Rozwiązania

XI edycja zawodów Náboj Junior

24 listopada 2023

Witaj,

Masz przed sobą broszurę zawierającą zadania z rozwiązaniami z konkursu Náboj Junior 2023. Náboj Junior jest międzynarodowym konkursem z matematyki i fizyki dla czteroosobowych drużyn uczniów klas 7 i 8 SP. Konkurs trwa 120 minut, w tym czasie drużyny starają się rozwiązać możliwie dużo zadań. Zadania nie sprawdzają wyłącznie wiedzy z matematyki i fizyki, ale także umiejętność znajdowania sprytnych i nieoczywistych rozwiązań.

Jedenasta edycja Nábója Junior odbyła się 24. listopada 2023 roku. Tego roku do konkursu przystąpiło 241 drużyn z Polski. Zawody stacjonarne odbyły się łącznie w 54 miastach w Słowacji, Czechach i Polsce. W Belgii, Hiszpanii, Holandii oraz Chorwacji zaś konkurs przeprowadzono w formie online.

Zawody w polskich miastach są organizowane przez wolontariuszy, nauczycieli, którzy poświęcają swój czas i energię aby umożliwić uczniom ze swojego regionu wzięcie udziału i sprawdzenie swojej wiedzy. Celem Nábója Junior jest rozwijanie talentu matematycznego i fizycznego młodzieży oraz pokazanie szerokiemu gronu uczniów jak wiele wyzwań i ciekawostek niosą ze sobą przedmioty ścisłe.

Do zobaczenia w przyszłym roku, Organizatorzy

Zadanie 1 . . . Kolekcja kamyków

Asia i Bartek zbierali kamyki na plaży. Asia zebrała o 49 kamyków więcej niż Bartek, więc postanowiła się z nim podzielić. Dała Bartkowi 11 swoich kamyków. O ile więcej kamyków ma teraz Asia niż Bartek?

Wynik: 27

Rozwiązanie: Gdy Asia przekazała Bartkowi jedenaście spośród swoich kamyków, straciła 11 kamyków, a Bartek zyskał ich 11. Zatem różnica pomiędzy liczbą kamyków, które posiadali, zmalała o $11 + 11 = 22$. Zatem na końcu Asia miała $49 - 22 = 27$ więcej kamyków niż Bartek.

Zadanie 2 . . . Taksówkarka

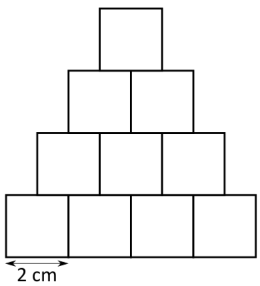
Teresa prowadzi taksówkę. Odkryła, że w ciągu pierwszych trzech miesięcy 2023 roku przejechała 10 800 kilometrów i przez cały ten czas nigdy nie opuściła swojego pojazdu. Z jaką średnią szybkością w km/h jechała Teresa w tym okresie?

Wynik: 5

Rozwiązanie: Pierwsze trzy miesiące 2023 roku mają kolejno 31, 28 i 31 dni. Razem stanowi to $31+28+31 = 90$ dni, czyli $90 \cdot 24 = 2160$ godzin. Zatem Teresa przejechała 10800 kilometrów w ciągu 2160 godzin. W takim razie, jej średnia szybkość musiała wynieść $\frac{10\,800\,\mathrm{km}}{2160\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km/h}$.

Zadanie 3 . . . Pudła

Laurze bardzo spodobały się pudła leżące w jej pokoju, więc postanowiła je narysować. Jej rysunek widnieje na poniższej ilustracji. Każdy kwadrat na rysunku ma długość boku równą 2 cm. Jaka jest sumaryczna długość wszystkich odcinków na rysunku Laury w centymetrach?



Wynik: 56

Rozwiązanie: Aby narysować cztery kwadraty na dole, Laura potrzebuje 13 odcinków. Dodanie kolejnych trzech kwadratów wymaga 7 odcinków. Kolejne dwa kwadraty wymagają kolejnych 5 odcinków. Na końcu, aby narysować kwadrat na samej górze, Laura musi dorysować jeszcze 3 odcinki. Sumarycznie, potrzeba $13 + 7 + 5 + 3 = 28$ odcinków. Każdy z nich ma długość 2 cm, więc ich sumaryczna długość wynosi $28 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 56\,\mathrm{cm}$.

Zadanie 4 . . . Wakacje w Ameryce

Michalina pojechała na wycieczkę do Stanów Zjednoczonych. Szybko zwróciła uwagę na fakt, że ludzie używają tam innych jednostek miary, niż w Europie. Zakupiła puszkę coli o objętości 12 oz. Na etykiecie wyczytała, że jedna taka puszka coli zawiera 150 kilokalorii. Według tych wytycznych, jak dużo kilokalorii przyswoiłaby Michalina, gdyby wypiła 100 ml coli?

Uwaga: Możesz spojrzeć do karty ze wzorami i stałymi w poszukiwaniu wskazówki.

Wynik: 45

Rozwiązanie: Zaglądając do karty ze wzorami możemy dowiedzieć się, że 36 oz to tyle samo co 1 l. W takim razie, objętość puszki w litrach to $\frac{12\,\mathrm{oz}}{36\,\mathrm{oz/l}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{l}$. Oznacza to, że w litrze coli znajduje się $3 \cdot 150 = 450$ kilokalorii, zaś w 100 ml coli jest $450 : 10 = 45$ kilokalorii.

Zadanie 5 . . . Skrzynia skarbów

Antoni wraz z resztą swojej pirackiej załogi odkrył skrzynię skarbów pełną złotych monet. Zdecydowali oni podzielić monety między sobą po równo. Okazało się, że gdyby w skrzyni było 48 mniej monet, każdy dostałby po 6 monet mniej. Z ilu osób składa się piracka załoga (nie licząc Antoniego)?

Wynik: 7

Rozwiązanie: Gdyby w skrzyni było 48 monet mniej, każda osoba otrzymałaby 6 monet mniej, niż faktycznie otrzymała. W takim razie, w załodze musi być $48 : 6 = 8$ osób. Skoro mamy nie liczyć Antoniego, to poprawna odpowiedź wynosi $8 - 1 = 7$.

Zadanie 6 . . . Okrążenia

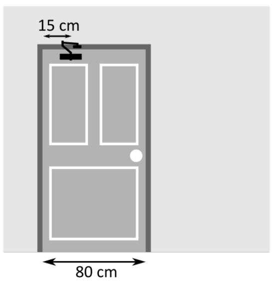
Każdego dnia, Andrzej i Zuza wykonują 18-minutowy trening (bez żadnych przerw). Andrzej biegnie po okrężnym torze o promieniu 70 metrów, zaś Zuza biegnie po okrężnym torze o promieniu 35 metrów. Jedno pełne okrążenie zajmuje Andrzejowi 3 minuty, a Zuzie 2 minuty. Przed biegiem, zmierzyli oni długość ich pojedynczych kroków. Okazało się, że 1 krok jest długości 100 centymetrów. Jak dużo kroków wykonają łącznie w trakcie swojego 18-minutowego treningu? Zaokrąglij wynik do dziesiątek.
Uwaga: Możesz użyć przybliżenia $\pi = \frac{22}{7}$.

Wynik: 4620

Rozwiązanie: Podczas 18-minutowego treningu, Andrzej wykona $18 : 3 = 6$ okrążeń. Każde z jego okrążeń ma długość $2\pi \cdot 70\,\mathrm{m} = 140\pi\,\mathrm{m}$. Oznacza to, że przebiegnie łącznie $6 \cdot 140\pi\,\mathrm{m} = 840\pi\,\mathrm{m}$ i wykona tyle samo kroków. Podobnie, Zuza wykona $18 : 2 = 9$ okrążeń długości $2\pi \cdot 35\,\mathrm{m} = 70\pi\,\mathrm{m}$. Przebiegnie łącznie dystans $9 \cdot 70\pi\,\mathrm{m} = 630\pi\,\mathrm{m}$ i wykona taką właśnie liczbę kroków. Sumarycznie, wykonają $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ kroków. Jeśli użyjemy przybliżenia $\pi = \frac{22}{7}$, obliczymy że wykonali oni $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ kroków.
Uwaga: Jeśli założymy $\pi = 3{,}14$*, otrzymamy wynik* $4615{,}8$*, który po zaokrągleniu do dziesiątek daje taką samą odpowiedź.*

Zadanie 7 . . . Zamykacz

Olek zainteresował się zamykaczem do drzwi – mechanizmem, który automatycznie zamyka drzwi, gdy tylko zostaną otwarte. Drzwi Olka mają szerokość 80 cm. Zamykacz jest do nich przymocowany w odległości 15 cm od zawiasów i działą z siłą 48 N. Z jaką minimalną siłą musi zadziałać Olek, żeby otworzyć drzwi?



Wynik: 9

Rozwiązanie: Żeby otworzyć drzwi z jak najmniejszą siłą, musimy sprawić, by momenty sił działające na te drzwi równoważyły się. Moment siły M wywieranej przez zamykacz jest równy iloczynowi tej siły i odległości punktu jej przyłożenia od zawiasów: $M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. Używając tego samego równania, wnioskujemy, że Olek musi działać na drzwi siłą F w odległości $a = 80\,\mathrm{cm}$ od zawiasów:

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}$$

Zadanie 8 ... Oplatanie Ziemi

Ewa kupiła bardzo długą linę, za pomocą której mogłaby opleść Ziemię wokół równika. Adam stwierdził, że chciałby kupić jeszcze dłuższą linę, za pomocą której mógłby opleść Ziemię wokół równika tak, że lina znajdowałaby się metr nad powierzchnią ziemi. O ile metrów więcej niż Ewa będzie potrzebował Adam? Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

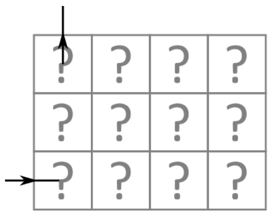
Uwaga: Załóż, że Ziemia jest idealną kulą.

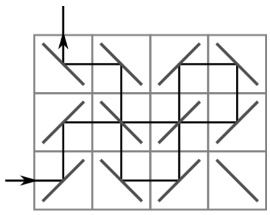
Wynik: 6,28

Rozwiązanie: Jeśli Ziemia jest idealną kulą, oplatająca ją lina będzie tworzyła idealny okrąg. Jeśli promień tego koła to r, Ewa będzie potrzebowała liny o długości $2\pi r$. Adam będzie potrzebował utworzyć z liny okrąg o promieniu $r + 1\,\mathrm{m}$, więc jego lina będzie musiała mieć długość $2\pi(r + 1\,\mathrm{m})$. Różnica długości lin Adama i Ewy wyniesie zatem $2\pi(r + 1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Zadanie 9 ... Gra optyczna

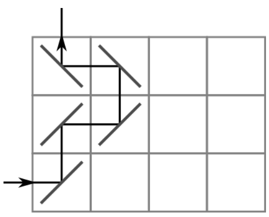
Marcel znalazł grę optyczną. Składa się z planszy 3×4 (patrz lewy rysunek). Marcel musi postawić dwustronne lustro w każdym kwadracie ze znakiem zapytania, tak aby kąt między lustrem i bokami planszy wynosił 45°. Później Marcel emituje laserem promień, który następnie opuszcza planszę tak jak zaznaczono na lewym rysunku. Przykładowa sytuacja, dla której mogło się tak stać, jest pokazana na prawym rysunku. Ile co najmniej razy musiał odbić się od luster promień lasera, jeśli zaczął i skończył tak jak zaznaczono?





Wynik: 5

Rozwiązanie: Za każdym razem, gdy promień uderza w lustro, zmienia swój kierunek o 90° w prawo lub w lewo (zależnie od ustawienia lustra). Łatwo znaleźć poniższy sposób na rozwiązanie zagadki za pomocą tylko 5 odbić promienia (ustawienia luster nieprzedstawionych na ilustracji nie mają znaczenia).



Z drugiej strony, można zauważyć, że nie jest możliwe, by światło odbiło się tylko 3 razy (promień musiałby nie zmienić kierunku w niektórych polach). Dodatkowo, widać, że potrzebna jest nieparzysta liczba odbić - po nieparzystej liczbie odbić kierunek promienia jest pionowy, zaś po parzystej liczbie odbić kierunek jest poziomy.

W takim razie, liczba odbić musi być nieparzystą liczbą większą od 3, co oznacza, że istotnie 5 jest minimalną potrzebną liczbą odbić.

Zadanie 10 ... Szorstka sprawa

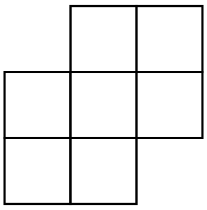
Staszek wymyślił nowy rodzaj liczb, które nazwał „szorstkimi”. Dodatnia liczba całkowita jest szorstka, jeśli wszystkie jej cyfry są sobie równe. Ile jest szorstkich liczb większych od dziesięciu i mniejszych od miliona?

Wynik: 45

Rozwiązanie: Używając wyłącznie cyfry 1 możemy utworzyć 5 szorstkich liczb w danym w zadaniu zakresie: 11, 111, 1111, 11111 i 111111. Podobnie możemy utworzyć pięć szorstkich liczb używając każdej z cyfr od 2 do 9 ale nie możemy utworzyć żadnej szorstkiej liczby z cyfry 0. Wobec tego istnieje dokładnie $9 \cdot 5 = 45$ szorstkich liczb większych od dziesięciu i mniejszych od miliona.

Zadanie 11 ... Stara plansza

Daniel znalazł na strychu starą planszę, która widnieje na poniższej ilustracji. Daniel chce wpisać liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5 oraz 6 w pola planszy w taki sposób, by każde pole zawierało dokładnie jedną liczbę oraz by każda liczba została wykorzystana dokładnie raz. Dodatkowo, chce aby suma liczb w każdej kolumnie była taka sama. Daniel znalazł wszystkie możliwe rozwiązania i dla każdego z nich policzył iloczyn liczb wpisanych w środkowej kolumnie. Jak dużo różnych wyników otrzymał?



Wynik: 1

Rozwiązanie:
Suma wszystkich liczb wpisanych w pola planszy to $0+1+2+3+4+5+6 = 21$. Oznacza to, że suma liczb w każdej kolumnie musi wynosić $21 : 3 = 7$. Można zauważyć, że liczba 0 nie może występować w pierwszej ani ostatniej kolumnie, ponieważ musielibyśmy użyć liczby 7, której nie mamy do dyspozycji. W takim razie 0 zawsze musi być wpisane w środkową kolumnę, co sprawia że iloczyn liczb w środkowej kolumnie musi zawsze być równy 0. Zatem Daniel jest w stanie otrzymać tylko jeden iloczyn równy 0.

Zadanie 12 ... Do mycia

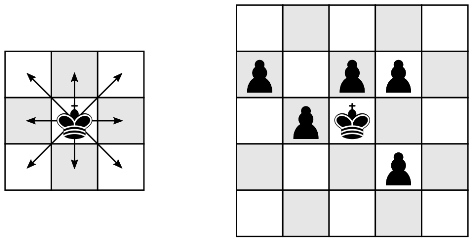
Przemek ma wannę o objętości $150\,\mathrm{l}$. Wanna może być napełniana wodą z kranu z prędkością $0{,}2\,\mathrm{l/s}$. Jeśli jednak odpływ wanny nie jest zatkany, to woda odpływa z niej z prędkością $0{,}05\,\mathrm{l/s}$. Przemek postanowił napełnić całą wannę wodą z kranu, lecz zapomniał zatkać odpływ. Ile sekund dłużej mu to zajmie niż gdyby odpływ był zatkany?

Wynik: 250

Rozwiązanie: Gdyby Przemek nie zapomniał zatkać odpływu to wanna napełniłaby się w czasie $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$. Ponieważ jednak odpływ jest otwarty, to łączna prędkość przyrostu objętości wody wynosi $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. Wanna zostanie zatem napłniona w czasie $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$, więc zajmie to $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ dłużej.

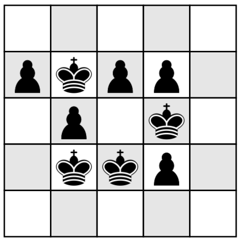
Zadanie 13 ... Szachy

Janusz bawi się figurami szachowymi, w tej chwili trzyma w ręce króla. Król może przemieścić się do każdego z ośmiu pól stykających się z jego polem krawędzią lub wierzchołkiem pod warunkiem, że nie stoi tam żadna inna figura. Janusz umieścił figury na szachownicy tak jak na rysunku z prawej. Do ilu pól może dostać się król wykonując dokładnie dwa ruchy?

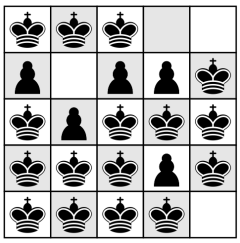


Wynik: 16

Rozwiązanie: Po pierwszym ruchu król może przemieścić się do każdego z pól zaznaczonych na obrazku:



Teraz pytanie jest takie: do ilu pól może przemieścić się król zaczynając z dowolnego położenia z poprzedniego obrazka? Łatwo zauważamy, że król może ruszyć się do dowolnego spośród tych 16 pól:



Zadanie 14 ... Pocięty czworokąt

Bożydar nudził się na lekcji matematyki, więc narysował czworokąt o obwodzie 49 cm. Następnie postanowił rozciąć go na dwa trójkąty wzdłuż jednej z jego przekątnych. Okazało się, że suma obwodów powstałych trójkątów wynosi 77 cm. Jaka jest długość przekątnej wzdłuż której Bożydar wykonał cięcie?

Wynik: 14

Rozwiązanie: Dwa powstałe trójkąty mają po dwa boki takiej samej długości jak jakiś bok czworokąta oraz po jednym boku o długości równej długości przekątnej. Oznacza to, że suma ich obwodów jest równa obwodowi czworokąta powiększonemu o dwukrotność długości przekątnej. Różnica pomiędzy sumą obwodów trójkątów a obwodem czworokąta wynosi $77\,\mathrm{cm} - 49\,\mathrm{cm} = 28\,\mathrm{cm}$, zatem długość przekątnej to $28\,\mathrm{cm} : 2 = 14\,\mathrm{cm}$.

Zadanie 15 ... Rzucaj, uciekaj i nie oglądaj się

Sławka jedzie na deskorolce z prędkością 9 km/h. Postanowiła rzucić piłkę pionowo nad siebie z taką prędkością, że wyląduje na ziemi po 4 sekundach. Natychmiast po tym Sławka przyspieszyła do prędkości 18 km/h. Jaka jest odległość w metrach pomiędzy Sławką a jej piłką w chwili uderzenia piłki w ziemię?

Uwaga: Należy pominąć opór powietrza.

Wynik: 10

Rozwiązanie: Po rzucie pozioma składowa prędkości piłki będzie równa 9 km/h = 2,5 m/s podczas gdy Sławka przyspieszy do prędkości 18 km/h = 5 m/s. Wobec tego względna prędkość w poziomie pomiędzy Sławką a jej piłką będzie wynosić 5 m/s − 2,5 m/s = 2,5 m/s. Zatem po 4 sekundach, kiedy piłka uderzy w ziemię, Sławka będzie w odległości 2,5 m/s · 4 s = 10 m od swojej piłki.

Zadanie 16 . . . Przyjęcie

Alicja, Beata, Celina i Daria były na wspólnym przyjęciu. Przybyły o różnych porach, a po wydarzeniu relacjonowały je (każda niezgodnie z prawdą) w ten sposób:

Alicja powiedziała: „Przyszłam jako druga."
Beata powiedziała: „Przyszłam przed Alicją."
Celina powiedziała: „Przyszłam po Alicji."
Daria powiedziała: „Przyszłam jako pierwsza."

W jakiej kolejności dziewczyny przyszły na przyjęcie?

W odpowiedzi zastąp imię każdej z dziewczyn pierwszą literą tego imienia. Przykładowo, jeśli odpowiedź to Alicja, Beata, Celina, Daria, twoją odpowiedzią powinno być ABCD.

Wynik: CDAB

Rozwiązanie:
Zaczniemy od ustalenia, która w kolejności była Alicja. Skoro wszystkie zdania są fałszywe, Alicja nie mogła być druga. Beata i Celina przybyły kolejno po Alicji i przed nią, więc Alicja nie mogła przybyć ani jako pierwsza, ani jako ostatnia. Musiała być zatem trzecia. Beata skłamała, że przyszła przed Alicją, zatem musiała przybyć po niej. To oznacza, że przyszła jako ostatnia. Daria nie przyszła jako pierwsza, więc musiała przyjść jako druga. Jedynym pozostałym miejscem dla Celiny jest pierwsze miejsce, i łatwo stwierdzić, że przyszła przed Alicją, a zatem rzeczywiście zdanie wypowiedziane przez nią było nieprawdziwe. To oznacza, że dziewczyny przybyły w kolejności: Celina, Daria, Alicja i Beata.

Zadanie 17 . . . Brneńskie tramwaje

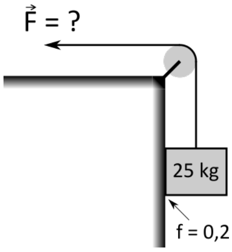
Jarda jechał przez Brno tramwajem nr 12. Podczas jazdy zauważył, że średnio co dwie minuty widział mijający go tramwaj nr 12, jadący w przeciwnym kierunku. Uznał za niesprawiedliwe to, że linia 5, którą jeździ do szkoły, odjeżdża z przystanku tylko co sześć minut, podczas gdy linia 12 kursuje tak często. O ile więcej tramwajów nr 12 niż tramwajów nr 5 odjeżdża z przystanku w ciągu godziny?

Wynik: 5

Rozwiązanie:
Obliczmy okres między odjazdami tramwaju nr 12. Gdy Jarda jedzie tramwajem, jego prędkość względem mijanego tramwaju jest dwa razy większa niż prawdziwa szybkośc pojazdu. Zatem z jego perspektywy przemierza stałą odległość między dwoma mijanymi tramwajami w czasie dwa razy krótszym niż w rzeczywistości, zatem prawdziwa odległość między dwoma odjazdami tramwaju nr 12 z przystanku jest dwa razy dłuższa niż obserwuje to Jarda. Zatem linia nr 12 kursuje co $2 \cdot 2 = 4$ minuty. W ciągu godziny na przystanku zatrzyma się $60 : 4 = 15$ tramwajów nr 12.
Podobnie, w ciągu godziny z jednego przystanku odjedzie $60 : 6 = 10$ tramwajów nr 5. Zatem w ciągu godziny na przystanku zatrzyma się o $15 - 10 = 5$ tramwajów nr 12 więcej niż tramwajów nr 5.

Zadanie 18 . . . Czy damy radę?

Bob Budowniczy chciałby przetransportować pudło na wysokie piętro budynku. Zdobył krążek, zbudował mechanizm przedstawiony poniżej i zaczął się zastanawiać. Pudło waży 25 kg, a współczynnik tarcia między pudłem a ścianą jest równy 0,2. Jaka jest najmniejsza siła w niutonach, z jaką Bob musi pociągnąć za linę, żeby pudło poruszyło się w górę?



Wynik: 250

Rozwiązanie: Musimy się zastanowić, jak tarcie wpływa na ruch pudła. Siłą tarcia działa tylko między ciałami, które działają na siebie z pewną siłą nacisku. W naszym przypadku pudło nie naciska w żaden sposób na pionową ścianę, zatem na pudło nie zadziała siła tarcia. Zatem jedyną siłą (poza siłą wywieraną przez Boba), która działa na pudło jest siła ciężkości $F_g = mg$, gdzie $m = 25\,\mathrm{kg}$ to masa pudła. Bob musi pociągnąć za linę z siłą F o takiej samej wartości, zatem $F = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Zadanie 19 . . . Owoce leśne

Karolina organizuje degustację swoich dżemów. W spiżarni ma 10 dżemów malinowych, 15 dżemów borówkowych, 7 dżemów jeżynowych, 15 dżemów żurawinowych i 9 dżemów truskawkowych. Chce wziąć ze sobą przynajmniej jeden dżem każdego rodzaju. Ponadto wie, że jej przyjaciele lubią maliny i borówki, więc chce wziąć co najmniej 2 dżemy malinowe i co najmniej 5 dżemów borówkowych. W jej spiżarni panuje jednak ciemność, więc nie może rozpoznać, który rodzaj dżemu znajduje się w którym słoiku. Ile słoików dżemu musi zabrać ze sobą Karolina, żeby być pewna, że zabierze tyle słoików, ile chciała?

Wynik: 50

Rozwiązanie: Karolina musi wziąc co najmniej 2 dżemy malinowe, 5 dżemów borówkowych, i po jednym dżemie jeżynowym, żurawinowym i truskawkowym. Pomyślmy, co może się zdarzyć, jeśli jeden z tych warunków nie jest spełniony. Jeśli Karolina nie zabiere 2 dżemów malinowych to w najgorszym przypadku zabierze wszystkie inne dżemy i jeden dżem malinowy. To daje razem $1+15+7+15+9 = 47$ dżemów. Jeśli wzięłaby 48 dżemów, problem by nie wystąpił. Podobnie, problem pojawiłby się, gdyby wzięła 4 dżemy borówkowe i wszystkie dżemy pozostąłych typów – razem $10 + 4 + 7 + 15 + 9 = 45$ dżemów. Żeby temu zapobiec, musi wziąć ze sobą co najmniej 46 dżemów. Jeśli powtórzymy to rozumowanie dla jeżyn, żurawiny i truskawek, wnioskujemy, że Karolina musi wziąć kolejno co najmniej $(10 + 15 + 0 + 15 + 9) + 1 = 50$, $(10 + 15 + 7 + 0 + 9) + 1 = 42$ lub $(10 + 15 + 7 + 15 + 0) + 1 = 48$ dżemów. Łącząc te wnioski, otrzymujemy, że rozwiązaniem jest największa liczba spośród 48, 46, 50, 42, 48. Zatem Karolina musi wziąć ze sobą co najmniej 50 dżemów.

Zadanie 20 . . . Tour de Náboj

Podczas zawodów kolarskich rowerzyści musieli przebyć trasę z podjazdami i zjazdami – jedna trzecia trasy wyścigu prowadziła pod górę, a pozostałe dwie trzecie w dół. Po zawodach statystycy przedstawili wyniki najlepszego zawodnika. Zwycięzca osiągnął średnią prędkość 24 km/h i spędził 3 razy więcej czasu na odcinkach prowadzących pod górę niż na tych prowadzących w dół. Jaka była średnia szybkość zwycięzcy na odcinkach prowadzących w dół, wyrażona w kilometrach na godzinę?

Wynik: 64

Rozwiązanie: Niech s oznacza długość trasy a t będzie czasem, w jakim pokonał ją zwycięzca. Wiemy, że średnia szybkość zwycięzcy wynosiła 24 km/h, więc $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$.

Dwie trzecie długości trasy stanowiły zjazdy, więc długość odcinków prowadzących w dół wynosiła $\frac{2}{3}s$. Ponadto, zwycięzca spędził 3 razy więcej czasu na odcinkach podjazdowych, więc spędził na tych odcinkach $\frac{1}{4}t$. Średnia szybkość zwycięzcy na tych odcinkach wyniosła zatem:

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t}$$

Po podstawieniu $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$ otrzymujemy, że ta średnia szybkość wyniosła:

$$v = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\mathrm{km/h} = 64\,\mathrm{km/h}$$

Zadanie 21 ... Kwadrat magiczny

Kasia bawi się tzw. kwadratem magicznym. Musi tak wypełnić liczbami pola planszy 3×3, żeby suma liczb w każdej kolumnie, każdym rzędzie i obydwu przekątnych była taka sama. Kasia już uzupełniła niektóre z pól. Jaka jest suma liczb, które nie zostały jeszcze wpisane do kwadratu?

17	16	
15		19

Wynik: 95

Rozwiązanie: Spójrzmy na ostatni rząd i drugą kolumnę. Muszą mieć one tę samą sumę, ale mają jedno wspólne pole. Zatem suma pól, które nie są dla nich wspólne również muszą być sobie równe. To oznacza, że suma liczb 15 i 19 jest taka sama jak suma liczb 16 i liczby, którą trzeba wpisać w środkowe pole planszy. Ta suma wynosi $15 + 19 = 34$, czyli liczba wpisana na środku jest równa $34 - 16 = 18$.

17	16	
	18	
15		19

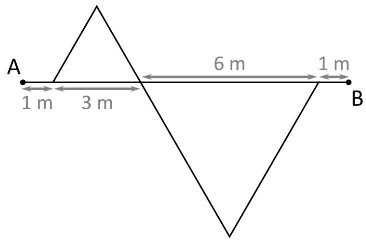
Skoro na jednej z przekątnych zostały wpisane już wszystkie liczby, znamy już sumę pól w każdej kolumnie, każdym rzędzie i na każdej przekątnej – musi być ona równa $17+18+19 = 54$. Teraz łatwo możemy uzupełnić pozostałe pola tabeli:

17	16	21
22	18	14
15	20	19

Na koniec obliczamy sumę wszystkich wpisanych przez nas liczb: wynosi ona $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

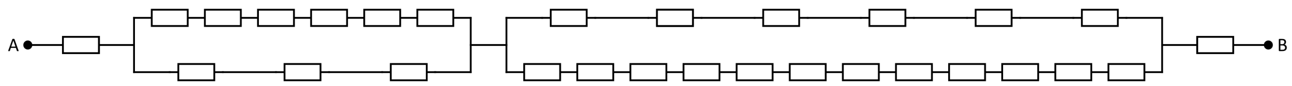
Zadanie 22 ... Zgrzewy

Ania wygięła i złączyła w pewien kształt kawałek drutu o oporze właściwym $0{,}1\,\Omega/\mathrm{m}$. Kształt ten składał się z prostego odcinka o długości 1 m, trójkąta równobocznego o boku 3 m, drugiego trójkąta równobocznego o boku 6 m i kolejnego prostego odcinka o długości 1 m. Kształt przedstawiono na rysunku poniżej. Oblicz opór tego obwodu między punktami A i B w omach.



Wynik: 0,8

Rozwiązanie: Każdy metr drutu możemy zastąpić opornikiem o oporze równym $R_0 = 0{,}1\,\Omega$. Gdy tak zrobimy, uzyskamy następujący schemat:



Możemy teraz wykorzystać klasyczne wzory na całkowity opór oporników połączonych równolegle i szeregowo, żeby obliczyć, że opór między punktami A i B wynosi:

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Zadanie 23 ... Spa

Bożenka nie lubi zimnej wody w basenie, więc chce kupić panele słoneczne. Jej basen ma objętość 150 hl i chciałaby go podgrzać z temperatury 29 °C do 33 °C podczas 10-ciu godzin dobrej, słonecznej pogody. Wie ona ponadto, że 1 m^2 paneli słonecznych przy takiej pogodzie daje moc 1,4 kW. Ilu m^2 paneli słonecznych potrzebuje Bożenka, by podgrzać wodę w basenie do zadanej temperatury w zadanym czasie?

Wynik: 5

Rozwiązanie: Woda o objętości $V = 150\,\mathrm{hl}$ ma masę $m = V\rho_{wody}$. Aby podgrzać ją z temperatury $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ do $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$ trzeba dostarczyć jej ciepła $Q = c_{wody}m(t_2 - t_1) = c_{wody}V\rho_{wody}(t_2 - t_1)$. To ciepło musi być równe energii dostarczonej przez panele słoneczne. Mają one moc $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$ na jednostkę powierzchni, więc jeśli łączna powierzchnia paneli wynosi S, to ich łączna moc wynosi $P = P_0S$. Po czasie $t = 10\,\mathrm{h}$ dostarczą one energię $W = Pt = P_0St$, mamy zatem równości:

$$\begin{aligned} W &= Q \\ P_0St &= c_{wody}V\rho_{wody}(t_2 - t_1) \\ S &= \frac{c_{wody}V\rho_{wody}(t_2 - t_1)}{P_0t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m^2} \end{aligned}$$

Zatem Bożeka potrzebuje 5 m^2 paneli słonecznych.

Zadanie 24 ... Meczyk

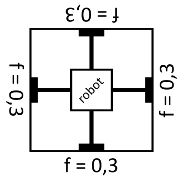
Drużyna fizyków grała w piłkę nożną w rozgrywkach Náboj Cup przeciwko drużynie matematyków. Po pierwszej połowie meczu wynik wynosił 3 : 2 na korzyść fizyków, ale ostatecznie mecz zakończył się wynikiem 4 : 5 dla matematyków. Ile jest różnych możliwych kolejności zdobywania goli przez drużyny?

Wynik: 40

Rozwiązanie: Kolejność zdobywania goli można zapisać jako ciąg liter F i M gdzie F oznacza bramkę zdobytą przez fizyków, a M przez matematyków. Przy takich oznaczeniach widzimy, że jest 10 możliwych kolejności zdobywania goli w pierwszej połowie: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM, FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM, FFFMM. Podobnie mamy 4 możliwe kolejności zdobycia czterech goli, które padły w drugiej połowie: FMMM, MFMM, MMFM, MMMF. Teraz możemy połączyć dowolną kolejność z pierwszej połowy z dowolną kolejnością z drugiej, co daje nam łącznie $10 \cdot 4 = 40$ możliwych kolejności.

Zadanie 25 . . . Stabilny robot

Naukowcy wykopali głęboką dziurę o przekroju kwadratu i teraz chcą ją zbadać. Z tego powodu zawiesili w niej małego robota o wadze 15 kg. Celem zapewnienia stabilności, robot zaczął naciskać na każdą ścianę dziury z siłą F przy użyciu specjalnego ramienia. Naukowcy szybko odkryli, że współczynnik tarcia statycznego pomiędzy ramionami robota a ścianami dziury wynosi 0,3. Widok robota z góry jest widoczny na obrazku. Jaka jest najmniejsza siła nacisku F w niutonach, która zapewni robotowi stabilność?



Wynik: 125

Rozwiązanie: Jeśli robot naciska na ścianę z siłą F to siła tarcia statycznego jest skierowana do góry i wynosi $F_f = fF$, gdzie $f = 0{,}3$ to współczynnik tarcia statycznego. Z kolei ciężar robota wynosi $F_g = mg$ i jest skierowany w dół. Celem zapewnienia stabilności ciężar robota musi być równoważony przez siłę tarcia o każdą z czterech ścian dziury. Mamy zatem równości:

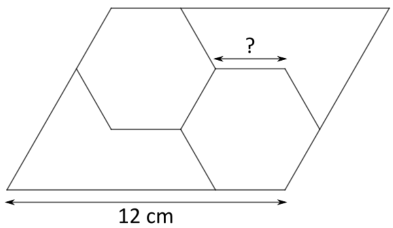
$$F_g = 4F_f$$
$$mg = 4fF$$
$$F = \frac{mg}{4f}$$

W związku z tym, siła F wynosi:

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\mathrm{N}$$

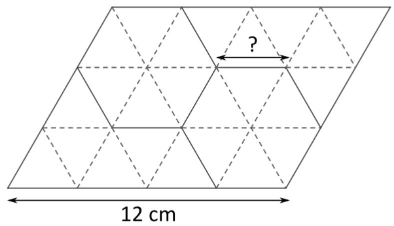
Zadanie 26 . . . Nowe logo

Paula jest w trakcie projektowania nowego loga dla jej sklepu. Zaczęła od narysowania równoległoboku, którego jeden z boków ma długość 12 cm. Zauważyła, że jest w stanie narysować dwa sześciokąty foremne wewnątrz równoległoboku, tak jak zostało to przedstawione na ilustracji. Jaka jest długość boku tych sześciokątów w centymetrach?



Wynik: 3

Rozwiązanie: Każdy sześciokąt może być podzielony na 6 trójkątów równobocznych. To pozwala nam narysować trójkątną siatkę wewnątrz równoległoboku:



Z tego od razu widać, że długość boku sześciokąta (która jest taka sama jak długość boku każdego z trójkątów) wynosi $12\,\text{cm} : 4 = 3\,\text{cm}$.

Zadanie 27 ... Na morza dnie

Pirat Patryk wdał się w bitwę z innym piratem. Jego statek został trafiony przez kulę armatnią i teraz $50\,\text{l}$ wody wpływa do wnętrza statku każdej sekundy. Patryk zaczął obliczać ile czasu pozostało zanim jego statek znajdzie się w całości pod powierzchnią wody. Statek można traktować jak pusty prostopadłościan o wymiarach $10\,\text{m} \times 3\,\text{m} \times 2\,\text{m}$ i o o masie $5\,\text{t}$. Po jakim czasie, w sekundach, statek zniknie pod powierzchnią wody?

Wynik: 1100

Rozwiązanie: Statek zanurzy się całkowicie w momencie gdy siła grawitacji zostanie zrównoważona przez siłę wyporu. Maksymalna siła wyporu, która może działać na statek o objętości V to $F_{wyporu} = V\rho_{wody}g$. Siłę ciężkości można podzielić na ciężar samego statku i ciężar wody, która do niego wpłynęła. Ciężar statku o masie m wynosi $F_{g_1} = mg$. Woda wpływa do statku ze stałą prędkością Q, więc po czasie t objętość wody w statku będzie wynosiła $V' = Qt$. Ciężar wody po czasie t wynosi zatem $F_{g_2} = Qt\rho_{wody}g$. Warunek na całkowite zanurzenie to $F_{wyporu} = F_{g_1} + F_{g_2}$, co pozwala nam znaleźć wzór na t:

$$V\rho_{wody}g = mg + Qt\rho_{wody}g$$
$$t = \frac{V\rho_{wody} - m}{Q\rho_{wody}}$$

Statek zatonie więc po czasie:

$$t = \frac{V\rho_{wody} - m}{Q\rho_{wody}} = \frac{(10\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m}) \cdot 1000\,\text{kg/m}^3 - 5000\,\text{kg}}{0{,}05\,\text{m}^3/\text{s} \cdot 1000\,\text{kg/m}^3} = 1100\,\text{s}$$

Zadanie 28 ... Suma roczników

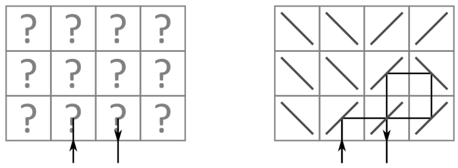
Paweł i Gaweł policzyli sumę liczb odpowiadającym latom, w których żyli. Okazało się, że Gaweł otrzymał wynik o 19945 większy niż Paweł. W którym roku urodził się Gaweł?

Wynik: 1990

Rozwiązanie: Obaj chłopcy dodali do siebie liczby od roku w którym się urodzili aż do 2023. Gaweł otrzymał wiekszy wynik, więc dodał do siebie pewne liczby, których nie dodał Paweł. Ponieważ każdy składnik sumy wynosi około 2000, liczba składników które zostały dodane przez tylko przez Gawła to $19945 : 2000 \doteq 10$. Oznacza to, że liczby dodane tylko przez Gawła to x, $x + 1$, ..., $x + 9$, gdzie x to rok urodzenia Gawła. Ich suma to $10x + 45$. Otrzymujemy równanie $10x + 45 = 19945$ z którego wyliczamy, że Gaweł urodził się w roku $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

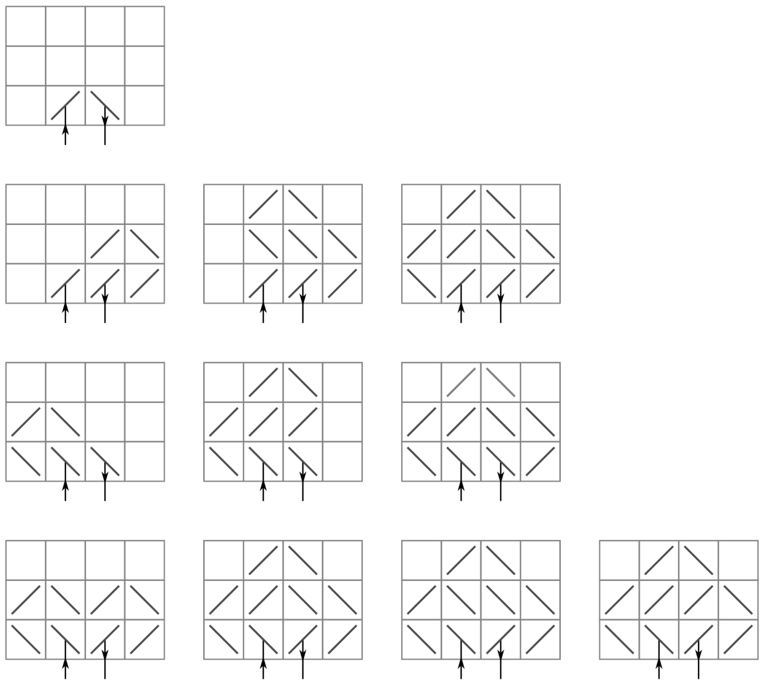
Zadanie 29 ... Powrót gry optycznej

Marcel znowu zaciekawił się grą optyczną. Składa się ona z planszy 3×4 (patrz lewy rysunek). Marcel musi postawić dwustronne lustro w każdym kwadracie ze znakiem zapytania, tak aby kąt między lustrem i bokami planszy wynosił 45°. Później Marcel emituje laserem promień, który następnie opuszcza planszę tak jak zaznaczono na lewym rysunku. Przykładowa sytuacja, dla której mogło się tak stać, jest pokazana na prawym rysunku. Marcel ma teraz inne pytanie niż poprzednio: ile różnych trajektorii (wliczając tę z rysunku z prawej) mógł przebyć promień lasera, jeśli zaczął i skończył tak jak zaznaczono?



Wynik: 11

Rozwiązanie: Sprawdzamy możliwości grupując je po ustawieniu pierwszego i ostatniego lustra. Możliwe kombinacje są przedstawione w wierszach poniższego rysunku (dla przejrzystości, lustra, od których promień lasera się nie odbił nie zostały narysowane):



Tak więc widzimy $1 + 3 + 3 + 4 = 11$ możliwych trajektorii promienia lasera.

Zadanie 30 ... Zrównoważony czworokąt

Andrzej narysował prostokąt $ABCD$ spełniający $AB : BC = 9 : 8$. Zaznaczył punkty E i F na odcinkach BC, CD, odpowiednio, tak że $CE = BE$ oraz $DF = 2 \cdot FC$. W ten sposób skontruował czworokąt $ABEF$. Poprosił następnie Jacka o obliczenie obwodu czworokąta $ABEF$ w centymetrach oraz Janka o obliczenie pola czworokąta $ABEF$ w centymetrach kwadratowych. Okazało się, że obaj chłopcy dostali w wyniku równe liczby. Wyznacz obwód prostokąta $ABCD$ w centymetrach. Wynik wyraź jako ułamek nieskracalny.

Wynik: $\frac{68}{3}$

Rozwiązanie: Zapiszmy długości boków prostokąta $ABCD$ jako $AB = 9x$ i $BC = 8x$ dla pewnego x, wyrażonego w centymetrach.

Obliczmy najpierw obwód czworokąta $ABEF$. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ECF mają długości $4x$ i $3x$. Tak więc z twierdzenia Pitagorasa $EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. Podobnie, przyprostokątne w trójkącie

FDA mają długości $6x$ i $8x$, czyli $FA = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Wobec tego, obwód czworokąta $ABEF$ wynosi $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Policzmy teraz pole czworokąta $ABEF$. Trójkąty prostokątne ECF oraz FDA mają pola $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ i $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. Pole prostokąta $ABCD$ wynosi $(9x) \cdot (8x) = 72x^2$, czyli pole czworokąta $ABEF$ jest równe $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$. Wiemy że wartości długości obwodu i pola czworokąta $ABEF$ są równe, co oznacza że:

$$\frac{28x}{\mathrm{cm}} = \frac{42x^2}{\mathrm{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\mathrm{cm} = \frac{2}{3}\mathrm{cm}$$

Pozostaje obliczyć obwód prostokąta $ABCD$, czyli $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}\mathrm{cm} = \frac{68}{3}\mathrm{cm}$.

Zadanie 31 ... Pracowita dżdżownica

Jendorodna dżdżownica o masie 3 g i długości 30 cm chce wspiąć się na znajdującą się w ogrodzie kostkę o boku długości 10 cm. Dżdżownica wespnie się tak, jak przedstawiono to na rysunku. Jaką pracę w mJ wykona dżdżownica?

Uwaga: W obliczeniach możesz pominąć tarcie między ciałem dżdżownicy a kostką.

Wynik: 2

Rozwiązanie: Praca wykonana przez dżdżownicę będzie równa maksymalnej energii potencjalnej, jaką będzie miała dżdżownica podczas wspinaczki (zakładamy, że początkowo energia potencjalna będzie wynosić 0). Nietrudno zauważyć, że maksymalna energia zostanie osiągnięta dokładnie wtedy, gdy dżownica ustawi się tak jak na rysunku dołączonym do zadania (im więcej ciała dżdżownicy znajduje się wyżej, tym wyższa jest jej energia potencjalna).
Podzielmy dżdżownicę na 3 części (bez obaw, dżdżownicę potrafią się regenerować) – dwie cześci pionowe i jedną część poziomą, jak na rysunku z zadania. Wszystkie te części mają długość 10 cm – jedną trzecią długości ciała dżdżownicy. Dżdżownica jest jednorodna, więc każdy z fragmentów będzie miał masę $m_0 = 3\,\mathrm{g} : 3 = 1\,\mathrm{g}$. Fragment poziomy ma swój środek masy w punkcie o wysokości $h_2 = 10\,\mathrm{cm}$, więc energia potencjalna tej części wyniesie $E_2 = m_0 g h_2 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}001\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{mJ}$. Pionowe fragmenty mają swój środek masy na wysokości $h_1 = h_3 = 5\,\mathrm{cm}$, więc ich energie potencjalne to $E_1 = E_3 = m_0 g h_1 = m_0 g h_3 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 0{,}0005\,\mathrm{J} = 0{,}5\,\mathrm{mJ}$.
Zatem maksymalna energia potencjalna dżdżownicy wyniesie $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\mathrm{mJ} + 1\,\mathrm{mJ} + 0{,}5\,\mathrm{mJ} = 2\,\mathrm{mJ}$ i taką pracę będzie musiała wykonać dżdżownica.

Zadanie 32 ... Hasło

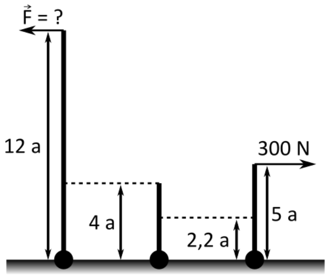
Teresa trzyma wszystkie swoje wartościowe przedmioty w skrytce chronionej pięcioliterowym hasłem. Niestety nie używa menedżera haseł i zupełnie zapomniała jak brzmiało hasło do jej skrytki. Pamięta jednak, że pierwsze dwie litery hasła to NA, a hasło korzystało tylko z 26-literowego alfabetu angielskiego. Żeby otworzyć skrytkę, Teresa wypróbowuje wszystkie możliwe kombinacje pozostałych liter w porządku alfabetycznym (AAA, AAB, AAC, ...). Ile prób musi podjąć, jeśli jej hasło brzmiało NABOJ?

Wynik: 1050

Rozwiązanie: Możemy podzielić problem na mniejsze, łatwiejsze części. Zastanówmy się najpierw, ile prób potrzebujemy, żeby dojść do kombinacji ABA? Skoro alfabet ma 26 liter, będziemy potrzebowali zmienić ostatni znak 26 razy. A co z BAA? Po każdych 26 próbach przedostatnia litera zmienia się na kolejną w alfabecie. Zatem, żeby przejść z AAA do BAA, potrzebujemy $26 \cdot 26 = 676$ prób. Żeby przejść z BAA do BOA, będziemy potrzebować $26 \cdot 14 = 364$ prób, bo O jest piętnastą literą alfabetu, i będziemy musieli wypróbować wcześniej 14 poprzedzających liter. W końcu, skoro J jest dziesiątą literą alfabetu, będziemy potrzebowali jeszcze dziesięciu prób, żeby przejść z BOA do BOJ. Razem będziemy potrzebowali $676 + 364 + 10 = 1050$ prób.

Zadanie 33 ... Patryk pociąga za sznurki

Patryk zdobył trzy dźwignie, których długości wynosiły kolejno $12a$, $4a$, $5a$. Połączył je poziomo rozwieszonymi sznurkami tak jak na rysunku. Zaczął ciągnąć prawą dźwignię z siłą 300 N. Z jaką siłą w niutonach musi pociągnąć za lewą dźwignię, żeby mechanizm pozostał w stanie spoczynku?



Wynik: 125

Rozwiązanie:
Mechanizm jest w stanie spoczynku tylko jeśli działające na niego momenty sił znoszą się. Musimy zatem spojrzeć na momenty sił działające na dźwignie. Na każdy sznurek będzie działać pewne naprężenie, zatem sznurek będzie działał na każdą dźwignię z taką samą siłą równą temu naprężeniu. Przykładowo: sznurek łączący środkową i prawą dźwignię będzie działać z taką samą siłą na środkową dźwignię (w prawo) jak na prawą dźwignię (w lewo). Ponadto, sznurki są przywiązane do obydwu dźwigni w tej samej odległości od osi obrotu, więc momenty siły, które będą działać na obu sznurka końcach będą takie same.
Zatem, jeśli układ ma pozostać w stanie równowagi, dwie siły, z którymi Patryk działa na dźwignie muszą skutkować tym samym momentem siły. To prowadzi do równania:

$$F \cdot (12a) = 300\,\mathrm{N} \cdot (5a)$$
$$F = \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}$$

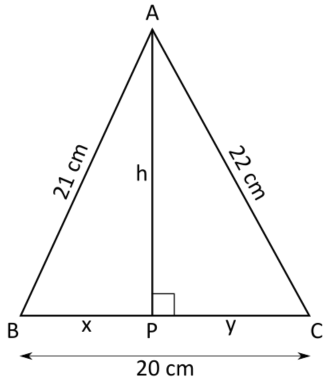
Patryk musi zatem działać na lewą dźwignię z siłą: 125 N.

Zadanie 34 ... Wielki trójkąt

Kacper narysował na tablicy trójkąt o bokach długości 20 cm, 21 cm i 22 cm. Następnie dorysował wysokość opuszczoną na bok długości 20 cm. Podzieliła ona bok, na który została opuszczona, na dwie części. Jaka jest dodatnia różnica długości tych dwóch odcinków w centymetrach?

Wynik: 2,15

Rozwiązanie: Niech długości odcinków i nazwy punktów będą takie, jak na rysunku.



Rozważmy trójkąty prostokątne ABP i ACP, i napiszmy dla nich wypowiedź twierdzenia Pitagorasa.

$$h^2 + x^2 = (21\,\text{cm})^2$$
$$h^2 + y^2 = (22\,\text{cm})^2$$

Jeśli wyznaczymy h^2 z poprzednich równań i przyrównamy do siebie prawe strony, otrzymamy:

$$(21\,\text{cm})^2 - x^2 = (22\,\text{cm})^2 - y^2$$
$$y^2 - x^2 = (22\,\text{cm})^2 - (21\,\text{cm})^2$$

Możemy teraz wykorzystać wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i otrzymać:

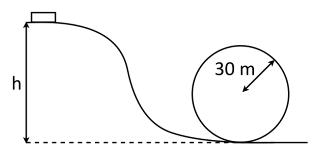
$$(y-x)(y+x) = (1\,\text{cm})(43\,\text{cm}) = 43\,\text{cm}^2$$

Ale wiemy, że $y + x = 20\,\text{cm}$. Zatem różnica długości $y - x$, którą musimy wyznaczyć, wynosi:

$$y - x = \frac{43\,\text{cm}^2}{x+y} = \frac{43\,\text{cm}^2}{20\,\text{cm}} = \frac{43}{20}\,\text{cm} = 2{,}15\,\text{cm}$$

Zadanie 35 ... Wesoła kolejka informacji

Mateusz przeczytał książkę, w której znalazł następującą informację: Jeśli samochód o masie m porusza się z prędkością v wzdłuż zakrętu będącego częścią okręgu o promieniu r, musi występować siła dośrodkowa o sile $F_c = \frac{mv^2}{r}$ działająca na samochód.
Następnie Mateusz wybrał się do wesołego miasteczka, gdzie zafascynowała go jedna z kolejek. Przez pewien odcinek wagoniki swobodnie zjeżdżają z wysokości h, a następnie wykonują pętlę o promieniu 30 m, jak widać na rysunku. Jaka jest minimalna wysokość h w metrach taka, by wagoniki nie spadły z pętli?



Wynik: 75

Rozwiązanie: Niech m to masa wagonika, $r = 30\,\text{m}$ promień pętli, a v szybkość wagonika w najwyższym punkcie pętli.
Z pierwszej części zadania wiemy, że w najwyższym punkcie pętli działa siła dośrodkowa $F_c = \frac{mv^2}{r}$. Są dwie siły, które działają w tym kierunku - siła grawitacji $F_g = mg$ i pewna siła wynikająca z jazdy po łuku w pętli. Chcemy by ta siła dośrodkowa była jak najmniejsza (czym jest ona większa, tym większa musi być szybkość

wagonika, a co za tym idzie i początkowa wysokość). Ponieważ nie możemy pozbyć się siły grawitacji, w przypadku granicznym zachodzi $F_c = F_g$. Z tego wynika

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$
$$\frac{v^2}{r} = g$$
$$v^2 = rg$$

Z początku wagonik ma jedynie energię potencjalną grawitacji $E_1 = mgh$. W najwyższym punkcie pętli ma zarówno energię potencjalną jak i kinetyczną. Znajduje się wtedy na wysokości $2r$ i porusza się z szybkością v, więc jego energia w tym punkcie to $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. Z zasady zachowania enegrii wynika że $E_1 = E_2$. Korzystając z równania na v^2 zachodzi:

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$
$$gh = 2gr + \frac{1}{2}rg$$
$$h = \frac{5}{2}r$$

Stąd minimalna wysokość to $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{m}$.

Zadanie 36 ... Kółko i krzyżyk

W turnieju gry w kółko i krzyżyk wzięło udział 24 graczy. W turnieju każdy gracz mógł zagrać przeciwko każdemu innemu graczowi, ale w każdej chwili odbywał się co najwyżej jeden mecz. W pewnym momencie podczas trwania turnieju Dora zauważyła, że nie ma takiej grupy graczy, w której każdy członek zagrał już co najmniej dwa mecze z innymi członkami tej grupy. Jaka jest maksymalna liczba rozegranych do tego momentu pojedynków?

Wynik: 23

Rozwiązanie:
Rozwiązanie naturalnie rozdziela się na dwie części: w pierwszej z nich pokażemy, że gracze mogli rozegrać 23 mecze, w drugiej – że jeśli gracze rozegraliby 24 mecze, istniałaby grupa spełniająca warunki z treści zadania.
Część pierwsza: ponumerujmy graczy liczbami 1, 2, . . . , 24. Niech mecze rozegrają się pomiędzy graczami nr 1 i 2, 2 i 3, . . . , 23 i 24. Wybierzmy dowolną grupę graczy. Znajdzmy w niej gracza o najmniejszym numerze, niech ten numer to P. W tej grupie gracz z numerem P mógł podtencjalnie zagrać jedynie z graczem nr $P + 1$, bo gracz z numerem $P - 1$ nie mógł znaleźć się w grupie (miałby niższy numer niż gracz nr P). Zatem gracz nr P nie zagrał z co najmniej dwoma innymi graczami ze wskazanej grupy. To rozumowanie działa dla każdej możliwej grupy, więc nie ma grupy spełniającej warunki zadania. Zatem gracze mogli rozegrać 23 mecze.
Część druga: Musimy udowodnić, że jeśli rozegrano 24 mecze, zawsze znajdzie się grupa graczy, która spełnia własność z zadania. Jeśli jakaś para graczy rozegrałaby ze sobą dwa mecze, moglibyśmy wybrać tą pare jako szukaną grupę. Zatem możemy założyć, że taka para nie istnieje.
Załóżmy, że każdy gracz rozegrał co najmniej 2 mecze. Wybierzmy graczy w następujący sposób: zacznijmy od dowolnego gracza, nazwijmy go P_0. Zagrał on z innym graczem, powiedzmy P_1. Gracz P_1 zagrał z co najmniej 2 różnymi graczami, więc zagrał z pewnym graczem P_2, który nie jest graczem P_0. Podobnie, P_2 zagrał z pewnym graczem P_3, który nie jest graczem P_1. W ten sposób znajdujemy kolejnych graczy. W pewnym momencie dojdziemy do gracza, którego już rozważaliśmy. Mamy wtedy pewną grupę graczy $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_n$ o własności, że każdy gracz P_i zagrał z graczami P_{i-1} i P_{i+1} z tego ciągu, a gracze P_k i P_n również rozegrali mecz. Możemy zatem rozmieścić tych graczy na okręgu w ten sposób, że każdy gracz rozegrał mecz z dwoma graczami położonymi obok niego na okręgu. To oznacza, że znaleziona grupa spełnia warunki zadania.

Pozostaje nam rozważyć przypadek, w którym pewien gracz zagrał mniej niż 2 mecze. Jeśli to prawda, możemy zignorować tego gracza. Wtedy będziemy mieli do rozważenia mniej graczy, ale liczba rozegranych przez nich meczy będzie ciągle niemniejsza od liczby graczy. Gdy zignorujemy jednego z graczy, albo okaże się, że każdy z pozostałych graczy rozegrał co najmniej dwa mecze, albo istnieje gracz, który rozegrał mniej niż dwa mecze. W pierwszym przypadku poprzednie rozumowanie udowadnia, że szukana grupa istnieje. W przeciwnym wypadku możemy zignorować kolejnego gracza. Postępując tak dalej, albo znajdziemy szukaną grupę, albo pozostanie jedynie 3 graczy, którzy rozegrali między sobą co najmniej trzy mecze. To jest możliwe tylko wtedy, gdy każdy gracz grał z każdym, a to oznacza, że ci trzej gracze tworzą grupę, która spełnia warunki zadania.
To dowodzi, że jeśli rozegranoby 24 mecze, Dora znalazłaby szukaną grupę.
Łącząc dwie części rozwiązania wnioskujemy, że maksymalna liczba rozegranych meczy wynosi 23.

Zadanie 37 ... Pośpieszne mnożenie

Lucyna jest ciekawa, jaki jest iloczyn kolejnych nieparzystych dodatnich liczb od 1 do 31. Innymi słowy, ile wynosi liczba $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Wyciągnęła swój kalkulator i zaczęła mnożyć liczby w pośpiechu. Teraz wydaje jej się, że pominęła jedną z liczb. Cyfra setek w wyniku na kalkulatorze wyniosła 4. Jaką liczbę pominęła Lucyna?

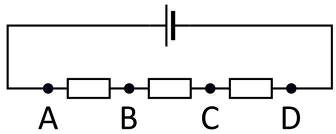
Wynik: 25

Rozwiązanie: Najpierw musimy poznać zasadę podzielności przez 125. Liczba jest podzielna przez 125 jeśli liczba złożona z jej ostatnich trzech cyfr jest podzielna przez 125 (jest to podobne kryterium do podzielności przez 2, 4, 8, 16 ..., ale dla 5, 25, 125 ...). Dlaczego? Zapiszmy dowolną liczbę jako $1000A + B$, gdzie $B < 1000$. W takim razie B jest liczbą uformowaną z ostatnich trzech cyfr. Zauważmy, że 1000 jest podzielne przez 125, ponieważ $1000 = 8 \cdot 125$. Zatem, by liczba $1000A + B$ była podzielna przez 125, B musi być podzielne przez 125. To dowodzi kryterium podzielności przez 125.
Teraz zastanówmy się, jakie ma to konsekwencje. Jedyne liczby składające się z co najwyżej 3 cyfr podzielne przez 125 to 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750, oraz 875. Żadna z nich nie zaczyna się cyfrą 4. Oznacza to, że wielokrotności 125 nie mogą mieć liczby setek równej 4.
Powróćmy do oryginalnego problemu. Wiemy, że liczba setek wynosi 4, więc wynik Lucyny nie może być wielokrotnością 125. Jeśli nie ominęłaby żadnej liczby, ostateczny wynik byłby podzielny przez $5 \cdot 15 \cdot 25$. Zatem rozkład na czynniki pierwsze iloczynu zawierałby liczbę 5 cztery razy. To oznacza, że musimy usunąć 5 co najmniej dwa razy. Jest to możliwe tylko przy pominięciu liczby 25. Zatem Lucyna musiała pominąć liczbę 25.

Zadanie 38 ... Napięcie końcowe

Ulubiony obwód elektryczny Marcina znajduje się na obrazku poniżej. Marcin wybrał punkty A, B, C, i D na obwodzie, zmierzył napięcię pomiędzy każdą parą z wybranych punktów i zapisał wszystkie sześć wyników na kartce papieru. Po jakimś czasie, znalazł tę kartkę, ale jedna z wartośći była nieczytelna. Pozostałe sześć wartości było ustawionych w pewnym porządku 7 V, 8 V, 10 V, 15 V i 18 V. Z rozważań Marcina wynika, że są dwie możliwe wartości dla szóstej wartości. Jaka jest suma tych dwóch możliwych wartości napięcia, podana w woltach?

Uwaga: Opory poszczególnych rezystorów nie muszą być takie same.



Wynik: 28

Rozwiązanie:

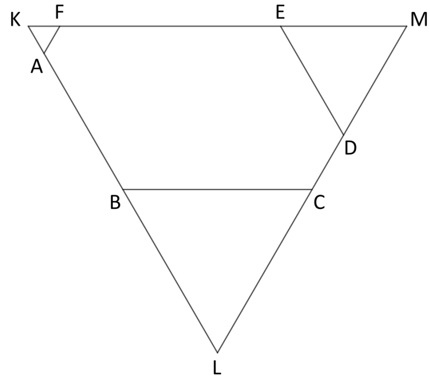
Napięcie pomiędzy dwoma punktami opisuje wartość różnicy potencjałów w tych punktach. Potencjał opisuje jedynie (elektryczną) energię potencjalną cząstki o ładunku 1 C. W każdym z punktów A, B, C i D, ta cząstka miałaby pewną energię potencjalną więc każdemu z punktów możemy przypisać pewną wartość liczbową. Napięcia w takim spojrzeniu wyrażają jedynie różnice pomiędzy poszczególnymi wartościami.
Możemy przeformułować ten problem do zadania matematycznego, gdzie mamy przypisać cztery wartości liczbowe do A, B, C i D (zauważmy, że teraz te litery nie mają nic wspólnego z punktami na obwodzie), tak by różnice pomiędzy nimi wynosiły 7, 8, 10, 15, 18 i pewna nieznana, szukana wartość. Zauważmy pewną zależność. Rozważmy dowolną uporządkowanej trójkę X, Y i Z, $X > Y > Z$. Różnica $X - Z$ jest sumą różnic $X - Y$ oraz $Y - Z$ (bo oczywiście $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Zatem dla dowolnej trójki liczb, gdy rozważymy różnice pomiędzy nimi, któraś z różnic będzie sumą pozostałych dwóch.
Możemy teraz wrócić do rozwiązania zagadki. Niech nieznana różnica będzie tą pomiędzy C i D. Weźmy liczby A, B i C. Wszystkie różnice pomiędzy nimi są znane. Ponieważ jedna z nich musi być sumą dwóch pozostałych istnieją jedynie dwie możliwości: $7+8 = 15$ lub $8+10 = 18$. Analogiczna zależność musi zachodzić dla trójki A, B i D. Stąd jedna z tych trójek będzie miała różnice 7, 8 a 15 druga będzie miała różnice 8, 10 i 18. Niech trójka A, B i C będzie miała (w pewnej kolejności) różnice 7, 8 i 15. Trójki A, B, C i A, B, D mają wspólną różnicę jedynie pomiędzy A i B, stąd ta wspólna różnica musi wynosić 8.
Bez straty ogólności liczby A i B mogą być zamienione, możemy założyć więc że róznica pomiędzy A i C wynosi 15, a różnica pomiędzy B i C wynosi 7. W trójce A, B i C wiemy, że jedna z liczb A i C jest największa, a jedna najmniejsza (różnica pomiędzy nimi jest największa). Niech A będzie największa. Mamy teraz dwa możliwe przypadki, ile mogą wynosić różnice pomiędzy liczbą D, a liczbami A i B.
Przypadek 1: Różnica pomiędzy A i D wynosi 18. To znaczy, że w trójce A, B i D jedna z liczb A i D jest największa, a jedna najmniejsza. Wybraliśmy jednak, że w trójce A, B i C, liczba A jest największa, więc A jest większa od B. Stąd w trójce A, B, D wiemy, że A musi być największa. Mamy więc, że A jest o 15 większa niż C i o 18 większa niż D. Więc różnica pomiędzy C i D wynosi $(A-15)-(A-18) = 3$. To wartość pierwszego rozwiązania.
Przypadek 2: Różnica pomiędzy A i D wynosi 10. To znaczy, że w trójce A, B i D jedna z liczb B i D jest największa, a jedna najmniejsza. Analogicznie do poprzedniego przypadku wiemy, że A jest większa od B, więc B jest najmniejsza. Stąd wiemy, że C jest o 7 mniejsze od B i, że D jest o 18 większe od B. To znaczy, że róznica pomiędzy C i D wynosi $(B + 18) - (B - 7) = 25$. To wartość drugiego rozwiązania.
Podsumowując, nieznana różnica może wynosić 3 lub 25. To przekłada się na fakt, że w oryginalnym problemie, wartość nieznanego napięcia może wynosić jedynie 3 V or 25 V. Stąd, suma dwóch możliwych wartości napięcia wynosi $3\,\mathrm{V} + 25\,\mathrm{V} = 28\,\mathrm{V}$.

Zadanie 39 ... Sześciokątny plac zabaw

W centrum miasta znajduje się plac zabaw o kształcie wypukłego sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają miarę 120°. Długości boków tego sześciokąta wynoszą kolejno 10 m, 12 m, 4 m, 8 m, 14 m, 2 m. Wiadomo, że pole powierzchni placu może być zapisane jako $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Oblicz wartość a.

Wynik: 91

Rozwiązanie: Zanim zaczniemy, zastanówmy się nad polem powierzchni trójkąta równobocznego o boku długości x. Używając twierdzenia Pitagorasa, łatwo policzyć, że wysokość takiego trójkąta to $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Zatem pole powierzchni trójkąta równobocznego wynosi $\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Powróćmy do oryginalnego zadania. Oznaczmy wierzchołki sześciokąta przez A, B, C, D, E, F, tak by $AB = 10\,\mathrm{m}$, $BC = 12\,\mathrm{m}$, $CD = 4\,\mathrm{m}$, $DE = 8\,\mathrm{m}$, $EF = 14\,\mathrm{m}$, $FA = 2\,\mathrm{m}$. Przedłużmy te odcinki, tak by przecięły się otrzymując trójkąt KLM taki jak na ilustracji:



Ponieważ wszystkie kąty wewnętrzne sześciokąta $ABCDEF$ mają miarę 120°, trójkąty KAF, LBC oraz MDE są równoboczne. To oznacza, że trójkąt KLM jest równoboczny o boku długości 24 m.
Pole powierzchni sześciokąta $ABCDEF$ jest równe różnicy pola trójkąta równobocznego KLM oraz sumy pól trójkątów KAF, LBC oraz MDE. W takim razie możemy wyliczyć pole sześciokąta $ABCDEF$:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right) = (12^2 - 1^2 - 6^2 - 4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2 = 91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

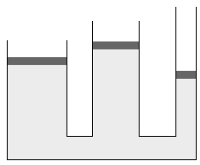
Zatem a jest równe 91.

Zadanie 40 ... Chomik doświadczalny

Miłosz zbudował w domu układ hydrauliczny. System ten składa się z trzech tłoków i wygląda tak, jak na rysunku poniżej. Miłosz wie, że pole powierzchni pierwszego tłoku jest równe sumie pól powierzchni dwóch pozostałych tłoków. Miłosz ma również chomika, na którym przeprowadził kilka eksperymentów.

Gdy położy chomika na pierwszym tłoku, tłok ten obniża się o 15 mm.
Gdy położy chomika na drugim tłoku, tłok ten obniża się o 30 mm.

O ile milimetrów obniży się trzeci tłok, gdy Miłosz położy na nim chomika?



Wynik: 75

Rozwiązanie:
Oznaczmy pole pierwszego tłoka przez S_1, pole drugiego tłoka – przez S_2 a pole trzeciego tłoka – przez S_3. Warunki zadania mówią nam, że $S_1 = S_2 + S_3$.
Niech m oznacza masę chomika, a $\Delta h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ oznacza wysokość, o którą obniżył się pierwszy tłok po położeniu na nim chomika. Załóżmy, że w tym samym czasie tłok drugi podwyższył się o Δh_2m a trzeci tłok – o Δh_3. Gdy Miłosz położył chomika na pierwszym tłoku, musiały zadziać się dwie rzeczy. Po pierwsze, woda znajdująca się pod pierwszym tłokiem musiała zostać wypchnięta pod pozostałe dwa tłoki. To oznacza, że $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2 + S_3\Delta h_3$. Po drugie, ciśnienie wywierane na wszystkie tłoki musiało być takie same. Jeśli p oznacza początkowe ciśnienie wywierane na tłoki, a ρ oznacza gęstość wody, możemy zapisać ten warunek jako: $p + \frac{mg}{S_1} - \Delta h_1\rho g = p + \Delta h_2\rho g = p + \Delta h_3\rho g$ Możemy odjąć p od wszystkich części tej równości i podzielić je przez g, żeby otrzymać $\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$. Druga część tego równania mówi nam, że $\Delta h_2 = \Delta h_3$. Po połączeniu tego faktu z poprzednimi równaniami otrzymujemy:

$$S_1\Delta h_1 = (S_2 + S_3)\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho$$

Innymi słowy:

$$\frac{S_1}{S_2+S_3}\Delta h_1 = \Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \Delta h_2$$

Po porównaniu tych dwóch równań otrzymujemy:

$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \frac{S_1}{S_2+S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_2+S_3}\Delta h_1$$

Przedefiniujmy teraz Δh_2 jako wysokość, o którą obniżył się drugi tłok po położeniu na nim chomika. W analogiczny sposób definiujemy na nowo Δh_3. Metoda przedstawiona powyżej pozwala nam wyprowadzić trzy równania:

$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_2+S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_2\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_1+S_3}\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_3\rho} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S_1+S_2}\Delta h_3$$

Jeśli podzielimy stronami dwa pierwsze równania i skorzystamy z tego, że $S_1 = S_2 + S_3$, otrzymamy:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2S_1 - S_2}{S_1}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}$$
$$S_2 = (2S_1 - S_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2S_1 - S_2)\frac{15\,\mathrm{mm}}{30\,\mathrm{mm}} = \frac{2S_1 - S_2}{2}$$
$$3S_2 = 2S_1$$
$$S_2 = \frac{2}{3}S_1$$

Z $S_1 = S_2 + S_3$ wynika, że $S_3 = S_1 - S_2 = S_1 - \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_1$. Dzieląc stronami drugie i trzecie równanie z tej samej listy równań otrzymujemy:

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_1+S_2}{S_2+S_3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\frac{\frac{1}{3}S_1}{S_1} = \frac{S_1+\frac{2}{3}S_1}{\frac{2}{3}S_1+\frac{1}{3}S_1}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{5}{3}\cdot\frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}$$
$$\Delta h_3 = 5\Delta h_1 = 5\cdot 15\,\mathrm{mm} = 75\,\mathrm{mm}$$

Zatem położenie chomika na trzecim tłoku obniży ten tłok o 75 mm.

Zadanie 41 ... Specyficzna ulubiona liczba

Mateusz ma swoją ulubioną liczbę. Lubi ją, ponieważ jest ona najmniejszą liczbą całkowitą większą niż 1, która spełnia następującą własność: Jeśli Mateusz przemnoży sumę cyfr tej liczby przez tę samą sumę, otrzyma iloczyn cyfr tej liczby. Jaka jest wartość ulubionej liczby Mateusza?

Wynik: 999

Rozwiązanie: Ulubiona liczba Mateusza nie może być liczbą jednocyfrową. Jeśli byłały cyfrą a, własność z treści mówiłaby, że $a^2 = a$, co jest prawdą tylko dla $a = 0$ lub $a = 1$. Wiemy jednak, że szukana liczba jest większa niż 1.
Ulubiona liczba Mateusza nie może także być dwucyfrowa. Jeśli byłaby równa $10a + b$ dla pewnych cyfr a oraz b, otrzymalibysmy $(a + b)^2 = ab$, albo innymi słowy $a^2 + ab + b^2 = 0$. Jednak skoro b jest nieujemne oraz a jest dodatnie, musi zachodzić $a^2 + ab + b^2 > 0$, więc nie możemy otrzymać $a^2 + ab + b^2 = 0$.
Teraz pokażemy, że 999 jest jedyną trzycyfrową liczbą spełniającą warunek zadania. Łatwo sprawdzić, że faktycznie 999 spełnia żądaną własność $((9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9)$.
Niech $100a + 10b + c$ będzie liczbą o zadanej własności, co oznacza, że $(a + b + c)^2 = abc$. a, b i c są cyframi, więc $0 \leq a, b, c \leq 9$. Jeśli co najmniej jedna z liczb a, b lub c jest równa 0, to łatwo zauważyć, że wszystkie pozostałe też muszą być równe 0. Możemy więc założyć, że $1 \leq a, b, c$. Dodatkowo, zależność $(a+b+c)^2 = abc$ jest symetryczna względem wartości a, b, c, więc możemy założyć, że $a \leq b \leq c$ (w taki sposób zawsze wyprodukujemy najmniejsze możliwe rozwiązanie dla dowolnej trójki cyfr spełniającej warunek). W takim razie:

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$$

Przyjrzyjmy się warunkowi $(a + b + c)^2 = abc$. Możemy rozpisać go jako $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc$. Skoro $c \leq 9$, wiemy że $abc \leq 9ab$. Z drugiej strony, używając $a \leq b \leq c$, dostajemy:

$$c^2 \geq ab$$
$$ac \geq ab$$
$$bc \geq ab$$

Oraz $(a - b)^2 \geq 0$, więc $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Łącząc ze sobą te nierówności, dostajemy:

$$9ab \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc \leq 9ab$$

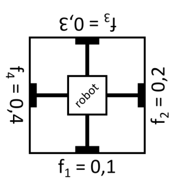
Ponieważ lewa i prawa strona tej nierówności są równe, we wszystkich użytych nierównościach, musi zachodzić równość.

- W nierówności $abc \leq 9ab$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 9$.
- W nierówności $ac \geq ab$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $b = c$.
- W nierówności $bc \geq ab$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$.

Te obserwacje prowadzą do konkluzji, że jedyny możliwy scenariusz to $a = b = c = 9$. Sprawdziliśmy już, że istotnie jest to dozwolone rozwiązanie. W takim razie, 999 jest jedyną trzycyfrową liczbą spełniającą warunek zadania. Zatem jest to najmniejsza liczba większa od 1 z zadaną własnością, co oznacza, że ulubiona liczba Mateusza to 999.

Zadanie 42 ... Drugi stabilny robot

Naukowcy postanowili zbadać kolejną głęboką dziurę o przekroju kwadratu. Ponownie umieścili w niej małego robota o masie 15 kg, który przy użyciu specjalnych ramion zaczął naciskać na każdą z czterech ścian dziury z siłą F. Tym razem okazało się jednak, że współczynniki tarcia statycznego między ramionami robota i kolejnymi ścianami wynoszą odpowiednio 0,1, 0,2, 0,3 i 0,4. Na poniższym rysunku ukazany jest widok robota z góry. Jaka jest najmniejsza siła nacisku F w niutonach, która zapewni robotowi stabilne oparcie?



Wynik: 250

Rozwiązanie: Rozumujemy podobnie jak w zadaniu 25. Niemniej tym razem musimy się zastanowić, jaki wpływ na układ mają różne współczynniki tarcia. Rozważmy najpierw ramiona, dla których współczynniki tarcia wynoszą $f_1 = 0{,}1$ oraz $f_3 = 0{,}3$. Największa możliwa siła tarcia statycznego dana jest przez wzór fF, czyli $F_f \leq fF$. Mamy zatem dwie siły tarcia spełniające nierówności $F_{f_1} \leq f_1 F$ oraz $F_{f_3} \leq f_3 F$. Gdyby te dwie siły były różne, to powstałby moment siły działający wokół osi łączącej pozostałe dwa ramiona, co z kolei spowodowałoby niestabilność. Wobec tego musi być $F_{f_1} = F_{f_3}$, co w połączeniu z nierównością $f_1 \leq f_3$ daje $F_{f_1} = F_{f_3} = f_1 F$. Podobnie dla $f_2 = 0{,}2$ oraz $f_4 = 0{,}4$ dostajemy równości $F_{f_2} = F_{f_4} = f_2 F$. Siła grawitacji $F_g = mg$ musi zostać zrównoważona, skąd mamy równanie:

$$
\begin{aligned}
F_g &= F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} + F_{f_4} \\
mg &= f_1 F + f_2 F + f_1 F + f_2 F \\
mg &= 2(f_1 + f_2) F \\
F &= \frac{mg}{2(f_1 + f_2)}
\end{aligned}
$$

To oznacza, że robot naciska z siłą:

$$
F = \frac{mg}{2(f_1 + f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}
$$

Podziękowania

Przewodniczący komisji zadaniowej

Marián Poturnay

Propozycje zadań

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Zadania i rozwiązania

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Korekty

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Tłumaczenia

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Koordynatorzy

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Miasta zawodów

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť