussen Camellia en de bal dus $2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$.

Opgave 16 . . . Feestje

Anjet, Blåhaj, Casper en Damaris hielden samen een feestje. Ze kwamen allemaal op verschillende tijdstippen aan. Op het feestje deden ze allemaal de volgende onware uitspraken:

Anjet: "Ik was er als tweede."
Blåhaj: "Ik was er voordat Anjet er was."
Casper: "Ik was er nadat Anjet er was."
Damaris: "Ik was er als eerste."

In welke volgorde kwamen ze aan?

Geef je antwoord door steeds de eerste letter te nemen van de namen van de feestgangers. Als bijvoorbeeld Anjet er als eerste was, vervolgens Blåhaj, dan Casper en tot slot Damaris, dan is het antwoord ABCD.

Antwoord: CDAB

Oplossing: Laten we eerst kijken naar wanneer Anjet binnenkwam. Omdat diens eigen bewering niet waar is, is die niet als tweede aangekomen. Maar er geldt ook dat Blåhaj en Casper respectievelijk na en voor Anjet binnenkwamen, dus Anjet kan niet als eerste of laatste binnen zijn gekomen. Anjet moet dus wel de derde zijn geweest.
Omdat Blåhaj nu na Anjet kwam, is de enige mogelijkheid dat zij als vierde kwam.
Omdat Damaris vanwege diens eigen onware uitspraak niet als eerste kwam, en de derde en vierde plek al bezet zijn, moet die wel als tweede.
Uiteindelijk moet Casper dus ook wel als eerste geweest zijn, en is de uiteindelijke volgorde dus CDAB geweest.

Opgave 17 . . . Oneerlijke buslijnen

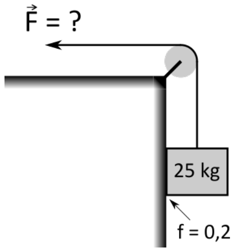
Johan moest een keer buslijn 397 nemen van Nieuw-Vennep naar Amsterdam. Hij merkte daarbij op dat hij steeds om de 2 minuten een bus in de tegenovergestelde richting tegenkwam (dus van Amsterdam naar Nieuw-Vennep, met dezelfde constante snelheid en over dezelfde wegen). Dat vond hij oneerlijk, omdat bij zijn dagelijkse buslijn 300 van Arnhem naar Nijmegen slechts om de 6 minuten een bus vanaf zijn bushalte vertrekt. Hoeveel meer bussen per uur vertrekken er vanaf hun vertrekhalte bij buslijn 397, dan bij buslijn 300? (Let op: het antwoord is in bussen per uur, en dus geen verhouding tussen het aantal bussen per uur tussen de twee buslijnen.)

Antwoord: 5

Oplossing: Als Johan in de bus van buslijn 397 de tegemoetkomende bussen bekijkt, is de relatieve snelheid dat een bus naar hem toekomt nu gelijk aan twee bussensnelheden. De constante afstand tussen twee bussen die na elkaar vertrekken vanaf de bushalte wordt dus twee keer zo snel afgelegd dan wanneer we een vast punt op de rijbaan bekijken, en dus ziet Johan in feite twee keer zo snel een bus tegemoetkomen dan hoe snel ze vanaf het busstation daadwerkelijk vertrekken. Bij buslijn 397 vertrekt er dus om de $2 \cdot 2 = 4$ minuten een bus, wat per uur dus $60/4 = 15$ bussen zijn. Bij buslijn 300 is dit juist $60/6 = 10$ bussen per uur. Bij buslijn 397 vertrekken er dus $15 - 10 = 5$ meer bussen per uur dan bij buslijn 300.

Opgave 18 . . . Kunnen wij het maken!?

Bob de Bouwer wil een doos naar een hogere verdieping van een gebouw krijgen. Hij heeft al een katrol gebruikt om het mechanisme in de figuur te bouwen. Nu is voor Bob nadenken geblazen: de doos weegt 25 kg en de wrijvingscoëfficiënt tussen de doos en de muur is 0,2. Wat is de kleinste benodigde kracht waarmee Bob aan het touw kan trekken om de doos naar boven te kunnen krijgen, in Newton?



Antwoord: 250

Oplossing: We merken op dat de wrijvingskracht enkel invloed op de doos heeft als die (horizontale) druk zou zetten op de muur: maar dat doet de doos helemaal niet. De enige tegenwerkende kracht op de doos is dus de zwaartekracht $F_g = mg$, met $m = 25\,\mathrm{kg}$ de massa van de doos. Bob moet dus trekken met op zijn minst een kracht van $F_g = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Opgave 19 ... Bessenjam

George gaat een proeverij van zijn authentieke jams houden. Hij heeft een voorraad van 10 potten aardbeienjam, 15 potten bosbessenjam, 7 potten cranberryjam, 15 potten druivenjam en 9 potten moerbeienjam. In eerste instantie wil George minstens 1 pot van elke smaak meenemen. Maar hij weet ook dat, in ieder geval bij zijn vrienden, de aardbeienjam en bosbessenjam erg gewild zijn. Hij wil dus ook minstens 2 potten aardbeienjam en minstens 5 potten bosbessenjam meenemen. Het is echter donker in George' voorraadkamer, dus hij kan niet de potten van elkaar onderscheiden. Wat is het kleinst aantal potten dat George van de voorraadkamer kan potten om er zeker van te zijn dat hij genoeg potten jam uit het donker heeft meegenomen om aan zijn wensen te voldoen?

Antwoord: 50

Oplossing: Het idee is dat we gaan kijken naar de slechtst mogelijke scenario's: George heeft van bijna alle potten jams alles meegenomen, maar van één smaak precies één pot te weinig. (Scenario's waarin niet aan George' eisen worden voldaan, kunnen altijd naar deze zo'n soort configuratie geoptimaliseerd worden.) In zo'n scenario hebben we dus alle $10 + 15 + 7 + 15 + 9 = 56$ potten, behalve nog dat we van één soort het aantal potten benodigd om van alles naar net 1 missend te gaan moeten aftrekken.
Dit aantal kan (voor aardbeien) $10 - 2 + 1 = 9$, of (voor bosbessen) $15 - 5 + 1 = 11$, of (voor cranberry) $7 - 1 + 1 = 7$, of (voor druiven) $15 - 1 + 1 = 15$, of (voor moerbeien) $9 - 1 + 1 = 9$ zijn. We willen het minst aftrekken, ofwel 7 potten. Het slechtst mogelijke scenario is dus met $56 - 7 = 49$ potten, dus met $49 + 1 = 50$ potten zitten we nog net veilig.

Opgave 20 ... Tour de Náboj

Bij de fietswedstrijd *Tour de Náboj* moesten de wielrenners over een weg fietsen die de hele tijd ofwel bergafwaarts, ofwel bergopwaarts was – een-derde van de race-afstand was bergopwaarts en twee-derde van de race-afstand was bergafwaarts. Na de competitie was een aantal statistici aan de slag gegaan om een paar interessante statistieken te onderzoeken met betrekking tot de winnaar. De winnaar had een gemiddelde snelheid van $24\,\mathrm{km/h}$, en heeft 3 keer zoveel tijd besteed aan de bergopwaartse delen als de bergafwaartse delen. Wat was de gemiddelde snelheid van de winnaar gedurende de bergafwaartse delen in kilometer per uur?

Antwoord: 64

Oplossing: Zij s de lengte van de hele weg van de race, zij t de tijd die de winnaar erover deed om te finishen. Omdat de gemiddelde snelheid van de winnaar nu $24\,\mathrm{km/h}$ was, geldt nu dat $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$.
Twee-derde van de race-afstand was bergafwaarts, dus de lengte van deze delen is $\frac{2}{3}s$. Verder geldt er dat de winnaar 3 keer zoveel tijd had besteed aan de bergopwaartse delen. De bestede tijd aan de bergafwaartse

delen is dus $\frac{1}{4}t$. De gemiddelde snelheid van de winnaar gedurende de bergafwaartse delen was dus

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\text{km/h} = 64\,\text{km/h}.$$

Opgave 21 . . . Magisch vierkant

Katrielle is aan het spelen met een magisch vierkant. Het doel daarbij is om de vakjes van de 3×3-tabel met getallen te vullen, zodanig dat de sommen van de drie getallen in elk van de rijen, kolommen en beide diagonalen allemaal gelijk aan elkaar zijn. Katrielle heeft al een paar getallen ingevuld zoals in de figuur. Wat is de som van de vijf getallen die nog ingevuld moeten worden om het magisch vierkant kloppend te maken?

17	16	
15		19

Antwoord: 95

Oplossing: Bekijk eerst de laatste rij en de tweede kolom. Ze moeten dezelfde som hebben, maar we weten ook dat ze een vakje gemeen hebben. De sommen van de steeds twee getallen die ze niet gemeen hebben, moeten dus ook aan elkaar gelijk zijn. Dus $15 + 19 = 34$ is gelijk aan 16 plus het getal in het middelste vakje, wat dus nu $34 - 16 = 18$ moet zijn.

17	16	
	18	
15		19

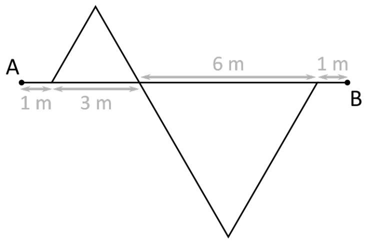
Vanwege de diagonaal vanaf linksboven weten we nu dat alle sommen gelijk moeten zijn aan $17 + 18 + 19 = 54$. We kunnen nu met gemak het hele magische vierkant invullen.

17	16	21
22	18	14
15	20	19

De som van de vijf aanvankelijk lege vakjes is dus $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

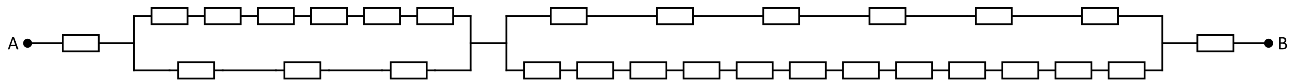
Opgave 22 . . . Laswerk

Gerard is met wat draad met een soortelijke weerstand van $0{,}1\,\Omega/\text{m}$ aan het lassen geweest om de figuur hieronder te maken. Het bestaat uit eerst een draad van 1 m, dan een gelijkzijdige driehoek met een zijdelengte van 3 m, vervolgens een gelijkzijdige driehoek met een zijdelengte van 6 m en tot slot een draad van 1 m. Bereken de weerstand van zijn laswerk tussen de punten A en B in Ohm.



Antwoord: 0,8

Oplossing: Door elke meter aan draad te vervangen door een weerstand met weerstand $R_0 = 0{,}1\,\Omega$, krijgen we het volgende diagram:



Nu kunnen we de gebruikelijke formules voor weerstanden in serie en parallel gebruiken om de weerstand tussen punten A en B te berekenen:

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega.$$

Opgave 23 ... Zwembad

Anne houdt niet van het koude water in het zwembad, dus wil ze zonnepanelen kopen. Haar zwembad heeft een volume van 150 hl en ze wil het zwembad opwarmen van 29 °C tot 33 °C in 10 uur tijd. Ook weet ze dat 1 m^2 aan zonnepanelen een vermogen heeft van 1,4 kW in dit zonlicht. Hoeveel m^2 zonnepanelen heeft Anne nodig om het water tot de gewenste temperatuur op te warmen in de gegeven tijd?

Antwoord: 5

Oplossing: Water met volume $V = 150\,\mathrm{hl}$ heeft massa $m = V\rho_{water}$. Om dit op te warmen van de temperatuur $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ tot $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$ moeten we de warmte $Q = c_{water}m(t_2 - t_1) = c_{water}V\rho_{water}(t_2 - t_1)$ hieraan toevoegen. Deze warmte moet gelijk zijn aan de arbeid verricht door de zonnepanelen. Die hebben vermogen $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$ per oppervlakte-eenheid, dus als het totale oppervlak van de zonnepanelen S is, dan hebben ze vemogen $P = P_0S$. Na tijd $t = 10\,\mathrm{h}$ zullen ze arbeid $W = Pt = P_0St$ hebben verricht. Dit is de arbeid verricht op het water, dus hebben we:

$$\begin{aligned}
W &= Q \\
P_0St &= c_{water}V\rho_{water}(t_2 - t_1) \\
S &= \frac{c_{water}V\rho_{water}(t_2 - t_1)}{P_0t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m^2}
\end{aligned}$$

Dus Anne heeft 5 m^2 zonnepanelen nodig.

Opgave 24 ... Voetbalwedstrijd

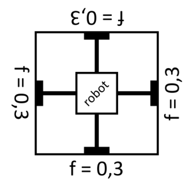
Een team van natuurkundigen heeft een voetbalwedstrijd van de Náboj Beker gespeeld tegen een team van wiskundigen. Bij de rust was de stand $3 - 2$ in het voordeel van de natuurkundigen, maar de wedstrijd eindigde met een stand $4 - 5$ in het voordeel van de wiskundigen. Op hoeveel verschillende volgorden kunnen de teams hun doelpunten hebben gescoord?

Antwoord: 40

Oplossing: We kunnen de volgorde van doelpunten aanduiden met een rij van P's en M's, waarbij P staat voor een doelpunt gescoord door de natuurkundigen en M voor een doelpunt gescoord door de wiskundigen. Met deze notatie kunnen we zien dat er 10 mogelijke volgorden zijn waarin de doelpunten in de eerste helft gescoord konden zijn: MMPPP, MPMPP, MPPMP, MPPPM, PMMPP, PMPMP, PMPPM, PPMMP, PPMPM, PPPMM. Door een soortgelijke procedure te volgen voor de overige 4 doelpunten in de tweede helft, vinden we dat er 4 mogelijke volgorden zijn: PMMM, MPMM, MMPM, MMMP. Omdat de eerste en de tweede helft onafhankelijke delen van de wedstrijd zijn, kan elke volgorde van doelpunten in de eerste helft worden gekoppeld aan elke volgorde van doelpunten in de tweede helft. Daarom is het totale aantal mogelijke manieren waarop alle doelpunten zijn gescoord $10 \cdot 4 = 40$.

Opgave 25 . . . Een stabiele robot

Wat wetenschappers doen onderzoek doen naar een diep gat, waarvan de dwarsdoorsnede vierkant is. Hiervoor hangen ze een kleine robot met een massa van 15 kg in het gat. Om de robot te stabiliseren, duwt hij met een arm tegen elke kant van het gat. Elke arm duwt met kracht F. De wrijvingscoëfficiënten tussen de armen en de kanten zijn 0,3. In de figuur staat een schets van de situatie, van bovenaf bezien. Wat is de minimale kracht F in Newton waarmee de robot moet duwen zodat hij stabiel kan blijven hangen?



Antwoord: 125

Oplossing: Als de robot met een kracht F naar alle kanten duwt, is de wrijvingskracht bij elke kant $F_w = fF$ en deze is naar boven gericht, waarbij f de wrijvingscoëfficiënt $f = 0{,}3$ is. Aan de andere kant werkt de zwaartekrachtskracht $F_z = mg$ op de robot naar beneden. Om de robot te stabiliseren, moet de zwaartekrachtskracht gelijk zijn aan de som van alle vier de wrijvingskrachten. Dus we moeten hebben:

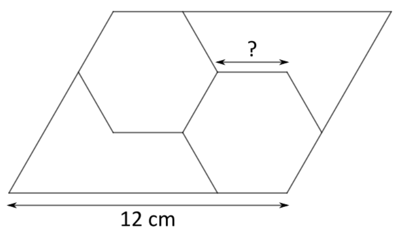
$$F_z = 4F_w$$
$$mg = 4fF$$
$$F = \frac{mg}{4f}$$

Daarom moet de kracht F zijn:

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\text{N}$$

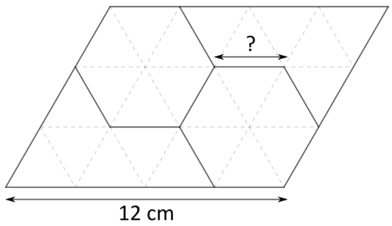
Opgave 26 . . . Nieuw logo

Paula is bezig met het maken van een logo voor haar winkel. Ze is begonnen met het tekenen van een parallellogram met één zijde van lengte 12 cm. Ze heeft ontdekt dat ze twee regelmatige zeshoeken in het parallellogram kan tekenen zoals in de figuur. Wat is de zijdelengte van die zeshoeken in centimeters?



Antwoord: 3

Oplossing: Elke zeshoek kan worden opgedeeld in 6 gelijkzijdige driehoeken. Hierdoor is het mogelijk om een driehoekig raster over de figuur te tekenen:



Hieruit kunnen we meteen zien dat de zijdelengte van de zeshoeken (die gelijk is aan de zijdelengte van de driehoeken) $12\,\text{cm} : 4 = 3\,\text{cm}$ is.

Opgave 27 ... Naar de zeebodem

Patrick de piraat is in gevecht geraakt met een andere piraat. Zijn schip werd geraakt door een kanonskogel en nu stroomt er $50\,\text{l}$ water per seconde het schip in. Patrick berekent hoeveel tijd hij nog heeft voordat het schip volledig zinkt. Hij benadert zijn schip als een holle balk met afmetingen $10\,\text{m} \times 3\,\text{m} \times 2\,\text{m}$ en met een massa van $5\,\text{t}$. Hoeveel tijd in seconden heeft Patrick nog voordat het schip volledig zinkt?

Antwoord: 1100

Oplossing: Het schip zal volledig zinken wanneer de zwaartekrachtkracht gelijk is aan de opwaartse kracht. De maximale opwaartse kracht die kan werken op het schip met volume V is $F_{opwaarts} = V\rho_{water}g$. De zwaartekrachtkracht bestaat uit twee delen: de zwaartekracht van het schip zelf en de zwaartekracht van het water dat het schip in is gestroomd. De zwaartekracht van het schip met massa m is $F_{g_1} = mg$. Het water stroomt in het schip met een debiet Q, dus na tijd t zal er het volume $V' = Qt$ water in het schip zijn. Dus, de zwaartekrachtkracht van het water zal $F_{g_2} = Qt\rho_{water}g$ zijn. De voorwaarde voor volledig zinken is $F_{opwaarts} = F_{g_1} + F_{g_2}$, waardoor we de tijd t kunnen uitdrukken:

$$V\rho_{water}g = mg + Qt\rho_{water}g$$
$$t = \frac{V\rho_{water} - m}{Q\rho_{water}}$$

Daarom zal het schip volledig zinken na:

$$t = \frac{V\rho_{water} - m}{Q\rho_{water}} = \frac{(10\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m}) \cdot 1000\,\text{kg/m}^3 - 5000\,\text{kg}}{0{,}05\,\text{m}^3\text{/s} \cdot 1000\,\text{kg/m}^3} = 1100\,\text{s}$$

Opgave 28 ... Som van jaren

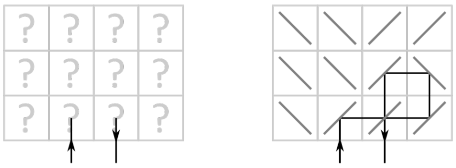
Vandaag berekenen twee vrienden, Anne en Emma, de som van alle getallen van de jaren waarin ze geleefd hebben. Het blijkt dat de het resulaat van Emma 19945 groter is dan dat van Anne. In welk jaar is Emma geboren?

Antwoord: 1990

Oplossing: Beide meisjes tellen de getallen vanaf het jaar waarin ze geboren zijn tot en met 2023 op. Emma kreeg een groter resultaat, dus Emma heeft enkele getallen opgeteld die Anne niet heeft opgeteld. Omdat elke term ongeveer 2000 is, is het aantal termen dat alleen Emma heeft opgeteld $19945 : 2000 \doteq 10$. Dit betekent dat de getallen die alleen door Emma zijn opgeteld x, $x+1$, ..., $x+9$ zijn, waar x het geboortejaar van Emma is. De som van deze getallen is $10 + 45$. Zo krijgen we de vergelijking $10x + 45 = 19945$, waaruit we kunnen concluderen dat Emma is geboren in $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

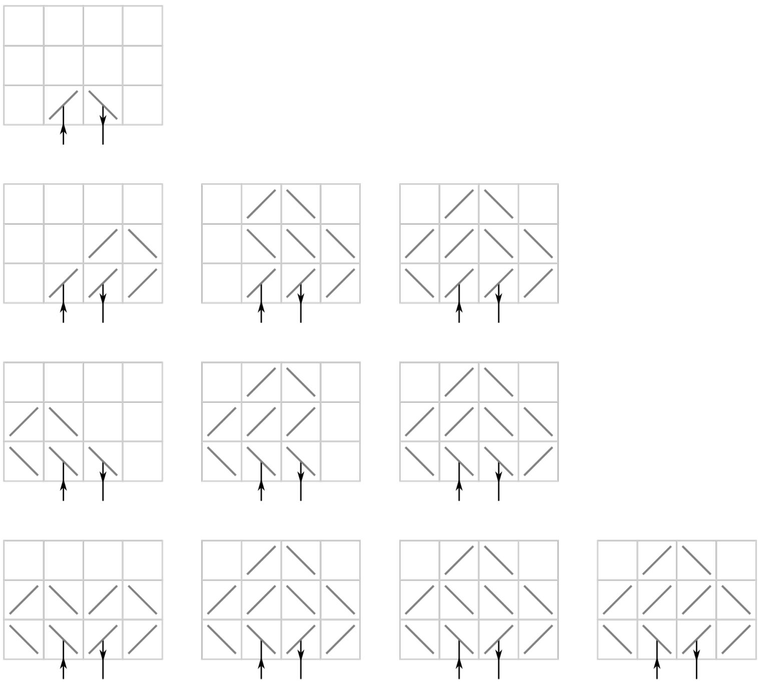
Opgave 29 ... Spiegeldoolhof is terug

Marcel speelt een spelletje met spiegels. Het bestaat uit een 3×4-tabel zoals in de linkerfiguur. Marcel moet een (tweezijdige) spiegel in elk van de vakjes neerzetten, zodanig dat de hoek die de spiegel met de zijden van de tabel steeds $45°$ is. Marcel schiet vervolgens met een laser een lichtstraal af, dat uiteindelijk het spiegeldoolholf uitkomt. Zie de rechterfiguur van zo'n mogelijke situatie. Marcel vraagt zich nu iets anders af: Hoeveel verschillende trajecten (inclusief het traject in de rechterfiguur) kan de lichtstraal hebben genomen om vanuit hetzelfde beginpunt hetzelfde eindpunt te bereiken?



Antwoord: 11

Oplossing: Probeer de mogelijkheden gebaseerd op de orientatie van de eerste en de laatste spiegel. Dan vinden we de rijen van de volgende figuur (omwille van beter inzicht tekenen we de lichtstralen en de niet gebruikte spiegels niet):



Dus we zien dat er $1 + 3 + 3 + 4 = 11$ mogelijke trajecten zijn voor de lichtstraal.

Opgave 30 ... Gelijke vierhoek

André tekent een rechthoek $ABCD$ zodat $AB : BC = 9 : 8$. Hij tekent de punten E en F respectievelijk op de segmenten BC en CD zodat $CE = BE$ en $DF = 2 \cdot FC$. Zo heeft hij een vierhoek $ABEF$ geconstrueerd. Hij vraagt zijn vriend Jakob om de omtrek van $ABEF$ te vinden in centimeters en zijn vriend Jan om de oppervlakte van $ABEF$ te vinden in vierkante centimeters. Het blijkt dat zij op dezelfde numerieke waarde uitkomen. Determineer de omtrek van de rechthoek $ABCD$ in centimeters. Geef je antwoord als een volledig vereenvoudigde breuk.

Antwoord: $\frac{68}{3}$

Oplossing: Laat de lengte van de zijden van de rechthoek $ABCD$ $AB = 9x$ en $BC = 8x$ zijn voor zekere x.

Eerst berekenen we de omtrek van vierhoek $ABEF$. De benen in de rechthoekige driehoek ECF hebben lengtes $4x$ en $3x$. Dus volgens de stelling van Pythagoras geldt $EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. Op gelijke wijze heefft de rechthoekige driehoek FDA benen van lengte $6x$ en $8x$, dus $FA = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Dus de omtrek van de vierhoek is $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Nu berekenen we de oppervlakte van de vierhoek $ABEF$. De rechthoekige driehoeken ECF en FDA hebben oppervlaktes $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ en $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. De oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is $(9x)\cdot(8x) = 72x^2$, dus de oppervlakte van vierhoek $ABEF$ is nu $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$. We weten dat de numerieke waarden van de omtrek en de oppervlakte gelijk zijn, dus:

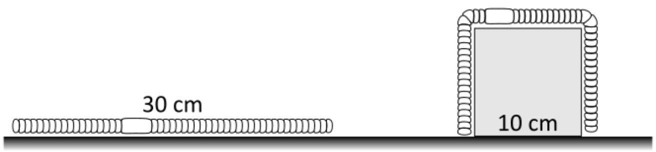
$$\frac{28x}{\text{cm}} = \frac{42x^2}{\text{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\text{cm} = \frac{2}{3}\text{cm}$$

Nu rest enkel om de omtrek van de rechthoek $ABCD$ te berekenen en dat is $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}\text{cm} = \frac{68}{3}\text{cm}$.

Opgave 31 . . . Werkende worm

Een homogene worm met massa 3 g en lengte 30 cm wil over een kubus met zijdelengte 10 cm in de tuin klimmen. De worm zal klimmen zoals in de figuur. Wat is de arbeid die de worm levert in mJ?

Opmerking: Je mag wrijving tussen de worm en de kubus negeren.



Antwoord: 2

Oplossing: De arbeid van de worm zal de maximale potentiële energie van de worm tijdens de klim zijn (aangenomen dat de potentiële energie in het begin nul is). Het is niet moeilijk om te zien dat dit maximum exact wordt bereikt op het moment dat de worm zich in de positie van de figuur bevindt (hoe meer van zijn delen hoger zijn, hoe groter de potentiële energie).
Splits de worm op in 3 delen (maak je geen zorgen, ze zullen teruggroeien) - twee verticale delen en één horizontaal deel zoals in de figuur. Allemaal hebben ze lengte 10 cm en dit is een derde van de lengte van de worm. De worm is homogeen, dus alle 3 de delen hebben massa $m_0 = 3\,\text{g} : 3 = 1\,\text{g}$. Het horizontale deel heeft het massamiddelpunt op hoogte $h_2 = 10\,\text{cm}$, dus de potentiële energie van dit deel is $E_2 = m_0 g h_2 = 0{,}001\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 0{,}1\,\text{m} = 0{,}001\,\text{J} = 1\,\text{mJ}$. De verticale delen hebben massamiddelpunten op hoogte $h_1 = h_3 = 5\,\text{cm}$, dus de potentiële energie van deze delen is $E_1 = E_3 = m_0 g h_1 = m_0 g h_3 = 0{,}001\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 0{,}05\,\text{m} = 0{,}0005\,\text{J} = 0{,}5\,\text{mJ}$.
Dus nu is de maximale potentiële energie van de worm $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\text{mJ} + 1\,\text{mJ} + 0{,}5\,\text{mJ} = 2\,\text{mJ}$ en dit is dus ook arbeid die de worm moet leveren.

Opgave 32 . . . Vergeten wachtwoord

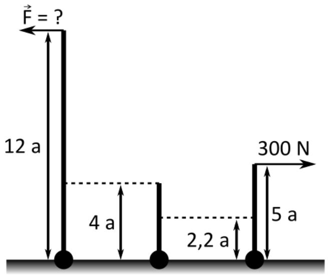
Teresa is al haar meest dierbare eigendommen verloren in een kluis die beveiligd is met een wachtwoord van 5 letters. Helaas gebruikt ze geen wachtwoordmanager en is ze het wachtwoord van haar kluis vergeten. Ze herinnert zich echter nog wel dat de eerste twee letters van het wachtwoord NA zijn en dat ze alleen het 26 letters lange Nederlandse alfabet heeft gebruikt. Om de kluis te openen, probeert ze alle mogelijke combinaties voor de resterende letters in alfabetische volgorde (AAA, AAB, AAC, . . .). Hoeveel pogingen moet Teresa doen als haar originele wachtwoord NABOJ is?

Antwoord: 1050

Oplossing: We kunnen de opgave in meer behapbare delen opdelen. Ten eerste, hoeveel pogingen hebben we nodig om bij ABA te komen? Omdat er 26 letters zijn in het Nederlandse alfabet, zijn hier 26 herhalingen van de laatste letter veranderen voor nodig. En BAA? Voor alle 26 herhalingen van de laatste letter veranderen, verandert de tweede letter met 1, dus om van AAA naar BAA te komen hebben we $26 \cdot 26 = 676$ pogingen nodig. Om nu van BAA naar BOA te komen hebben we $26 \cdot 14 = 364$ pogingen nodig, omdat O de 15-de letter van het alfabet is en we alle 14 letters die voor O komen moeten proberen. Tot slot, J is de 10-de letter, dus hebben we nog 10 extra pogingen nodig om van BOA naar BOJ te komen. Dit allemaal samen geeft $676 + 364 + 10 = 1050$ pogingen.

Opgave 33 ... Patrick trekt aan de touwtjes

Patrick heeft 3 hefbomen met lengtes $12a$, $4a$ en $5a$. Hij verbindt ze met horizontale touwtjes zoals in de figuur. Hij begint aan de meest rechter hefboom te trekken met een kracht van 300 N. Met hoeveel kracht (in Newton) moet hij aan de meest linker hefboom trekken zodat het mechanisme in rust blijft?



Antwoord: 125

Oplossing: Het mechanisme blijft enkel in rust als de koppel dat op elk van de hefbomen werkt verdwijnt. Dus we moeten kijken naar de koppels die op de hefbomen werken. Probeer eerst de touwtjes te begrijpen. De touwtjes zullen gespannen zijn, dus het touwtje zal op beide hefbomen dezelfde spankracht uitoefenen. Dus bijvoorbeeld zal het touwtje dat de middelste en de rechter hefboom verbindt met dezelfde kracht op de middelste hefboom werken (naar rechts) als op de rechter hefboom (naar links). Merk bovendien op dat deze krachten ook op dezelfde hoogte werken, dus ze werken op dezelfde afstand van de draaias van de hefbomen. Daarom werkt elk touwtje ook op beide hefbomen met dezelfde koppel.
Dit betekent dat we de middelste hefboom als het ware kunnen vergeten. De kracht die op de rechter hefboom werkt veroorzaakt namelijk een zeker koppel van grootte M op de rechter hefboom. Dit moet worden gecompenseerd door de koppel van het touwtje dat aan de rechter hefboom is bevestigd. Aangezien de touwtjes de koppel overdragen, moet de grootte van de koppel waarmee het rechter touw op de middelste hefboom werkt weer M zijn. En op dezelfde manier zal de koppel op de linker hefboom ook een grootte van M hebben.
Daarom moeten de twee relevante krachten een koppel van dezelfde grootte hebben om het mechanisme in rust te houden. Dit geeft ons de volgende vergelijking:

$$F \cdot (12a) = 300\,\mathrm{N} \cdot (5a)$$
$$F = \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}$$

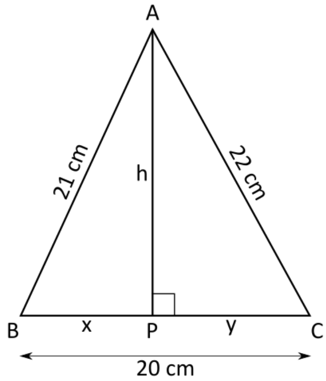
Dus Patrick moet met een kracht van 125 N trekken.

Opgave 34 ... Grote driehoek

Aaron tekent een driehoek met zijden 20 cm, 21 cm en 22 cm op het bord. Dan tekent hij de hoogtelijn op de zijde met lengte 20 cm. Dit deelt deze zijde op in twee segmenten. Wat is het positieve verschil tussen deze lengtes in centimeters?

Antwoord: 2,15

Oplossing: Zij de lengtes en de namen van de punten zoals in de figuur:



Beschouw de rechthoekige driehoeken ABP en ACP. Door toepassing van de stelling van Pythagoras krijgen we nu:

$$h^2 + x^2 = (21\,\text{cm})^2$$
$$h^2 + y^2 = (22\,\text{cm})^2$$

Als we de h^2 van beide gelijkheden isoleren en dan de gelijkheden gelijkstellen, dan vinden we:

$$(21\,\text{cm})^2 - x^2 = (22\,\text{cm})^2 - y^2$$
$$y^2 - x^2 = (22\,\text{cm})^2 - (21\,\text{cm})^2$$

Nu kunnen we de formule $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ toepassen aan beide kanten, zodat:

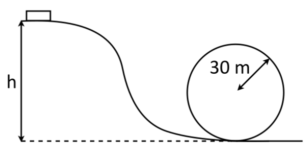
$$(y-x)(y+x) = (1\,\text{cm})(43\,\text{cm}) = 43\,\text{cm}^2$$

Maar we weten dat $y + x = 20\,\text{cm}$. Dus het verschil van de lengtes $y - x$ dat we moeten vinden, is:

$$y - x = \frac{43\,\text{cm}^2}{x+y} = \frac{43\,\text{cm}^2}{20\,\text{cm}} = \frac{43}{20}\,\text{cm} = 2{,}15\,\text{cm}$$

Opgave 35 ... Achtbaan van informatie

Matthijs heeft een boek gelezen waar hij de volgende informatie uit heeft gehaald: Als een auto met massa m met een snelheid v in een cirkelboog met straal r rijdt, dan werkt er een middelpuntzoekende kracht $F_{mpz} = \frac{mv^2}{r}$ op de auto.
Daarna gaat Matthijs naar een pretpark waar hij gefascineerd raakt door een achtbaan. Op een specifiek segment laten ze het karretje vrij afdalen vanaf een hoogte h en dan laten ze het een looping met straal 30 m doen, zoals geïllustreerd in de figuur. Wat is de minimale benodigde hoogte h in meters om de looping te voltooien zonder dat de karretjes vallen?



Antwoord: 75

Oplossing: Laat m de massa van een achtbaankarretje, $r = 30\,\text{m}$ de straal van de looping en v de snelheid van het karretje op het hoogste punt zijn.
Door het eerste deel van de opgave weten we dat er op het hoogste punt een zekere middelpuntzoekende kracht $F_{mpz} = \frac{mv^2}{r}$ is. Er zijn twee krachten die hiervoor op het karretje kunnen werken in deze richting - de zwaartekracht $F_g = mg$ en een zekere kracht afkomstig van de looping. We willen dat de middelpuntzoekendekracht zo klein als mogelijk is (hoe groter de middelpuntzoekende kracht is, hoe grotere snelheid de snelheid van het karretje moet zijn en dus zal het karretje ook meer energie moeten hebben in de beginsituatie). Omdat we de zwaartekracht niet kunnen verminderen, hebben we in het minimale geval dat $F_{mpz} = F_g$. Nu weten we dus:

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{r} &= mg\\ \frac{v^2}{r} &= g\\ v^2 &= rg\end{aligned}$$

Bekijk nu de energieën. In het begin heeft het karretje enkel potentiële energie $E_1 = mgh$, maar bovenin heeft het karretje zowel potentiële als kinetische energie. De hoogte is dan $2r$ en de snelheid v, dus de energie is dan $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. Energie blijft constant, dus $E_1 = E_2$. Als we dit combineren met de vergelijking voor v^2 krijgen we

$$\begin{aligned}mgh &= mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2\\ gh &= 2gr + \frac{1}{2}rg\\ h &= \frac{5}{2}r\end{aligned}$$

Dus zal het karretje moeten afdalen van de hoogte $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\text{m} = 75\,\text{m}$.

Opgave 36 ... Boter-kaas-en-eierentoernooi

In totaal 24 spelers hebben deelgenomen aan een boter-kaas-en-eierentoernooi. Elke speler kan hierbij tegen elke andere speler spelen, maar op elk gegeven moment wordt er maar hoogstens één wedstrijd gespeeld. Op een zeker moment in het toernooi merkt Birgit op dat er geen enkele groep spelers is waarvoor geldt dat ze minstens 2 wedstrijden met de rest hebben gespeeld. Wat is het grootst mogelijke aantal gespeelde wedstrijden tot op dat moment?

Antwoord: 23

Oplossing: We bewijzen eerst dat 23 wedstrijden daadwerkelijk mogelijk is: nummer de spelers maar 1 tot en met 24 en laat steeds speler i met $i + 1$ spelen voor $i = 1, \dots, 23$. Voor een willekeurig gegeven groep geldt er nu dat de speler met het kleinste getal, stel m, hoogstens gespeeld kan hebben met speler $m + 1$ (want $m - 1$ bestaat niet in de groep), en geldt er dus dat niet iedere speler met minstens 2 anderen gespeeld kan hebben.
Nu bewijzen nu dat $k \geq 24$ wedstrijden juist niet mogelijk zijn: stel maar wel dat er geen groep spelers is waarbinnen elke speler minstens twee wedstrijden heeft gespeeld, ofwel elke groep spelers eraan voldoet dat er een speler is met hoogstens 1 wedstrijd. Pas deze eigenschap dan eerst toe op alle 24 spelers, zodat er een speler is met 1 of 0 wedstrijden. Bekijk nu een alternatief toernooi van 23 spelers, zonder deze speler en zonder deze ≤ 1 wedstrijd die die gespeeld had. Dan hebben we nu een toernooi van $k - 1 \geq 23$ wedstrijden, en 23 spelers, zodanig dat voor elke groep vanuit die 23 spelers geldt dat er een speler is met ≤ 1 gespeelde wedstrijd. Zo doorgaan geeft dat er een toernooi is met $k - 23 \geq 1$ wedstrijden en slechts 1 speler, met deze eigenschap. Maar een speler die tegen zichzelf speelt kon helemaal niet: tegenspraak.
23 wedstrijden zijn dus wel mogelijk, maar meer dan dat niet, en dus is het antwoord inderdaad 23.

Opgave 37 ... Overhaaste vermenigvuldiging

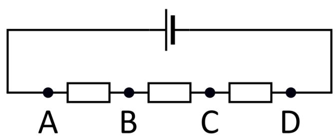
Louise wil graag weten wat het product van de positieve opeenvolgende oneven getallen van een tot en met eenendertig is, oftewel, wat is $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Ze pakt haar rekenmachine erbij en begint de getalllen gehaast te vermenigvuldigen. Louise vermoedt dat ze er één heeft weggelaten. Ze ziet dat het op twee na laatste cijfer van het getal dat wordt weergegeven op haar rekenmachine een 4 is. Welk getal heeft Louise weggelaten?

Antwoord: 25

Oplossing: Eerst moeten we de regel voor deelbaarheid door 125 ontdekken. De voorwaarde is dat het getal gevormd door de laatste 3 cijfers deelbaar is door 125 (dit is vergelijkbaar met de deelbaarheidsregels voor 2, 4, 8, 16, …, maar dan nu met 5, 25, 125 …). Waarom werkt dit? Schrijf een getal als $1000A + B$, met $B < 1000$. Nu is B het getal dat wordt gevormd door de laatste 3 cijfers. Merk op dat 1000 deelbaar is door 125, want $1000 = 8 \cdot 125$. Om nu het getal $1000A + B$ deelbaar te laten zijn door 125, moet B zelf deelbaar zijn door 125. Dit bewijst de voorwaarde.
We bekijken nu wat voor consequenties dit heeft. De enige cijfers met maximaal 3 cijfers deelbaar door 125 zijn 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750 en 875. Geen van deze beginnen met het cijfer 4, dus kunnen we concluderen dat veelvouden van 125 het cijfer 4 niet als op twee na laatste cijfer kunnen hebben.
Nu komen we eindelijk terug bij de originele opgave. We weten dat het op twee na laatste cijfer 4 is, dus het resultaat dat Louise heeft gekregen kan niet een veelvoud zijn van 125. Als ze geen enkel getal had weggelaten, was het uiteindelijke product deelbaar door $5 \cdot 15 \cdot 25$. Dit betekent dat de priemfactorisatie van het product het getal 5 vier keer zou bevatten. We moeten het priemgetal 5 dus minstens twee keer weghalen. Dit is alleen mogelijk door het getal 25 weg te laten. Dit betekent dat Louise het getal 25 heeft weggelaten.

Opgave 38 … Spanning tot het eind

Martins favoriete elektrische circuit is getekend in de figuur. Hij kiest daarop de punten A, B, C en D, hij meet de spanning tussen elk paar van deze punten en hij schrijft de zes waarden op een vel papier. Na enige tijd vindt hij dit vel weer terug, maar één van de waarden is onleesbaar. De andere vijf waarden zijn in willekeurige volgorde 7 V, 8 V, 10 V, 15 V en 18 V. Martin begint na te denken en hij concludeert dat er twee mogelijke waarden voor de zesde spanning zijn. Wat is de som van deze spanningen in Volt?
Opmerking: De weerstand van de weerstanden hoeven niet allemaal gelijk te zijn.



Antwoord: 28

Oplossing: Een spanning tussen twee punten beschrijft de grootte van het verschil van potentialen in deze twee punten. Het potentiaal beschrijft alleen de (elektrische) energie van een deelte met lading 1 C. Op elk van de punten A, B, C, D heeft dit deeltje een zekere potentiële energie en we kunnen dit getal aan elk van de punten toekennen. Dan beschrijven de spanningen enkel de verschillen tussen deze getallen.
We kunnen nu het probleem herformuleren tot de wiskundige opgave van vier getallen toekennen aan A, B, C en D (nu hebben deze letters niks meer te maken met de natuurkunde opgave), zodat hun verschillen 7, 8, 10, 15, 18 en de onbekende waarde zijn. Merk één interessante eigenschap op. Als je drie getallen neemt, zeg X, Y en Z, zodat $X > Y > Z$, dan is het verschil $X - Y$ de som van de verschillen $X - Y$ en $Y - Z$ (want $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Dus als we een willekeurig drietal getallen nemen, dan zullen hun verschillen de eigenschap hebben dat één de som van de andere twee is.
We kunnen nu teruggaan naar de opgave. Stel het onbekende verschil is het verschil tussen C en D. Neem de getallen A, B en C. Elk van deze verschillen zijn bekend. Omdat één van deze de som van de andere twee moet zijn, hebben we enkel twee mogelijkheden: $7 + 8 = 15$ of $8 + 10 = 18$. Iets vergelijkbaars moet gelden voor drietal A, B en D, dus één van deze drietallen heeft verschillen 7, 8 en 15 en de andere heeft verschillen

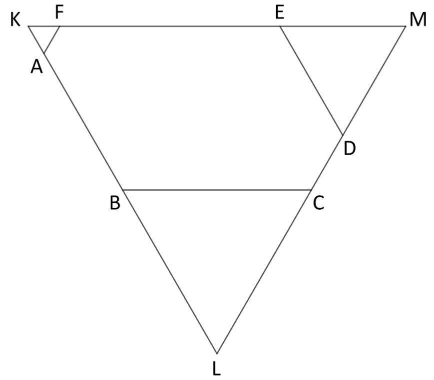
8, 10 en 18. De drietallen A, B, C en A, B, D overlappen enkel in A en B, dus dit verschil moet 8 zijn (dit is het enige verschil waarin de drietallen 7, 8, 15 en 8, 10, 18 overlappen).
De getallen A en B spelen dezelfde rol, dus zonder verlies van algemeenheid kunnen we stellen dat de verschillen van A en C en van B en C respectievelijk 15 en 7 zijn. In het drietal A, B en C weten we nu dat beide getallen A en C ofwel de grootste, ofwel het kleinste getal zijn. Kies ze zo, zodat A de grootste is. We hebben nu twee mogelijkheden voor wat de verschillen van D en de getallen A en B kunnen zijn.
Geval 1: Het verschil tussen A en D is 18. Dit betekent dat in het drietal A, B en D, een van de getallen A en D het grootste en de andere het kleinste is. Maar in het drietal A, B en C kozen we A als grootste, dus A is groter dan B. Dus in het drietal A, B, D weten we dat A de grootste moet zijn. Dit alles betekent dat A is 15 groter is dan C en 18 groter is dan D. Dus het verschill tussen C en D is $(A-15)-(A-18)=3$. Dit is de eerste oplossing.
Geval 2: Het verschil tussen A en D is 10. Dit betekent dat in het drietal A, B en D één van de getallen B en D het grootste en de andere het kleinste is. Op vergelijkbaar wijze met het vorige geval weten we dat A groter is dan B, dus B moet de kleinste zijn. Dus weten we dat C met 7 kleiner is dan B en dat D met 18 groter is dan B. Dit betekent dat het verschil tussen C en D gelijk aan $(B+18)-(B-7)=25$ is. Dit is de tweede oplossing.
Om samen te vatten, we hebben gevonden dat het onbekende verschil enkel 3 of 25 kan zijn. In het originele probleem betekent dit dat de onbekende spanning enkel $3\,\mathrm{V}$ of $25\,\mathrm{V}$ kan zijn. Dus de som van de twee mogelijke onbekende spanningen is $3\,\mathrm{V}+25\,\mathrm{V}=28\,\mathrm{V}$.

Opgave 39 . . . Zeshoekige speeltuin

Er is een speeltuin in de stad in de vorm van een convexe zeshoek, waarvan alle binnenhoeken 120° zijn. De lengtes van de zijden van de speeltuin zijn $10\,\mathrm{m}$, $12\,\mathrm{m}$, $4\,\mathrm{m}$, $8\,\mathrm{m}$, $14\,\mathrm{m}$, $2\,\mathrm{m}$. Het is bekend dat de oppervlakte van de speeltuin geschreven kan worden als $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Bereken de waarde van a.

Antwoord: 91

Oplossing: Voordat we beginnen, bekijken we de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijdelengte x. Door de stelling van Pythagorsas is het makkelijk te berekenen dat de hoogte van deze driehoek $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ is. Dus de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek is $\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Nu keren we terug naar de originele opgave. Zij de hoekpunten van de zeshoek A, B, C, D, E, F, zodat $AB=10\,\mathrm{m}$, $BC=12\,\mathrm{m}$, $CD=4\,\mathrm{m}$, $DE=8\,\mathrm{m}$, $EF=14\,\mathrm{m}$, $FA=2\,\mathrm{m}$. Zij K, L, M de snijpunten van AB,CD en EF om de driehoek KLM zoals in de figuur te krijgen:



Omdat de binnenhoeken van de zeshoek $ABCDEF$ 120° waren, weten we dat de driehoeken KAF, LBC en MDE gelijkzijdig zijn. Dit betekent dat ook driehoek KLM gelijkzijdig is met zijdelengte $24\,\mathrm{m}$.
De oppervlakte van de zeshoek $ABCDEF$ is het verschil van de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek KLM en de som van de oppervlaktes van de gelijkzijdige driehoeken KAB, LBC en MDE. Dus het

oppervlakte van de zeshoek $ABCDEF$ is:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right) = (12^2 - 1^2 - 6^2 - 4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2 = 91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

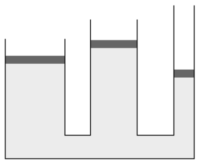
De waarde van a is nu 91

Opgave 40 . . . Proefdier

Huub heeft thuis een hydraulisch systeem met 3 zuigers zoals in de figuur. Hij weet dat de oppervlakte van de eerste zuiger de som van de oppervlaktes van de andere twee zuigers is. Huub heeft ook een hamster waarmee hij een paar experimenten uitvoert:

Zodra hij de hamster op de eerste zuiger plaatst, zakt deze met 15 mm naar beneden.
Zodra hij de hamster op de tweede zuiger plaatst, zakt deze met 30 mm naar beneden.

Hoeveel millimeter zal de derde zuiger zakken als Huub de hamster erop plaatst?



Antwoord: 75

Oplossing: Schrijf voor de oppervlaktes van de eerste zuiger S_1, van de tweede zuiger S_2 en van de derde zuiger S_3. De gegeven informatie geeft $S_1 = S_2 + S_3$.
Laat m de massa van de hamster en $\Delta h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ de afstand die de eerste zuiger zakt zodra de hamster erop is gezet. op hetzelfde moment stijgt de tweede zuiger met Δh_2 en de derde zuiger met Δh_3. Nadat de hamster op de eerste zuiger is geplaats, moeten er twee dingen gebeuren. Ten eerste moet het water onder de eerste zuiger zich verdelen over de andere twee zuigers. Dit geeft de voorwaarde $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2 + S_3\Delta h_3$. Ten twee de moet de druk van alle drie de zuigers gelijk zijn. Als p de initïele druk is van het systeem en ρ de dichtheid van water, dan geeft dit $p + \frac{mg}{S_1} - \Delta h_1\rho g = p + \Delta h_2\rho g = p + \Delta h_3\rho g$. We kunnen p wegstrepen en door g delen, zodat we $\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$ krijgen. Het tweede deel van deze vergelijking geeft $\Delta h_2 = \Delta h_3$. Dit combineren in de vorige vergelijkingen geeft:

$$\begin{aligned} S_1\Delta h_1 &= (S_2 + S_3)\Delta h_2 \\ \frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho &= \Delta h_2\rho \end{aligned}$$

Of in een andere vorm:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 &= \Delta h_2 \\ \frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 &= \Delta h_2 \end{aligned}$$

Als we deze vergelijkingen gelijkstellen krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 &= \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 \\ \frac{m}{S_1\rho} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1 \end{aligned}$$

Nu herdefiniëren we Δh_2 als de afstand waarmee de tweede zuiger zakt als de hamster erop is gezet en op vergelijkbare wijze Δh_3 voor de derde zuiger. Op dezelfde wijze als hierboven vinden we:

$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_2+S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_2\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_1+S_3}\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_3\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_1+S_2}\Delta h_3$$

Als we de eerste twee vergelijkingen delen en gebruiken dat $S_1 = S_2 + S_3$, krijgen we:

$$\begin{aligned}
\frac{S_2}{S_1} &= \frac{2S_1 - S_2}{S_1}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\\
S_2 &= (2S_1 - S_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2S_1 - S_2)\frac{15\,\text{mm}}{30\,\text{mm}} = \frac{2S_1 - S_2}{2}\\
3S_2 &= 2S_1\\
S_2 &= \frac{2}{3}S_1
\end{aligned}$$

Door $S_1 = S_2 + S_3$ krijgen we $S_3 = S_1 - S_2 = S_1 - \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_1$. Door te delen door de eerste en de derde vergelijking van de vorige groep vergelijkingen vinden we:

$$\begin{aligned}
\frac{S_3}{S_1} &= \frac{S_1+S_2}{S_2+S_3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\
\frac{\frac{1}{3}S_1}{S_1} &= \frac{S_1+\frac{2}{3}S_1}{\frac{2}{3}S_1+\frac{1}{3}S_1}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\
\frac{1}{3} &= \frac{5}{3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\
\Delta h_3 &= 5\Delta h_1 = 5\cdot 15\,\text{mm} = 75\,\text{mm}
\end{aligned}$$

Dus als we de hamster op de derde zuiger plaatsen, zakt deze met een afstand van $75\,\text{mm}$.=

Opgave 41 . . . Vreemd favoriet getal

Naut heeft een favoriet getal. Het is zijn favoriete getal omdat het het kleinste gehele getal groter dan 1 is met de volgende eigenschap: Als Naut de som van de cijfers vermenigvuldigt met zichzelf, krijgt hij het product van de cijfers van het getal. Wat is de waarde van dit getal?

Antwoord: 999

Oplossing: Nauts favoriete getal kan niet uit één cijfer bestaan. Als het wel een cijfer a was, dan zou de voorwaarde zeggen dat $a^2 = a$, wat alleen waar is voor $a = 0$ en $a = 1$, maar het getal moet groter zijn dan 1.
Nauts favoriete getal kan ook niet uit twee cijfers bestaan. Als dat wel zo is, kunnen we het getal schrijven als $10a + b$. Dan hebben we door de voorwaarde $(a + b)^2 = ab$, oftewel $a^2 + ab + b^2 = 0$ werkt. Maar omdat b niet negatief en a positief is, hebben we altijd $a^2 + ab + b^2 > 0$, dus $a^2 + ab + b^2 = 0$ kan nooit gelden.
Vervolgens gaan we laten zien dat 999 het enige getal bestaande uit drie cijfers is met de gegeven eigenschap. Het is makkelijk te controleren dat 999 de eigenschap heeft ($(9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$).
Zij $100a + 10b + c$ het getal met de gegeven eigenschap, dus $(a + b + c)^2 = abc$ geldt. De getallen a, b en c zijn cijfers, dus hebben we $0 \le a, b, c \le 9$. Het is duidelijk dat als sommige van deze cijfers 0 zijn, dat dan de relatie $(a + b + c)^2 = abc$ ervoor zorgt dat de andere cijfers ook 0 zijn, wat niet kan. Dus kunnen we aannemen dat $1 \le a, b, c$. Bovendien is de relatie $(a + b + c)^2 = abc$ symmetrisch in de waarden a, b, c, zodat we kunnen aannemen dat $a \le b \le c$ (deze voorwaarde zal het kleinste driecijferige getal produceren uit elk correcte drietal). Dus nemen we aan dat:

$$1 \le a \le b \le c \le 9$$

Bekijk nu $(a+b+c)^2 = abc$ iets beter. Dit kan geschreven worden als $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = abc$. Als we gebruiken dat $c \leq 9$, weten we dat $abc \leq 9ab$. Door $a \leq b \leq c$ te gebruiken, weten we ook dat:

$$c^2 \geq ab$$
$$ac \geq ab$$
$$bc \geq ab$$

Ook geldt $(a-b)^2 \geq 0$, dus $a^2+b^2 \geq 2ab$. Als we deze ongelijkheden combineren, krijgen we:

$$9ab \leq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = abc \leq 9ab$$

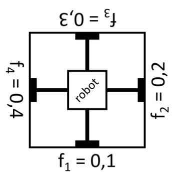
Omdat de linker- en de rechterkant van deze ongelijkheid hetzelfde zijn, moeten we gelijkheden hebben gebruikt in alle ongelijkheden.

- In de ongelijkheid $abc \leq 9ab$ is er gelijkheid dan en slechts dan als $c = 9$.
- In de ongelijkheid $ac \geq ab$ is er gelijkheid dan en slechts dan als $b = c$.
- In de ongelijkheid $bc \geq ab$ is er gelijkheid dan en slechts dan als $a = c$.

Als we deze observaties combineren, krijgen we dat het enige mogelijke geval $a = b = c = 9$ is. We hebben al gecontroleerd dat dat daadwerkelijk een getal met de gegeven eigenschap. Dus 999 is het enige driecijferige getal dat voldoet aan de gegeven eigenschap. Nu weten we dus dat dit het kleinste getal groter dan 1 is dat voldoet aan de gegeven eigenschap, dus 999 is Nauts favoriete getal.

Opgave 42 ... Tweede stabiele robot

Wetenschappers doen nu onderzoek naar een ander diep gat dat ze hebben gegraven, opnieuw met vierkante dwarsdoorsnede. Ze hangen weer een kleine robot met massa 15 kg in het gat. Om de robot te stabiliseren, duwt de robot met armen tegen de kanten van het gat. Elke arm duwt met een kracht F. Maar deze keer zijn de wrijvingscoëfficiënten tussen de armen en de kanten 0,1, 0,2, 0,3 en 0,4. Ze hebben daarom een schets van de robot van bovenaf getekend zoals in de figuur. Wat is de minimale kracht F in Newton waarmee de robot moet duwen zodat deze stabiel kan blijven hangen?



Antwoord: 250

Oplossing: We pakken dit op dezelfde manier aan als bij opgave 25, maar deze keer moeten we er even over nadenken wat de verschillende wrijvingscoëfficiënten doen. We focussen eerst enkel op de richting waar we wrijvingscoëfficiënten $f_1 = 0{,}1$ en $f_3 = 0{,}3$ hebben. We weten dat de kracht in de formule $F_f = fF$ staat voor de maximale wrijvingskriacht, oftewel $F_f \leq fF$. Op deze manier krijgen we twee wrijvingskrachten $F_{f_1} \leq f_1 F$ en $F_{f_3} \leq f_3 F$. Als deze krachten verschillend zouden zijn, zouden ze een koppel veroorzaken (om de as die de andere twee armen van de robot verbindt) op de robot. Dit zou de robot instabiel maken. Daarom hebben we $F_{f_1} = F_{f_3}$. Als we de twee ongelijkheden combineren met $f_1 \leq f_3$, krijgen we dat $F_{f_1} = F_{f_3} = f_1 F$. Op soortgelijke wijze vinden we voor $f_2 = 0{,}2$ en $f_4 = 0{,}4$ dat $F_{f_2} = F_{f_4} = f_2 F$. Om te compenseren voor de zwaartekracht $F_g = mg$ moeten we hebben:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} + F_{f_4} \\ mg &= f_1 F + f_2 F + f_1 F + f_2 F \\ mg &= 2(f_1 + f_2)F \\ F &= \frac{mg}{2(f_1+f_2)} \end{aligned}$$

Dit betekent dat de robot moet duwen met kracht:

$$F = \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}$$

Met dank aan

Voorzitter van het opgavencomité

Marián Poturnay

Opgave-inzendingen

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Opgaven en oplossingen

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Herzieningen

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Vertalingen

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Coördinatoren

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Wedstrijdlocaties

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť