Vzorové riešenia

11. ročník Náboja Junior

24. novembra 2023

Trojsten

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského v Bratislave

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh súťaže Náboj Junior 2023. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nie len na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 24. novembra 2023 prebehol 11. ročník Náboja Junior. Na Slovensku sa tento rok zúčastnilo súťaže skoro 500 tímov. Náboj Junior prebehol v 54 mestách na Slovensku, v Česku a v Poľsku. Súčasne sa súťaž konala v online verzii v Španielsku, Holandsku, Belgicku a Chorvátsku.

V slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškolákmi, ktorí venujú svoj čas a energiu, aby umožnili mladším žiakom z regiónu zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti. Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškolákov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave a Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a zvýšenie záujmu o prírodné vedy.

Tešíme sa na Vás budúci rok,

o. z. Trojsten

Úloha 1 . . . Zbieranie kamienkov

Alica a Boris zbierajú kamienky na pláži. Keď mala Alica o 49 kamienkov viac ako Boris, rozhodla sa, že Borisovi nejaké dá. Dala mu teda 11 zo svojich kamienkov. O koľko viac kamienkov ako Boris má Alica teraz?

Výsledok: 27

Riešenie: Keď Alica dala Borisovi jedenásť z jej kamienkov, prišla o 11 kamienkov a Boris získal 11 kamienkov. Takže rozdiel počtov kamienkov, ktoré majú, sa musel znížiť o $11 + 11 = 22$. Teda, Alica má o $49 - 22 = 27$ viac kamienkov ako Boris.

Úloha 2 . . . Taxikárka

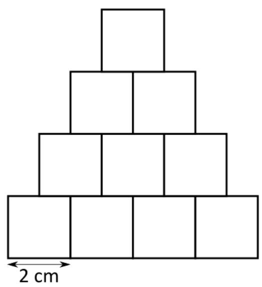
Tete je profesionálna taxikárka. Zistila, že počas prvých troch mesiacov roku 2023 prešla 10 800 kilometrov a že počas tohto obdobia v skutočnosti vôbec neopustila svoje auto. Akú priemernú rýchlosť mala Tete počas tohto obdobia v km/h?

Výsledok: 5

Riešenie: Prvé tri mesiace roku 2023 mali postupne 31, 28 a 31 dní. Dokopy teda trvali $31 + 28 + 31 = 90$ dní, čo je $90 \cdot 24 = 2160$ hodín. Tete teda prešla 10800 kilometrov za 2160 hodín. Jej priemerná rýchlosť preto bola $\frac{10\,800\,\mathrm{km}}{2160\,\mathrm{h}} = 5\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 3 . . . Krabice

Lauru fascinujú krabice v jej miestnosti. Rozhodla sa preto, že si ich nakreslí. Jej kresbu môžete vidieť na obrázku. Každý štvorec na obrázku má stranu dlhú 2 cm. Aká je celková dĺžka všetkých úsečiek na Laurinej kresbe v centimetroch?



Výsledok: 56

Riešenie: Aby nakreslila spodné štyri štvorce, Laura musí nakresliť 13 úsečiek. Aby pridala ďalšie tri štvorce nad nimi, potrebuje nakresliť ďalších 7 úsečiek. Aby pridala dva štvorce v ďalšom poschodí, nakreslí ďalších 5 úsečiek. Nakoniec, aby nakreslila vrchný štvorec, Laura potrebuje nakresliť 3 úsečky. Dokopy teda nakreslí $13+7+5+3 = 28$ úsečiek. Každá z nich má dĺžku 2 cm, teda celková dĺžka všetkých úsečiek je $28 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 56\,\mathrm{cm}$.

Úloha 4 . . . Americký problém

Miška bola na výlete v USA. Rýchlo prišla na to, že tam používajú iné jednotky ako u nás. Kúpila si plechovku koly s objemom 12 oz. Etiketa na tejto plechovke tvrdí, že jedna plechovka koly obsahuje 150 kilokalórií. Koľko kilokalórií by Miška prijala vypitím 100 ml americkej koly?

Poznámka: Premeny niektorých jednotiek si môžete dohľadať vo vzorcovníku.

Výsledok: 45

Riešenie: Dohľadaním si premien vo vzorcovníku zistíme, že 36 oz je 1 l. Teda objem plechovky koly v litroch je $\frac{12\,\mathrm{oz}}{36\,\mathrm{oz/l}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{l}$. To znamená, že v jednom litri koly je $3 \cdot 150 = 450$ kilokalórií, a teda v 100 ml koly je $450 : 10 = 45$ kilokalórií.

Úloha 5 ... Truhla plná pokladov

Anton a jeho pirátska posádka objavili truhlu plnú mincí. Rozhodli sa, že si mince všetci rozdelia rovnomerne. Ukázalo sa, že ak by v truhle bolo o 48 mincí menej, každý by dostal o 6 mincí menej. S koľkými členmi posádky (okrem Antona) si Anton delil mince?

Výsledok: 7

Riešenie: Ak by v truhle bolo o 48 mincí menej, každý pirát by dostal o 6 mincí menej ako má teraz. Teda, dokopy musí byť $48 : 6 = 8$ pirátov. Keďže otázka znie, s koľkými členmi posádky si Anton delil mince, správna odpoveď je $8 - 1 = 7$.

Úloha 6 ... Behanie dookola

Andrej a Žofka chodia každý deň na 18 minútový tréning (bez akýchkoľvek prestávok). Andrej behá po kruhovej dráhe s polomerom 70 metrov a Žofka behá po kruhovej dráhe s polomerom 35 metrov. Prebehnúť jedno celé koliečko trvá Andrejovi 3 minúty a Žofke 2 minúty. Pred behaním odmerali dĺžku jedného ich kroku a zistili, že ich 1 krok sa rovná 100 centimetrom. Koľko krokov spravia dohromady počas ich tréningu? Výsledok zaokrúhlite na desiatky.

Poznámka: Môžete počítať s tým, že $\pi = \frac{22}{7}$.

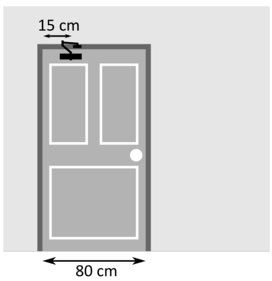
Výsledok: 4620

Riešenie: Za 18 minút prebehne Andrej $18 : 3 = 6$ koliečok. Každé z jeho koliečok má dĺžku $2\pi \cdot 70\,\mathrm{m} = 140\pi\,\mathrm{m}$. Teda dokopy prejde vzdialenosť $6 \cdot 140\pi\,\mathrm{m} = 840\pi\,\mathrm{m}$. Keďže jeho krok má dĺžku práve jeden meter, urobí teda 840π krokov. Podobne, Žofka odbehne $18 : 2 = 9$ koliečok, z ktorých jedno má dĺžku $2\pi \cdot 35\,\mathrm{m} = 70\pi\,\mathrm{m}$. Prejde teda $9 \cdot 70\pi\,\mathrm{m} = 630\pi\,\mathrm{m}$ čo znamená, že spraví 630π krokov. Spolu teda urobia $840\pi + 630\pi = 1470\pi$ krokov. Ak počítame s tým, že $\pi = \frac{22}{7}$ dostávame, že spravili $1470 \cdot \frac{22}{7} = 4620$ krokov.

Poznámka: Ak by sme použili $\pi = 3{,}14$, dostali by sme výsledok 4615,8, ktorý má po zaokrúhlení na desiatky rovnakú hodnotu ako pôvodný výsledok.

Úloha 7 ... Zatváranie dverí

Alexa fascinuje zatvárač dverí. Je to mechanizmus, ktorý sa automaticky snaží zatvoriť dvere, keď sú otvorené. Alex má dvere široké 80 cm, pričom zatvárač dverí sa nachádza 15 cm od pántov, a pôsobí na dvere silou 48 N. Aká minimálna sila v Newtonoch je potrebná na otvorenie dverí?



Výsledok: 9

Riešenie: Aby sme otvorili dvere minimálnou silou, musíme dosiahnuť rovnováhu momentov síl. Zatvárač dverí pôsobí momentom sily M rovným sile od neho krát jeho vzdialenosti od pántov, teda $M = 48\,\mathrm{N} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 720\,\mathrm{N\,cm}$. Použitím tej istej rovnice dostaneme silu F potrebnú na otvorenie dverí vo vzdialenosti $a = 80\,\mathrm{cm}$ ako:

$$F = \frac{M}{a} = \frac{720\,\mathrm{N\,cm}}{80\,\mathrm{cm}} = 9\,\mathrm{N}$$

Úloha 8 ... Omotanie Zeme

Eva si kúpila veľmi dlhé lano, pomocou ktorého by mohla omotať Zem okolo rovníka. Adam sa však rozhodol, že si kúpi ešte dlhšie lano, ktoré by omotal okolo rovníka Zeme vo výške 1 m nad jej povrchom. O koľko viac metrov lana bude potrebovať Adam oproti Eve? Svoju odpoveď zaokrúhlite na 2 desatinné miesta.

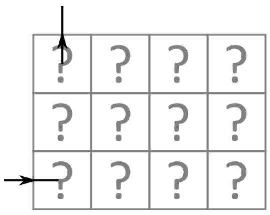
Poznámka: Predpokladajte, že Zem je dokonalá guľa.

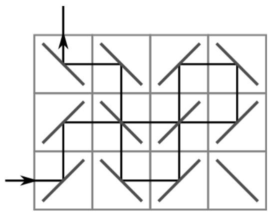
Výsledok: 6,28

Riešenie: Ak predpokladáme, že Zem je dokonalá guľa, lano omotané okolo jej rovníka vytýči kružnicu. Ak si označíme polomer tejto kružnice r, Evine lano bude merať $2\pi r$. Adam chce však vytýčiť kružnicu s polomerom $r + 1\,\mathrm{m}$. Preto Adamove lano musí merať $2\pi(r + 1\,\mathrm{m})$. Rozdiel medzi dĺžkami Adamovho a Evinho lana teda bude $2\pi(r + 1\,\mathrm{m}) - 2\pi r = 2\pi\,\mathrm{m} \doteq 6{,}28\,\mathrm{m}$.

Úloha 9 ... Optická hračka

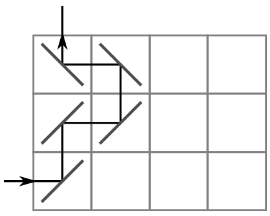
Marcel má optickú hračku. Tá je tvorená tabuľkou 3×4 ako na obrázku vľavo. Marcel musí na každé políčko s otáznikom položiť obojstranné zrkadlo tak, že zrkadlo bude so stranami tabuľke zvierať uhol 45°. Potom Marcel zasvieti laserom a vyšle svetelný lúč, ktorý z hračky vyjde tak, ako je naznačené na obrázku. Jedna z možných situácií, ktoré mohli nastať, je nakreslená na obrázku vpravo. Koľko najmenej krát sa mohol svetelný lúč odraziť, ak do hračky vošiel a aj z nej vyšiel tak ako na obrázku?





Výsledok: 5

Riešenie: Zakaždým, keď svetelný lúč narazí na zrkadlo, zmení svoj smer o 90° buď doprava, alebo doľava (v závislosti od orientácie zrkadla). Ľahko nájdeme rozostavenie zrkadiel, kde nastane iba 5 odrazov (je jedno, ako sú orientované zrkadlá v prázdnych políčkach):



Na druhej strane je vidno, že lúč nemohol ísť po najkratšej možnej ceste - idúcej cez 3 políčka (vo viacerých políčkach by totiž nezmenil svoj smer). Navyše sa dá všimnúť, že počet odrazov musí byť nepárny - po každom nepárnom odraze ide lúč zvislo a po každom párnom odraze vodorovne.
Takže počet odrazov musí byť nepárne číslo väčšie ako 3, čo znamená, že 5 je skutočne najmenší možný počet odrazov.

Úloha 10 ... Drsná úloha

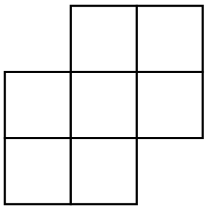
Tomáš vymyslel novú skupinu čísel, ktorú nazval „drsné čísla". Kladné celé číslo nazve drsným práve vtedy, keď sú všetky jeho cifry rovnaké. Koľko existuje drsných čísel väčších ako desať a menších ako milión?

Výsledok: 45

Riešenie: Ak použijeme iba cifru 1, dostaneme v danom intervale 5 drsných čísel, konkrétne 11, 111, 1111, 11111 a 111111. Podobne dostaneme 5 drsných čísel pre každú z cifier od 2 do 9, pričom nedostaneme žiadne drsné čísla pre cifru 0. Teda existuje $9 \cdot 5 = 45$ drsných čísel väčších ako desať a menších ako milión.

Úloha 11 . . . Stará tabuľa

Danko našiel v pivnici starú tabuľu, ktorá je nakreslená na obrázku. Danko teraz musí napísať čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6 do štvorčekov tabule tak, aby každý štvorček obsahoval práve jedno číslo a každé číslo bolo použité práve raz. Navyše musí docieliť, že súčet čísel v každom stĺpci je rovnaký. Danko postupne napísal čísla do štvorčekov všetkými možnými spôsobmi a zakaždým vypočítal súčin čísel v strednom stĺpci. Koľko rôznych súčinov môže Danko dostať?



Výsledok: 1

Riešenie: Súčet všetkých čísel, ktoré píšeme na tabuľu je $0+1+2+3+4+5+6 = 21$. To znamená, že súčet čísel v každom zo stĺpcov bude $21 : 3 = 7$. To znamená, že číslo 0 nemôže byť v prvom ani poslednom stĺpci, pretože by sme potrebovali použiť číslo 7, ktoré však nemáme k dispozícii. Teda číslo 0 bude použité v strednom stĺpci, čo spôsobí, že súčin čísel v strednom stĺpci bude vždy 0. Preto môže Danko dostať iba 1 možný súčin, konkrétne číslo 0.

Úloha 12 . . . Čas sa okúpať

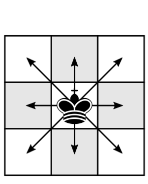
Peter má vaňu s objemom 150 l. Vie ju napúšťať z vodovodného kohútika s prietokom 0,2 l/s. Ak však nie je zablokovaný odtok, voda zároveň odteká s prietokom 0,05 l/s. Peter nechal vaňu naplniť sa z kohútika, zabudol však zazátkovať odtok. O koľko viac sekúnd bude trvať takéto naplnenie vane oproti tomu, keby odtok nezabudol zazátkovať?

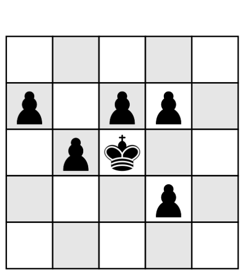
Výsledok: 250

Riešenie: Ak by Peter nebol zabudol zazátkovať odtok, vaňa by sa naplnila za $150\,\mathrm{l} : 0{,}2\,\mathrm{l/s} = 750\,\mathrm{s}$. Ale Peter zabudol zazátkovať odtok, čo znížilo prítok vody na $0{,}2\,\mathrm{l/s} - 0{,}05\,\mathrm{l/s} = 0{,}15\,\mathrm{l/s}$. Vaňa sa takto naplní za $150\,\mathrm{l} : 0{,}15\,\mathrm{l/s} = 1000\,\mathrm{s}$, teda jej napĺňanie bude trvať o $1000\,\mathrm{s} - 750\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ dlhšie.

Úloha 13 . . . Šach

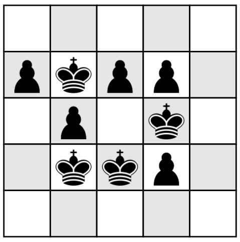
Jonáš sa hrá so šachovými figúrkami. Práve teraz konkrétne s kráľom. Kráľ sa môže pohnúť na ktorékoľvek z ôsmich políčok susediacich hranou alebo vrcholom, ktoré však nemôžu byť obsadené inou šachovou figúrkou. Jonáš rozostavil figúrky tak, ako vidno na pravom obrázku. Na koľkých rôznych políčkach môže kráľ skončiť po tom, ako sa pohne presne dvakrát?



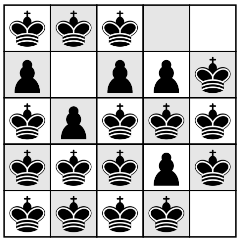


Výsledok: 16

Riešenie: Po prvom svojom pohybe, môže kráľ skončiť na ktoromkoľvek z týchto políčok:



Otázkou teraz je, na koľko rôznych políčok môže kráľ dojsť ďalším ťahom z ktoréhokoľvek z políčok ukázaných na predošlom obrázku. Ľahko nájdeme, že ďalším pohybom môže kráľ skončiť na ktoromkoľvek z týchto 16 políčok:



Úloha 14 . . . Rozpoltený štvoruholník

Sebo sa nudil na hodine matematiky, a tak si nakreslil štvoruholník s obvodom 49 cm. Potom sa rozhodol ho rozstrihnúť na 2 trojuholníky pozdĺž jednej jeho uhlopriečky. Zistil, že súčet obvodov nových trojuholníkov je 77 cm. Aká je dĺžka uhlopriečky, pozdĺž ktorej Sebo strihal štvoruholník, v centimetroch?

Výsledok: 14

Riešenie: Dva nové trojuholníky majú niektoré strany rovnaké ako strany pôvodného štvoruholníka a tiež majú jednu stranu dlhú ako spomínaná uhlopriečka. To znamená, že nový súčet obvodov sa rovná pôvodnému obvodu zväčšenému o dvojnásobok dĺžky uhlopriečky. Keďže sa obvod zväčšil o $77\,\mathrm{cm} - 49\,\mathrm{cm} = 28\,\mathrm{cm}$, musí mať uvažovaná uhlopriečka dĺžku $28\,\mathrm{cm} : 2 = 14\,\mathrm{cm}$.

Úloha 15 . . . Vyhoď a zdrhni

Serena jazdí na skateboarde rýchlosťou 9 km/h. Rozhodla sa, že vyhodí loptičku presne nad seba, a to takou rýchlosťou, že loptička dopadne na zem o 4 sekundy. Okamžite po vyhodení však Serena zrýchlila na rýchlosť 18 km/h. Aká je vzdialenosť v metroch medzi Sereniným skateboardom a loptičkou v momente, keď loptička dopadne na zem?

Poznámka: Predpokladajte, že odpor vzduch je zanedbateľný.

Výsledok: 10

Riešenie: Vodorovná zložka rýchlosti loptičky po vyhodení bude $9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. V tom momente Serena zrýchli na rýchlosť $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$. Takže relatívna rýchlosť medzi Serenou a loptičkou bude $5\,\mathrm{m/s} - 2{,}5\,\mathrm{m/s} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Po 4 sekundách, po ktorých loptička dopadne na zem, bude preto vzdialenosť medzi Serenou a loptičkou $2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$.

Úloha 16 . . . Bude párty!

Alica, Barbora, Cecília a Danica išli na párty. Každá z nich prišla v inom čase. Keď už boli na párty všetky, každá z dievčat vyslovila nepravdivú vetu:

Alica povedala: „Prišla som ako druhá.“
Barbora povedala: „Prišla som pred Alicou.“
Cecília povedala: „Prišla som po Alici.“
Danica povedala: „Prišla som ako prvá.“

Aké bolo skutočné poradie, v ktorom dievčatá prišli?

Pri odovzdávaní odpovede nahraď meno každého dievčaťa prvým písmenom tohto mena. Napríklad ak by bola odpoveď Alica, Barbora, Cecília, Danica, tak odovzdaj ABCD.

Výsledok: CDAB

Riešenie: Najprv určíme, koľká v poradí prišla Alica. Keďže všetky tvrdenia sú nepravdivé, tak Alica nemohla prísť ako druhá. Barbora prišla po Alici a Cecília zas pred Alicou. To znamená, že aspoň jedno dievča prišlo pred a aspoň jedno dievča po tom, ako prišla Alica. Takže Alica nemohla prísť ani prvá a ani posledná. Zostáva teda iba možnosť, že Alica prišla ako tretia.
Barbora prišla po Alici, takže musela prísť posledná. Danica neprišla ako prvá, takže jej zostáva už len druhé miesto, keďže tretie a posledné miesto sú už obsadené. Napokon umiestnime Cecíliu na prvé miesto, na posledné zostávajúce miesto, a zjavne je jej tvrdenie skutočne nepravdivé.
Poradie, v ktorom prišli dievčatá, je teda Cecília, Danica, Alica a Barbora (CDAB).

Úloha 17 . . . Brnenské šaliny

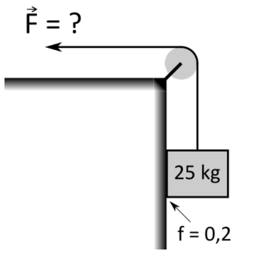
Kubko jedného dňa jazdil po Brne električkou s číslom 12. Všimol si, že keď ňou jazdil, tak oproti sebe stretával električku 12 priemerne každé dve minúty. Prišlo mu to nespravodlivé, lebo električka 5, ktorou chodí do školy, obsluhuje zastávku každých šesť minút, no električka 12 jazdí až takto často. O koľko viac električiek s číslom 12 obslúži zastávku za hodinu v porovnaní s električkou s číslom 5?

Výsledok: 5

Riešenie: Poďme spočítať interval električky 12. Keď ňou Kubko jazdí, jeho relatívna rýchlosť vzhľadom na oproti idúce električky je dvojnásobná oproti skutočnej rýchlosti električiek. Takže pozoruje, že električky prekonajú konštantnú vzdialenosť medzi po sebe idúcimi električkami dvakrát rýchlejšie. Preto je interval obsluhovania zastávky električkou 12 dvakrát taký dlhý ako interval, v akom Kubko pozoruje električky v opačnom smere. Električka 12 tak obsluhuje zastávku raz za každé $2 \cdot 2 = 4$ minúty. Za hodinu teda obslúži zastávku $60 : 4 = 15$ električiek s číslom 12.
Podobne, $60 : 6 = 10$ električiek s číslom 5 obslúži zastávku za hodinu. Za hodinu tak obslúži zastávku o $15 - 10 = 5$ viac električiek s číslom 12 ako električiek s číslom 5.

Úloha 18 . . . Šikula

Staviteľ Bob by chcel dostať krabicu na vyššie poschodie budovy. Zobral si preto kladku a vytvoril mechanizmus ako na obrázku. Teraz dumá. Krabica váži 25 kg a súčiniteľ šmykového trenia medzi krabicou a stenou je 0,2. Akou najmenšou silou v Newtonoch musí Bob ťahať za lano, aby zdvihol krabicu?



Výsledok: 250

Riešenie: Potrebujeme si rozmyslieť, ako bude trenie pôsobiť na krabicu. Trecia sila pôsobí iba na objekty, ktoré na seba pôsobia nejakou tlakovou silou. Lenže v našom prípade krabica netlačí na zvislú stenu. Na krabicu preto nebude pôsobiť žiadna trecia sila. To znamená, že jediná sila (okrem tej od Boba), ktorá bude pôsobiť na krabicu, je tiažová sila $F_G = mg$, kde $m = 25\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť krabice. Bob musí za lano ťahať rovnako veľkou silou, čiže musí ťahať silou s veľkosťou $F = mg = 25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 250\,\mathrm{N}$.

Úloha 19 ... Lesné plody

Kaja organizuje degustáciu jej džemov. V komore má 10 malinových, 15 čučoriedkových, 7 černicových, 15 brusnicových a 9 jahodových džemov. Chce zobrať džemy z komory tak, aby zobrala aspoň jeden džem z každého druhu. Navyše vie, že jej kamaráti majú radi maliny a čučoriedky, a preto by chcela zobrať aspoň 2 malinové džemy a aspoň 5 čučoriedkových džemov. Lenže v komore je tma, a tak Kaja nevie určiť, ktorý džem je aký. Koľko najmenej džemov musí Kaja zobrať z komory, aby si bola istá, že zobrala dostatok džemov na to, aby boli splnené všetky jej požiadavky?

Výsledok: 50

Riešenie: Kajine požiadavky sú, aby zobrala aspoň 2 malinové džemy, 5 čučoriedkových džemov, 1 černicový, 1 brusnicový a 1 jahodový džem. Rozmyslime si, čo by sa malo stať, aby niektorá z týchto podmienok nebola splnená. Najhoršia vec, ktorá sa mohla stať, aby Kala nemala aspoň 2 malinové džemy, je, že zobrala džemy všetkých ostatných príchutí a 1 malinový. Spolu $1 + 15 + 7 + 15 + 9 = 47$ džemov. Ale ak by vzala aspoň 48 džemov, tento problém by nenastal. Podobne by bol problém vziať 4 čučoriedkové džemy a všetky džemy ostatných príchutí - spolu $10 + 4 + 7 + 15 + 9 = 45$ džemov. Takže Kaja potrebuje vziať aspoň 46 džemov. Opakovaním rovnakej myšlienky pre černice, brusnice a jahody zistíme, že žiadny problém nenastane, ak Kaja vezme postupne aspoň $(10 + 15 + 0 + 15 + 9) + 1 = 50$, $(10 + 15 + 7 + 0 + 9) + 1 = 42$ alebo $(10 + 15 + 7 + 15 + 0) + 1 = 48$ džemov. Skombinovaním všetkého zistíme, že podmienky budú splnené, ak bude počet vzatých džemov najväčšie z čísel 48, 46, 50, 42, 48. Preto musí Kaja zobrať aspoň 50 džemov.

Úloha 20 ... Tour de Náboj

Počas cyklistických pretekov bola pre cyklistov pripravená trasa, ktorá obsahovala iba stúpavé a klesavé úseky - jednu tretinu dĺžky závodu tvorili stúpavé úseky a zvyšné dve tretiny boli tvorené klesavými úsekmi. Po súťaži štatistici vypočítali štatistiky víťaza. Zistili, že víťaz dosiahol priemernú rýchlosť $24\,\mathrm{km/h}$ a že v stúpavých úsekoch strávil 3-krát viac času ako v klesavých úsekoch. Aká bola priemerná rýchlosť víťaza v klesavých úsekoch v kilometroch za hodinu?

Výsledok: 64

Riešenie: Označme s dĺžku závodu a t čas víťaza v cieli. Vieme, že priemerná rýchlosť víťaza bola $24\,\mathrm{km/h}$, takže $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$.
Dve tretiny dĺžky závodu boli tvorené klesavými úsekmi, čiže dĺžka klesavých úsekov je $\frac{2}{3}s$. Navyše, víťaz strávil 3-krát viac času v stúpavých úsekoch, čiže v klesavých úsekoch strávil čas $\frac{1}{4}t$. Priemerná rýchlosť víťaza v klesavých úsekoch je potom:

$$v = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{4}t} = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t}$$

Dosadením $\frac{s}{t} = 24\,\mathrm{km/h}$ zisťujeme, že priemerná rýchlosť víťaza v klesavých úsekoch je:

$$v = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{t} = \frac{8}{3} \cdot 24\,\mathrm{km/h} = 64\,\mathrm{km/h}$$

Úloha 21 . . . Magický štvorec

Katka sa hrá s takzvaným magickým štvorcom. Do políčok tabuľky 3×3 má napísať čísla tak, aby boli rovnaké súčty čísel v každom riadku, každom stĺpci a na oboch diagonálach. Katka už do tabuľky napísala niekoľko čísel. Aký bude súčet piatich čísel, ktoré ešte nie sú napísané v magickom štvorci?

17	16	
15		19

Výsledok: 95

Riešenie: Pozrime sa na posledný riadok a na druhý stĺpec. Majú mať rovnaký súčet čísel, ale zároveň majú jedno políčko spoločné. To znamená, že aj čísla, ktoré nemajú spoločné, musia mať rovnaký súčet. Preto musí byť súčet čísel 15 a 19 rovnaký ako súčet čísla 16 a čísla v prostrednom políčku. Tento súčet je $15 + 19 = 34$, takže v prostrednom políčku musí byť číslo $34 - 16 = 18$.

17	16	
	18	
15		19

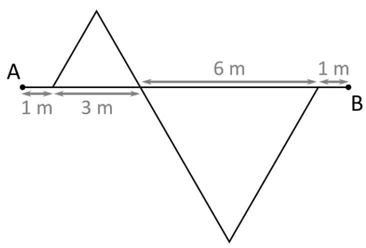
Teraz už máme všetky čísla na jednej z diagonál. Preto musí byť súčet čísel v každom riadku, každom stĺpci a na oboch diagonálach rovný $17 + 18 + 19 = 54$. S touto vedomosťou je jednoduché doplniť celú tabuľku.

17	16	21
22	18	14
15	20	19

Napokon spočítame, že súčet čísel, ktoré neboli napísané v tabuľke, je $21 + 22 + 18 + 14 + 20 = 95$.

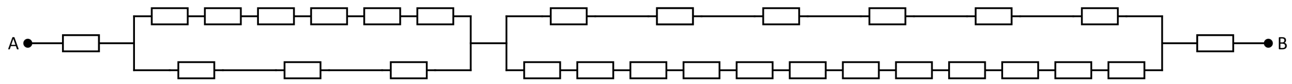
Úloha 22 . . . Zvarená

Aďka poohýbala a zvarila kus drôtu s dĺžkovým odporom $0{,}1\,\Omega/\mathrm{m}$ na útvar špecifického tvaru. Ten sa skladá z drôtu s dĺžkou 1 m, rovnostranného trojuholníka so dĺžkou strany 3 m, rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany 6 m a drôtu s dĺžkou 1 m. Aďkin tvar je nakreslený na obrázku. Vypočítajte odpor tohto útvaru medzi bodmi A a B v Ohmoch.



Výsledok: 0,8

Riešenie: Každý 1 m drôtu vieme nahradiť rezistorom s odporom $R_0 = 0{,}1\,\Omega$. Keď toto spravíme, dostaneme nasledujúci diagram:



Teraz vieme použiť klasické vzťahy pre výpočet odporu rezistorov zapojených sériovo, resp. paralelene. Tým vypočítame, že odpor medzi bodmi A a B je

$$R = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{3R_0}} + \frac{1}{\frac{1}{6R_0} + \frac{1}{12R_0}} + R_0 = 8R_0 = 8 \cdot 0{,}1\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Úloha 23 ... Solárny kúpeľ

Anička nemá rada, keď má v bazéne studenú vodu, a tak si kúpila solárne panely, aby ju zohrievali. Aničkin bazén má objem 150 hl a chcela by zohriať vodu v ňom z 29 °C na 33 °C za 10 hodín konštantného slnečného svitu. Vie, že v tomto slnečnom svite dosiahne pomocou 1 m^2 solárnych panelov výkon 1,4 kW. Koľko metrov štvorcových solárnych panelov si musí Anička kúpiť, aby zohriali vodu na požadovanú teplotu za daný čas?

Výsledok: 5

Riešenie: Voda s objemom $V = 150\,\mathrm{hl}$ má hmotnosť $m = V\rho_{voda}$. Aby sme ju zohriali z teploty $t_1 = 29\,°\mathrm{C}$ na teplotu $t_2 = 33\,°\mathrm{C}$, musíme jej dodať teplo $Q = c_{voda}m(t_2 - t_1) = c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)$. Toto teplo musí zodpovedať práci vykonanej solárnymi panelmi. Tie majú na každý meter štvorcový výkon $P_0 = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$, takže ak majú solárne panely povrch S, tak dosahujú výkon $P = P_0S$. Po čase $t = 10\,\mathrm{h}$ vykonajú prácu $W = Pt = P_0St$. Táto práca sa vykoná na vode, takže musí platiť:

$$\begin{aligned} W &= Q \\ P_0St &= c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1) \\ S &= \frac{c_{voda}V\rho_{voda}(t_2 - t_1)}{P_0t} = \frac{4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)} \cdot 15\,\mathrm{m^3} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (33\,°\mathrm{C} - 29\,°\mathrm{C})}{1400\,\mathrm{W/m^2} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m^2} \end{aligned}$$

Anička preto potrebuje 5 m^2 solárnych panelov.

Úloha 24 ... Futbalové derby

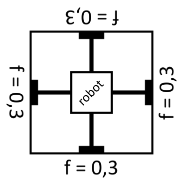
Tím fyzikov hral futbalový zápas v Náboj Cupe proti tímu matematikov. Po polčase bol výsledok 3 : 2 v prospech fyzikov, no zápas skončil 4 : 5 v prospech matematikov. Koľko je rôznych poradí, v ktorých mohli tímy skórovať svoje góly?

Výsledok: 40

Riešenie: Poradia, v ktorých padli góly, označujme reťazcom pozostávajúcom z písmen F a M, kde F zodpovedá gólu fyzikov a M gólu matematikov. V tomto značení máme týchto 10 možných poradí, v ktorých mohli padnúť góly v prvom polčase: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM, FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM, FFFMM. Rovnakým spôsobom zistíme, že zostávajúce 4 góly v druhom polčase, mohli padnúť v 4 možných poradiach: FMMM, MFMM, MMFM, MMMF. Prvý a druhý polčas sú od seba nezávislé, takže ľubovoľné poradie gólov v prvom polčase môžeme skombinovať s ľubovoľným poradím gólov v druhom polčase. Preto je celkový počet poradí, v ktorých mohli padnúť góly, rovný $10 \cdot 4 = 40$.

Úloha 25 ... Stabilný robot

Vedci chcú preskúmať hlbokú jamu, ktorú vykopali. Jej prierezom je štvorec. Na tento účel spustili do jamy malého robota s hmotnosťou 15 kg. Aby sa robot zastabilizoval, robot začal tlačiť ramenom do každej steny jamy. Každé rameno tlačilo silou F. Vedci rýchlo zistili, že súčinitele šmykového trenia medzi ramenami a všetkými stenami jamy sú 0,3. Nakreslili teda nákres robota a jamy pri pohľade zhora, ktorý vidíš na obrázku. Aká je minimálna sila F v Newtonoch, ktorou musí robot pôsobiť, aby zostal v pokoji?



Výsledok: 125

Riešenie: Keď robot tlačí silou F do každej zo stien, tak trecie sily na každej stene sú $F_t = fF$, kde $f = 0{,}3$ je súčiniteľ šmykového trenia, a smerujú nahor. Na druhej strane, na robota pôsobí tiažová sila $F_G = mg$ pôsobiaca smerom nadol. Aby bol robot v pokoji, musí mať táto tiažová sila rovnakú veľkosť ako súčet všetkých štyroch trecích síl. Preto musí platiť:

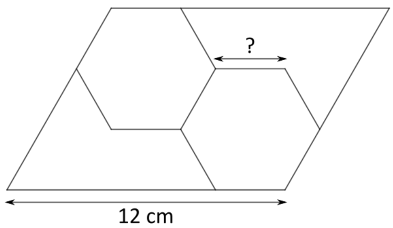
$$F_G = 4F_t$$
$$mg = 4fF$$
$$F = \frac{mg}{4f}$$

Takže sila F musí mať veľkosť:

$$F = \frac{mg}{4f} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{4 \cdot 0{,}3} = 125\,\mathrm{N}$$

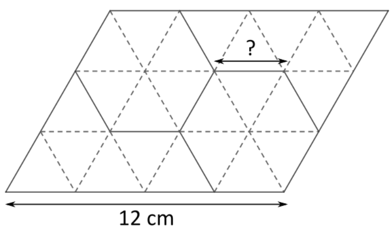
Úloha 26 . . . Nové logo

Paulínka vytvárala logo pre svoj obchod. Začala tým, že si nakreslila rovnobežník s jednou svojou stranou dlhou 12 cm. Zistila, že doň vie nakresliť dva pravidelné šesťuholníky tak ako na obrázku. Aká je dĺžka strán týchto šesťuholníkov v centimetroch?



Výsledok: 3

Riešenie: Každý pravidelný šesťuholník sa dá rozdeliť na 6 rovnostranných trojuholníkov. To nám umožňuje nakresliť trojuholníkovú sieť cez obrázok:



Z toho okamžite vidíme, že dĺžka strán šesťuholníkov (ktorá je rovnaká ako dĺžka strán trojuholníkov) je $12\,\mathrm{cm} : 4 = 3\,\mathrm{cm}$.

Úloha 27 . . . Ku dnu

Pirát Patrick the Polofúz sa dostal do bitky s iným pirátom. Jeho loď bola pritom zasiahnutá delovou guľou a teraz do nej tečie 50 l vody každú sekundu. Patrick začal rozmýšľať, koľko času mu zostáva, kým sa jeho loď celá ponorí. Svoju loď odhadol ako dutý kváder s rozmermi $10\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ a hmotnosťou 5 t. Koľko sekúnd zostáva Patrickovi, kým sa jeho loď celá ponorí?

Výsledok: 1100

Riešenie: Loď sa celá ponorí vtedy, keď budú tiažová a vztlaková sila rovnaké. Najväčšia možná vztlaková sila, ktorá vie pôsobiť na loď s objemom V je podľa Archimedovho zákona $F_{vz} = V\rho_{voda}g$. Tiažová sila pozostáva z dvoch zložiek - tiažovej sily pôsobiacej na samotnú loď a tiažovej sily pôsobiacej na vodu, ktorá už stihla natiecť do lode. Tiažová sila pôsobiaca na loď s hmotnosťou m je $F_{G_1} = mg$. Voda tečie do lode objemovým prietokom Q, takže za čas t bude v lodi voda s objemom $V' = Qt$. Takže tiažová sila pôsobiaca na vodu bude $F_{G_2} = Qt\rho_{voda}g$. Podmienka na ponorenie celej lode je $F_{vz} = F_{G_1} + F_{G_2}$, z ktorej jednoducho vyjadríme čas t:

$$V\rho_{voda}g = mg + Qt\rho_{voda}g$$

$$t = \frac{V\rho_{voda} - m}{Q\rho_{voda}} = \frac{(10\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m})\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} - 5000\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{m^3/s}\cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}} = 1100\,\mathrm{s}$$

To znamená, že loď sa celá ponorí za čas $t = 1100\,\mathrm{s}$

Úloha 28 . . . Súčet rokov

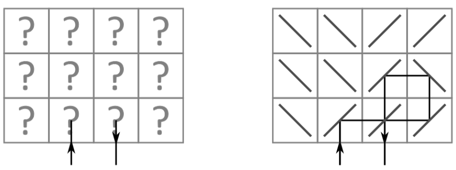
Každá z dvoch priateliek, Danka a Janka, dnes spočítala súčet rokov, v ktorých žili. Dopadlo to tak, že Dankin výsledok bol o 19945 väčší ako Jankin. V ktorom roku sa Danka narodila?

Výsledok: 1990

Riešenie: Obe dievčatá sčítali čísla od roku, v ktorom sa narodili, do roku 2023. Danka dostala väčší súčet, takže sčitovala aj nejaké čísla, ktoré Janka nie. Keďže každý sčítanec má hodnotu približne 2000, tak počet sčítancov, ktoré sčitovala iba Danka, je $19945 : 2000 \doteq 10$. Preto ak sa Danka narodila v roku x, tak čísla sčitované iba Dankou sú x, $x+1$, …, $x+9$. Ich súčet je $10x+45$. Takto dostaneme rovnicu $10x+45 = 19945$, z ktorej zistíme, že Danka sa narodila v roku $x = \frac{19945-45}{10} = 1990$.

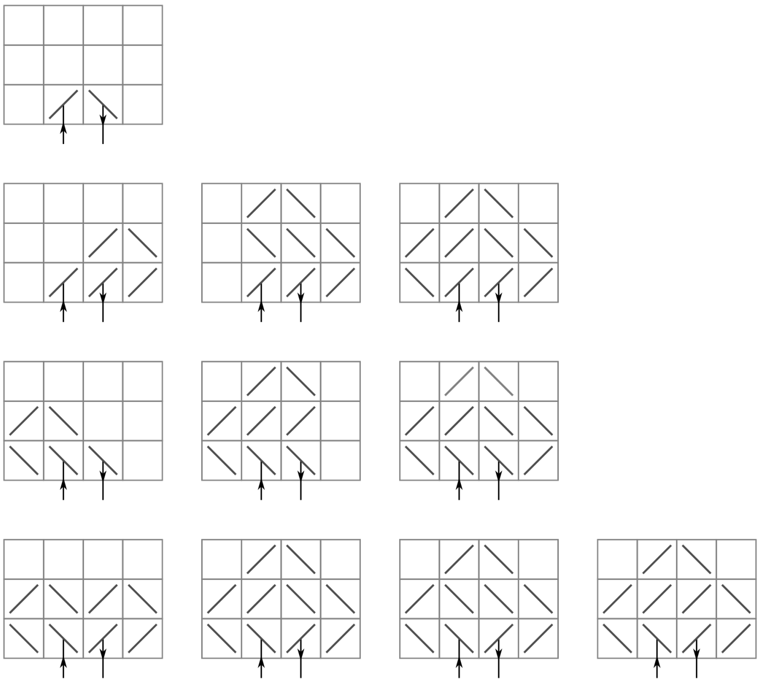
Úloha 29 . . . Optická hračka sa vracia

Marcel sa opäť hrá so svojou optickou hračkou. Tá je tvorená tabuľkou 3×4 ako na obrázku vľavo. Marcel musí na každé políčko s otáznikom položiť obojstranné zrkadlo tak, že zrkadlo bude so stranami tabuľky zvierať uhol 45°. Tentoraz Marcel zasvietil laserom a vyslal svetelný lúč, ktorý z hračky vyšiel tak ako na obrázku. Jedna z možných situácií, ktoré mohli nastať, je nakreslená na obrázku vpravo. Marcel sa teraz pýta inú otázku: Koľkými rôznymi trajektóriami (vrátane tej na obrázku vpravo) mohol svetelný lúč prejsť hračkou tak, aby vošiel a vyšiel tak ako na obrázku?



Výsledok: 11

Riešenie: Skúšajme možnosti podľa toho, aká je orientácia prvého a posledného zrkadla. Tým dostaneme jednotlivé riadky tohto obrázka (pre lepšiu prehľadnosť doň nekreslíme ani svetelné lúče a ani zrkadlá, ktorých orientácia nezmení trajektóriu lúča):



Vidíme teda, že lúč mohol hračkou prejsť $1 + 3 + 3 + 4 = 11$ rôznymi trajektóriami.

Úloha 30 ... Dvojjediný štvoruholník

Andrej si nakreslil obdĺžnik $ABCD$ taký, že $|AB| : |BC| = 9 : 8$. Na úsečkách BC a CD si postupne vyznačil body E a F také, že $|CE| = |BE|$ a $|DF| = 2 \cdot |FC|$. Takto skonštruoval štvoruholník $ABEF$. Andrej dal kamarátovi Jankovi spočítať obvod štvoruholníka $ABEF$ v centimetroch a kamarátovi Jožkovi obsah štvoruholníka $ABEF$ v centimetroch štvorcových. Akoby zázrakom získali obaja rovnaký číselný výsledok. Vypočítajte veľkosť obvodu obdĺžnika $ABCD$ v centimetroch. Ako odpoveď odovzdajte zlomok v základnom tvare.

Výsledok: $\frac{68}{3}$

Riešenie: Predpokladajme, že dĺžky strán obdĺžnika $ABCD$ sú $|AB| = 9x$ a $|BC| = 8x$ pre nejaké x.
Najprv spočítajme obvod štvoruholníka $ABEF$. Odvesny v pravouhlom trojuholníku ECF majú dĺžky $4x$ a $3x$. Takže Pytagorova veta dáva, že $|EF| = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$. Podobne majú odvesny v pravouhlom trojuholníku dĺžky $6x$ a $8x$, takže $|FA| = \sqrt{(6x)^2 + (8x)^2} = 10x$. Preto má obvod štvoruholníka $ABEF$ veľkosť $9x + 4x + 5x + 10x = 28x$.
Teraz spočítame obsah štvoruholníka $ABEF$. Pravouhlé trojuholníky ECF a FDA majú obsahy $\frac{(4x)\cdot(3x)}{2} = 6x^2$ a $\frac{(6x)\cdot(8x)}{2} = 24x^2$. Obsah obdĺžnika $ABCD$ je $(9x) \cdot (8x) = 72x^2$, takže obsah štvoruholníka $ABEF$ je $72x^2 - 6x^2 - 24x^2 = 42x^2$.
Vieme, že číselné hodnoty obvodu a obsahu štvoruholníka $ABEF$ sú rovnaké, čo znamená:

$$\frac{28x}{\mathrm{cm}} = \frac{42x^2}{\mathrm{cm}^2}$$
$$x = \frac{28}{42}\mathrm{cm} = \frac{2}{3}\mathrm{cm}$$

Zostáva už len spočítať obvod obdĺžnika $ABCD$, ktorý je $9x + 8x + 9x + 8x = 34x = 34 \cdot \frac{2}{3}\mathrm{cm} = \frac{68}{3}\mathrm{cm}$.

Úloha 31 ... Pracujúci červ

Homogénna dážďovka s hmotnosťou 3 g a dĺžkou 30 cm chce v záhrade preliezť ponad kocku so stranou dlhou 10 cm. Dážďovka bude liezť ako na obrázku. Akú prácu v mJ pri tom dážďovka vykoná?
Poznámka: Trenie medzi dážďovkou a kockou môžete zanedbať.

Výsledok: 2

Riešenie: Práca dážďovky bude zodpovedať najväčšej potenciálnej energii, ktorú dážďovka počas preliezania cez kocku dosiahne (pritom predpokladáme, že jej potenciálna energia je na začiatku nulová). Ľahko vidno, že maximum sa dosiahne presne v tom momente, keď bude dážďovka v polohe ako na obrázku v zadaní (lebo čím viac jej častí bude vyššie, tým väčšiu potenciálnu energiu bude mať).
Rozdeľme dážďovku na 3 časti (neobávajte sa, dážďovka sa zvládne zregenerovať) - dve zvislé a jednu vodorovnú ako na obrázku v zadaní. Všetky majú dĺžku 10 cm, čo je tretina dĺžky dážďovky. Keďže dážďovka je homogénna, všetky 3 časti majú hmotnosť $m_0 = 3\,\mathrm{g} : 3 = 1\,\mathrm{g}$. Vodorovná časť má ťažisko vo výške $h_2 = 10\,\mathrm{cm}$, takže potenciálna energia tejto časti je $E_2 = m_0 g h_2 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}001\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{mJ}$. Zvislé časti majú ťažisko vo výške $h_1 = h_3 = 5\,\mathrm{cm}$, takže ich potenciálna energia je $E_1 = E_3 = m_0 g h_1 = m_0 g h_3 = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 0{,}0005\,\mathrm{J} = 0{,}5\,\mathrm{mJ}$.
Najväčšia potenciálna energia dážďovky bude preto $E = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}5\,\mathrm{mJ} + 1\,\mathrm{mJ} + 0{,}5\,\mathrm{mJ} = 2\,\mathrm{mJ}$, čo je tiež práca, ktorú musí dážďovka vykonať.

Úloha 32 ... Zabudnuté heslo

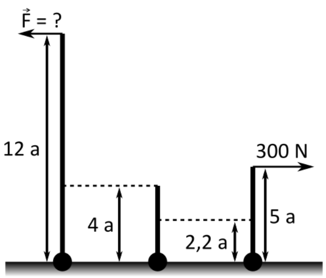
Terka má všetky svoje cennosti v trezore chránenom heslom, ktoré sa skladá z 5 písmen. Nanešťastie nepoužíva správcu hesiel a tak úplne zabudla svoje heslo od trezora. Pamätá si však, že používala 26-znakovú anglickú abecedu a že prvé dve písmená boli NA. Aby otvorila trezor, vyskúša Terka všetky možné kombinácie zostávajúcich písmen v abecednom poradí (AAA, AAB, AAC, ...). Koľko kombinácií musí Terka vyskúšať, ak je heslo NABOJ?

Výsledok: 1050

Riešenie: Rozdeľme si úlohu na ľahšie stráviteľné kusy. Najprv, koľko pokusov musí vyskúšať, aby sa dostala k ABA? Keďže máme v anglickej abecede 26 písmen, bude to trvať 26 zmien posledného písmena. Ako to bude s BAA? Po každých 26 zmenách posledného písmena sa druhé písmeno zmení o jedno, preto aby sme sa dostali k BAA z AAA, potrebujeme $26 \cdot 26 = 676$ pokusov. Ďalej, na to, aby sme sa dostali na BOA z BAA, potrebujeme $26 \cdot 14 = 364$ pokusov, keďže O je 15. písmeno abecedy a musíme vyskúšať všetkých 14 písmen predtým. Napokon, J je 10. písmeno, takže potrebujeme ďalších 10 pokusov, aby sme sa dostali na BOJ z BOA. To dokopy dáva, že Terka musí vyskúšať $676 + 364 + 10 = 1050$ kombinácií.

Úloha 33 ... Paťo ťahá za nitky

Paťo si zobral 3 páky, ktorých dĺžky sú $12a$, $4a$, $5a$. Pospájal ich vodorovnými lankami tak ako na obrázku. Páku najviac vpravo začal ťahať silou s veľkosťou 300 N. Aká je veľkosť sily v Newtonoch, ktorou musí Paťo ťahať páku najviac vľavo, aby bol celý mechanizmus v pokoji?



Výsledok: 125

Riešenie: Celý mechanizmus bude v pokoji iba vtedy, keď bude výsledný moment sily pôsobiaci na každú páku nulový. Pozrime sa teda na momenty síl pôsobiace na páky. Na to potrebujeme pochopiť, čo robia lanká. V lankách bude nejaké napätie, a tak bude každé lanko pôsobiť na obe páky rovnako veľkou silou ako je veľkosť tohto napätia. Napríklad lanko spájajúce prostrednú a pravú páku bude pôsobiť rovnako veľkou silou na prostrednú páku (smerom doprava) ako na pravú páku (smerom doľava). Navyše si všimnime, že obe tieto sily pôsobia v rovnakej výške, a tak pôsobia v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania pák. Preto každé lanko pôsobí na obe páky rovnako veľkým momentom sily.
Toto v podstate znamená, že môžeme zabudnúť na prostrednú páku. Totižto, sila pôsobiaca na pravú páku vyvoláva moment sily veľkosti M na pravú páku. Tento moment sily musí byť vykompenzovaný momentom sily od lanka pripevneného k pravej páke. Keďže lanká prenášajú moment sily, veľkosť momentu sily, ktorým pravé lanko pôsobí na prostrednú páku, musí byť tiež M. Podobne aj moment sily pôsobiaci na ľavú páku bude mať veľkosť M.
Preto aby bol celý mechanizmus v pokoji, musia obe uvažované sily vyvolávať rovnako veľký moment sily. Toto vedie k vzťahu:

$$F \cdot (12a) = 300\,\mathrm{N} \cdot (5a)$$
$$F = \frac{5}{12} \cdot 300\,\mathrm{N} = 125\,\mathrm{N}$$

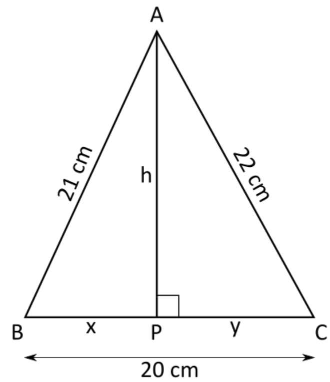
Paťo teda musí ťahať ľavú páku silou v veľkosťou 125 N.

Úloha 34 ... Obrovský trojuholník

Matej si v škole na tabuľu nakreslil trojuholník so stranami dlhými 20 cm, 21 cm a 22 cm. Potom nakreslil výšku na stranu s dĺžkou 20 cm. Tá rozdelila túto stranu na dve úsečky. Aká je veľkosť rozdielu dĺžok týchto dvoch úsečiek v centimetroch?

Výsledok: 2,15

Riešenie: Označme si jednotlivé vrcholy a dĺžky tak ako na tomto obrázku:



Uvažujme pravouhlé trojuholníky ABP a ACP. Napíšme pre ne Pytagorovu vetu, čím dostaneme:

$$h^2 + x^2 = (21\,\mathrm{cm})^2$$
$$h^2 + y^2 = (22\,\mathrm{cm})^2$$

Keď vyjadríme h^2 z oboch rovností a vyjadrenia porovnáme, získame

$$(21\,\mathrm{cm})^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - y^2$$
$$y^2 - x^2 = (22\,\mathrm{cm})^2 - (21\,\mathrm{cm})^2$$

Teraz použime vzťah $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ na obe strany rovnosti a dostaneme

$$(y-x)(y+x) = (1\,\mathrm{cm})(43\,\mathrm{cm}) = 43\,\mathrm{cm}^2$$

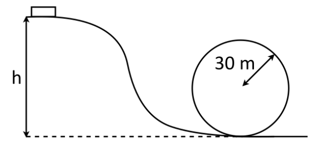
Lenže vieme, že $y + x = 20\,\mathrm{cm}$. Preto má rozdiel dĺžok $y - x$, ktorý máme spočítať, veľkosť:

$$y - x = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{x+y} = \frac{43\,\mathrm{cm}^2}{20\,\mathrm{cm}} = \frac{43}{20}\,\mathrm{cm} = 2{,}15\,\mathrm{cm}$$

Úloha 35 ... Úloha ako na horskej dráhe

Matúš čítal knihu v ktorej sa dozvedel nasledovnú informáciu: Keď sa auto s hmotnosťou m pohybuje rýchlosťou v po zákrute, ktorá je časťou kružnice s polomerom r, musí na auto pôsobiť dostredivá sila $F_d = \frac{mv^2}{r}$.

Vybavený touto vedomosťou prišiel Matúš do zábavného parku, kde ho fascinovala horská dráha. V istom jej úseku nechali vozík voľne sklesať z výšky h a potom prejsť vertikálnou slučkou s polomerom 30 m tak ako na obrázku. Z akej najmenšej výšky h v metroch musia spustiť vozík, aby prešiel vertikálnou slučkou bez toho, aby z nej spadol?



Výsledok: 75

Riešenie: Označme hmotnosť vozíka m, polomer vertikálnej slučky $r = 30\,\mathrm{m}$ a rýchlosť vozíka v najvyššom bode vertikálnej slučky v.

Z prvej časti zadania vieme, že v najvyššom bode vertikálnej slučky musí na vozík pôsobiť dostredivá sila $F_d = \frac{mv^2}{r}$. Sú len dve sily, ktoré môžu na vozík pôsobiť v tomto smere tak, aby mohli byť touto dostredivou silou - tiažová sila $F_G = mg$ a nejaká sila od samotnej vertikálnej slučky. My však chceme mať dostredivú silu čo najmenšiu (čím väčšia by bola, tým väčšiu rýchlosť by musel mať vozík, a teda by musel mať na začiatku väčšiu energiu). A keďže gravitačnej sily sa nezbavíme, v prípade s najmenšou výškou budeme mať $F_d = F_G$. Z tohto dostávame:

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$
$$\frac{v^2}{r} = g$$
$$v^2 = rg$$

Teraz sa pozrime na energie. Na začiatku mal vozík iba potenciálnu energiu $E_1 = mgh$. Na vrchu vertikálnej slučky má však aj potenciálnu, aj kinetickú energiu. Je vo výške $2r$ a má rýchlosť v, takže jeho celková energia je $E_2 = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$. Energia sa musí zachovať, takže $E_1 = E_2$. Keď to dáme dokopy so vzťahom pre v^2, získame:

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2$$
$$gh = 2gr + \frac{1}{2}rg$$
$$h = \frac{5}{2}r$$

Preto musí byť vozík spustený z výšky aspoň $h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 30\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{m}$.

Úloha 36 ... Piškvorkový turnay

Piškvorkového turnaja sa zúčastnilo 24 hráčov. V tomto turnaji môže ľubovoľný hráč hrať proti ľubovoľnému inému, ale v každom momente môže prebiehať najviac jeden zápas. V istom momente počas turnaja si Marek uvedomil, že neexistuje žiadna skupina hráčov, v ktorej by každý hráč hral aspoň 2 zápasy s hráčmi v tejto skupine. Koľko najviac zápasov sa mohlo odohrať do tohto momentu?

Výsledok: 23

Riešenie: Riešenie tejto úlohy sa prirodzene delí na dve časti. V prvej ukážeme, že sa mohlo odohrať 23 zápasov. V druhej časti potom ukážeme, že ak by sa odohralo 24 zápasov, tak by už existovala skupina popísaná v zadaní. To bude znamenať, že odpoveď je 23.
Prvá časť: Očíslujme si hráčov číslami 1, 2, ..., 24. Nech sú zápasy hrané medzi hráčmi 1 a 2, 2 a 3, ..., 23 a 24 a zvoľme si nejakú skupinu hráčov. V tejto skupine je určite nejaký hráč, ktorý má najmenšie číslo, označme toto číslo P. V rámci tejto skupiny mohol tento hráč hrať zápas jedine s $P+1$ (ak je vôbec v skupine), pretože hráč s číslom $P-1$ nemôže byť v skupine (bol by to hráč s menším číslom ako P). Takže hráč s číslom P určite nehral s aspoň 2 ľuďmi v tejto skupine. Toto platí pre ľubovoľnú skupinu, takže naozaj neexistuje žiadna skupina, ktorá by spĺňala podmienku zo zadania. Čiže 23 zápasov sa mohlo odohrať.
Druhá časť: Máme dokázať, že ak sa odohralo 24 zápasov, tak vždy nájdeme skupinu s vlastnosťou zo zadania. Keby existovala taká dvojica hráčov, ktorá medzi sebou hrala dva zápasy, tvorila by skupina s vlastnosťou zo zadania. Preto predpokladajme, že takáto dvojica neexistuje.
Teraz predpokladajme, že každý hráč odohral aspoň 2 zápasy. Vyberajme hráčov do skupiny nasledovne: Začnime s nejakým hráčom, nazvime ho P_0. S niekým hral zápas, povedzme, že s P_1. Hráč P_1 hral s aspoň dvomi hráčmi, takže hral aj s nejakým P_2 rôznym od P_0. Podobne aj pre P_2 nájdeme hráča P_3, s ktorým hral a ktorý je rôzny od P_1. Takto pokračujme vo vyberaní hráčov. Časom sa dostaneme k nejakému hráčovi, ktorého sme už vybrali. V tomto bode budeme mať hráčov P_k, P_{k+1}, ..., P_n s vlastnosťou, že každý z hráčov P_i hral s hráčmi P_{i-1} a P_{i+1} a že hráči P_k a P_n hrali spolu zápas. Inými slovami, budeme schopní postaviť ich na kružnicu tak, že každý hráč hral so svojimi susedmi. Takže táto skupina hráčov má požadovanú vlastnosť. Preto ak každý hral aspoň 2 zápasy, tak sme hotoví.
Zostáva skontrolovať, že sa stane, ak niekto hral menej ako 2 zápasy. V tomto prípadne zabudnime na takéhoto hráča a na všetky zápasy, ktoré hral. Po tomto nám zostane menej hráčov, ale stále bude platiť, že sa hralo aspoň toľko zápasov, koľko zostáva hráčov. Po zabudnutí na tohto hráča máme dve možnosti. Buď už všetci zostávajúci hrali aspoň 2 zápasy, alebo je opäť medzi hráčmi niekto, kto hral menej ako 2 zápasy. V prvom prípade ukazuje argument z predošlého odseku, že existuje skupina, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. V druhom prípade máme ďalšieho hráča, na ktorého môžeme zabudnúť. Takýmto spôsobom pokračujeme. Ak budeme stále mať na koho zabudnúť, tak budeme znižovať počet hráčov, až napokon dostaneme skupinu 3 hráčov, ktorý medzi sebou hrali aspoň 3 zápasy. To je možné iba tak, že hrali každý s každým, takže tvoria skupinu, ktorú hľadáme.
Tým sme zdôvodnili, že ak by sa odohralo 24 zápasov, tak by existovala skupina zo zadania.
Keď všetko dáme dokopy, tak sme dokázali, že sa mohlo odohrať najviac 23 zápasov.

Úloha 37 ... Unáhlené násobenie

Lucy bola zvedavá, aký je súčin po sebe idúcich nepárnych čísel od jeden do tridsaťjeden, teda že akú hodnotu má číslo $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$. Hneď vytiahla kalkulačku a narýchlo začala násobiť čísla. Lucy sa zdá, že možno jedno z čísel pri počítaní vynechala. Na displeji kalkulačky vidí, že výsledný súčin má na mieste stoviek cifru 4. Ktoré číslo Lucy vynechala?

Výsledok: 25

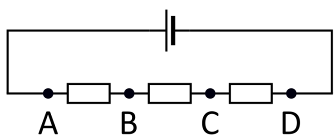
Riešenie: Na začiatok musíme objaviť pravidlo o deliteľnosti 125. Kritérium je, že posledné trojčíslie musí byť deliteľné 125 (toto je podobné kritériám o deliteľnosti 2, 4, 8, 16 ..., len s 5, 25, 125 ...). Prečo je to tak?

Napíšme si nejaké číslo ako $1000A + B$, kde $B < 1000$. Teda číslo B je posledné trojčíslie pôvodného čísla. Všimnime si, že číslo 1000 je deliteľné 125, pretože $1000 = 8 \cdot 125$. Takže na to, aby bolo číslo $1000A + B$ deliteľné 125, musí byť B deliteľné 125. Týmto je platnosť kritéria dokázaná.
Teraz sa pozrime, aké má toto dôsledky. Jediné najviac trojciferné čísla deliteľné 125 sú 0, 125, 250, 375, 500, 625, 750 a 875. Žiadne z nich sa nezačína cifrou 4. Preto dostávame, že žiadny násobok 125 nemôže mať na mieste stoviek cifru 4.
Napokon sa vráťme k pôvodnej úlohe. Vieme, že Lucy dostala súčin, ktorý má na mieste stoviek cifru 4, takže tento súčin nemôže byť násobok 125. Keby Lucy nevynechala žiadne číslo, bol by jej súčin deliteľný $5 \cdot 15 \cdot 25$. Jeho prvočíselný rozklad by tak obsahoval štyrikrát prvočíslo 5. Preto potrebujeme z prvočíselného rozkladu vyhodiť prvočíslo 5 aspoň dvakrát. To sa dá iba tým, že Lucy vynechá číslo 25. To znamená, že Lucy vynechala číslo 25.

Úloha 38 ... Napätie na záver

Martin má svoj obľúbený elektrický obvod, ktorý je nakreslený na obrázku. Martin si na ňom zvolil body A, B, C a D, zmeral napätie medzi každou dvojicou spomedzi týchto bodov a týchto šesť hodnôt si napísal na papier. Po niekoľkých dňoch našiel tento papier, ale jedna z hodnôt už bola nečitateľná. Zvyšných päť hodnôt bolo v nejakom poradí 7 V, 8 V, 10 V, 15 V a 18 V. Martin začal rozmýšľať a zistil, že len na základe informácií na papieri, môže nadobúdať šieste napätie iba dve hodnoty. Aký je súčet týchto dvoch napätí vo Voltoch?

Poznámka: Odpory jednotlivých rezistorov na obrázku nemusia byť všetky rovnaké.



Výsledok: 28

Riešenie: Napätie medzi dvomi bodmi popisuje veľkosť rozdielu potenciálov v týchto dvoch bodoch. Potenciál v bode popisuje iba (elektrickú) potenciálnu energiu častice s nábojom 1 C v tomto bode. V každom z bodov A, B, C a D bude mať takáto častica nejakú potenciálnu energiu. Túto hodnotu potenciálnej energie môžeme priradiť každému z bodov. Potom napätia popisujú iba rozdiely medzi týmito hodnotami.
Preto môžeme našu úlohu preformulovať na čisto matematickú úlohu, v ktorej máme priradiť nejaké štyri čísla bodom A, B, C a D (teraz už tieto písmená nemajú nič spoločné s bodmi v pôvodnej fyzikálnej úlohe) tak, aby rozdiely medzi nimi boli 7, 8, 10, 15, 18 a jeden neznámy rozdiel. Všimnime si zaujímavú vlastnosť. Vezmime tri z týchto čísel, napríklad X, Y a Z, a povedzme si, že sú zoradené tak, že $X > Y > Z$. Potom je rozdiel $X - Z$ súčtom rozdielov $X - Y$ a $Y - Z$ (zjavne $(X - Y) + (Y - Z) = X - Z$). Preto ak si vezmeme ľubovoľnú trojicu z našich čísel, tak rozdiely medzi nimi budú mať tú vlastnosť, že jeden z nich je súčtom zvyšných dvoch.
Vráťme sa späť k našej úlohe. Povedzme si napríklad, že nepoznáme rozdiel medzi C a D. Zoberme si čísla A, B a C. Všetky tri rozdiely medzi nimi patria medzi tie známy. Lenže jeden z nich musí byť súčtom zvyšných dvoch, na čo máme len dve možnosti: $7 + 8 = 15$ or $8 + 10 = 18$. Rovnako to musí platiť aj pre trojicu A, B a D, takže jedna z týchto trojíc bude mať rozdiely 7, 8 a 15 a tá druhá bude mať rozdiely 8, 10 a 18. Napríklad nech trojica A, B a C má (v nejakom poradí) rozdiely 7, 8 a 15. Trojice A, B, C a A, B, D majú spoločný rozdiel medzi A a B, takže tento rozdiel musí byť 8 (je to totiž jediný spoločný rozdiel v trojiciach 7, 8, 15 a 8, 10, 18).
Doteraz boli role čísel A a B zameniteľné, takže si môžeme zvoliť napríklad, že rozdiel medzi A a C bude 15 a že rozdiel medzi B a C bude 7. V trojici A, B a C vieme, že z čísel A a C je jedno to najväčšie a jedno to najmenšie. Povedzme si, že A bude to najväčšie. Na doriešenie nám zostáva už len pozrieť sa na to, aký je rozdiel medzi D a číslami A a B. Máme na to dve možnosti:
Prípad 1: Ak je rozdiel medzi A a D rovný 18. Toto znamená, že v trojici A, B a D je jedno z čísel A a D to najväčšie a to druhé to najmenšie. Avšak v trojici A, B a C sme si to zvolili tak, že A je najväčšie, čiže je

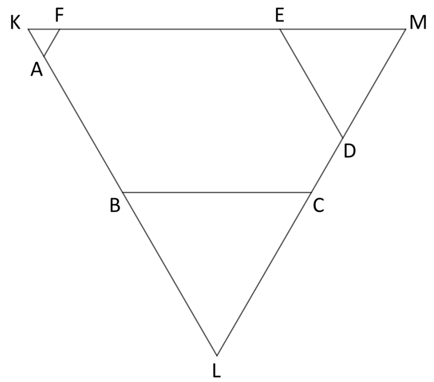
väčšie ako B. Preto musí byť A to najväčšie aj v trojici A, B, D. Toto dáva, že A je 15 väčšie ako C a o 18 väčšie ako D. Rozdiel medzi C a D je teda $(A-15)-(A-18)=3$. Toto je prvé riešenie.
Prípad 2: Ak je rozdiel medzi A a D rovný 10. Toto znamená, že v trojici A, B a D je jedno z čísel B a D to najväčšie a to druhé to najmenšie. Podobne ako v predošlom prípade vieme, že A je väčšie ako B, takže B musí byť to najmenšie. Preto vieme, že C je o 7 menšie ako B a že D je o 18 väčšie než B. To znamená, že rozdiel medzi C a D je $(B+18)-(B-7)=25$, čo dáva druhé riešenie.
Aby sme to zhrnuli, zistili sme, že hľadaný rozdiel môže byť buď 3, alebo 25. V pôvodnej úlohe to znamená, že neznáme napätie môže byť buď 3 V alebo 25 V. Súčet dvoch možných hodnôt neznámeho napätia je preto $3\,\mathrm{V}+25\,\mathrm{V}=28\,\mathrm{V}$.

Úloha 39 . . . Šesťuholníkové ihrisko

V meste sa nachádza ihrisko. Má tvar konvexného šesťuholníka, ktorého všetky vnútorné uhly majú veľkosť 120°. Dĺžky jednotlivých strán ihriska sú postupne 10 m, 12 m, 4 m, 8 m, 14 m, 2 m. Vieme, že obsah plochy tohto ihriska sa dá zapísať v tvare $a\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Vypočítajte hodnotu a.

Výsledok: 91

Riešenie: Skôr ako začneme, spočítajme obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky x. Pomocou Pytagorovej vety jednoducho spočítame, že výška tohto trojuholníka je $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Takže obsah rovnostranného trojuholníka je $\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Vráťme sa teraz k pôvodnej úlohe. Pomenujme jednotlivé vrcholy šesťuholníka A, B, C, D, E, F tak, aby $|AB|=10\,\mathrm{m}$, $|BC|=12\,\mathrm{m}$, $|CD|=4\,\mathrm{m}$, $|DE|=8\,\mathrm{m}$, $|EF|=14\,\mathrm{m}$, $|FA|=2\,\mathrm{m}$. Pretnime priamky AB, CD a EF. Tým dostaneme trojuholník KLM ako na obrázku:



Z toho, že veľkosti vnútorných uhlov šesťuholníka $ABCDEF$ boli 120°, dostávame, že trojuholníky KAF, LBC a MDE sú rovnostranné. To rovno dáva, že aj trojuholník KLM je rovnostranný, pričom dĺžka jeho strany je 24 m.
Obsah šesťuholníka $ABCDEF$ získame tak, že od obsahu trojuholníka KLM odčítame obsahy trojuholníkov KAB, LBC a MDE. Preto je obsah šesťuholníka $ABCDEF$ rovný:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24\,\mathrm{m})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2\,\mathrm{m})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(12\,\mathrm{m})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(8\,\mathrm{m})^2\right)=(12^2-1^2-6^2-4^2)\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2=91\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$$

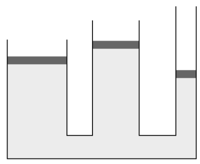
To znamená, že hodnota a je 91.

Úloha 40 ... Pokusný škrečok

Majo má doma hydraulický systém pozostávajúci z 3 piestov ako na obrázku. Vie, že obsah plochy prvého piestu je rovnaký ako súčet obsahov plôch zvyšných dvoch piestov. Majo má tiež škrečka, s ktorým vyskúša niekoľko experimentov:

Keď položí škrečka na prvý piest, pohne sa tento piest o 15 mm nadol
Keď položí škrečka na druhý piest, pohne sa tento piest o 30 mm nadol.

O koľko milimetrov nadol sa pohne tretí piest, keď naň Majo položí škrečka?



Výsledok: 75

Riešenie: Označme si obsah prvého piestu S_1, druhého piestu S_2 a tretieho piestu S_3. Zadané podmienky nám vravia, že $S_1 = S_2 + S_3$.
Ďalej, nech m je hmotnosť škrečka a $\Delta h_1 = 15\,\mathrm{mm}$ je výška, o ktorú sa pohne prvý piest smerom nadol, keď naň Majo položí škrečka. V rovnakom momente sa druhý piest pohne nahor o Δh_2 a tretí piest o Δh_3. Po položení škrečka na prvý piest sa musia stať dve veci. Prvá z nich je, že voda spod prvého piestu sa musí rozdeliť pod zvyšné piesty. Toto dáva podmienku $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2 + S_3\Delta h_3$. Na druhej strane, tlak pod všetkými tromi piestami musí byť rovnaký. Ak bol p pôvodný tlak v systéme a ρ je hustota vody, tak z tohto dostávame $p + \frac{mg}{S_1} - \Delta h_1\rho g = p + \Delta h_2\rho g = p + \Delta h_3\rho g$. Po odčítaní p a po predelení g máme $\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho = \Delta h_3\rho$. Druhá časť tejto rovnosti dáva $\Delta h_2 = \Delta h_3$. Keď todo použijeme v predošlých vzťahoch, dostaneme:

$$S_1\Delta h_1 = (S_2 + S_3)\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1} - \Delta h_1\rho = \Delta h_2\rho$$

Alebo po úprave:

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1 = \Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \Delta h_2$$

Porovnaním týchto dvoch rovností dostávame:

$$\frac{m}{S_1\rho} - \Delta h_1 = \frac{S_1}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$

Preznačme si Δh_2, aby označovalo výšku, o ktorú sa druhý piest pohne nadol, keď naň Majo položí škrečka. Podobne označme túto veličinu Δh_3 pre tretí piest. Rovnakým spôsobom, ako vyššie, získame:

$$\frac{m}{S_1\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 + S_3}\Delta h_1$$
$$\frac{m}{S_2\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_3}\Delta h_2$$
$$\frac{m}{S_3\rho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2}\Delta h_3$$

Predelením prvých dvoch rovníc a použitím $S_1 = S_2 + S_3$, dostávame:

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &= \frac{2S_1 - S_2}{S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\\ S_2 &= (2S_1 - S_2)\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = (2S_1 - S_2)\frac{15\,\mathrm{mm}}{30\,\mathrm{mm}} = \frac{2S_1 - S_2}{2}\\ 3S_2 &= 2S_1\\ S_2 &= \frac{2}{3}S_1\end{aligned}$$

Z $S_1 = S_2 + S_3$ máme, že $S_3 = S_1 - S_2 = S_1 - \frac{2}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_1$. Keď v predošlej sade rovníc predelíme prvú a tretiu, dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{S_3}{S_1} &= \frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \frac{\frac{1}{3}S_1}{S_1} &= \frac{S_1 + \frac{2}{3}S_1}{\frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_1} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \frac{1}{3} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_3}\\ \Delta h_3 &= 5\Delta h_1 = 5 \cdot 15\,\mathrm{mm} = 75\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

Takže ak položíme škrečka na tretí piest, tak ten sa pohne nadol o $75\,\mathrm{mm}$.

Úloha 41 ... Divné obľúbené číslo

Maťko má obľúbené číslo. Je jeho obľúbeným preto, lebo je to najmenšie celé číslo väčšie ako 1, ktoré spĺňa nasledovnú podmienku: ak Maťko vynásobí ciferný súčet tohoto čísla sebou samým, dostane súčin cifier tohoto čísla. Aká je hodnota Maťkovho obľúbeného čísla?

Výsledok: 999

Riešenie: Maťkove obľúbené číslo nemôže byť jednociferné. Ak by to bola cifra a, podmienka by hovorila, že $a^2 = a$, čo platí len pre $a = 0$ alebo $a = 1$, no hľadané číslo by malo byť väčšie než 1.
Maťkove obľúbené číslo tiež nemôže byť dvojciferné. Vskutku, ak by toto číslo bolo zapísané v tvare $10a + b$, dostali by sme $(a + b)^2 = ab$, čiže $a^2 + ab + b^2 = 0$. Ale keďže a a b nie sú záporné a a je kladné, vždy dostaneme $a^2 + ab + b^2 > 0$, čiže $a^2 + ab + b^2 = 0$ nemôže nikdy platiť.
Ďalej ukážeme, že 999 je jediné trojciferné číslo s danými vlastnosťami. Je jednoduché skontrolovať, že 999 dané vlastnosti má ($(9 + 9 + 9)^2 = 27^2 = 3^6 = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$).
Nech $100a+10b+c$ je trojciferné číslo spĺňajúce potrebné podmienky, teda platí $(a+b+c)^2 = abc$. Čísla a, b a c sú cifry, takže musí platiť, že $0 \leq a, b, c \leq 9$. Zjavne, ak je niektorá z cifier 0, vzťah $(a+b+c)^2 = abc$ núti všetky ostatné cifry byť tiež 0. Preto môžeme predpokladať, že $1 \leq a, b, c$. Navyše, vzťah $(a + b + c)^2 = abc$ je pre hodnoty a, b, c symetrický, čiže môžeme predpokladať, že $a \leq b \leq c$ (táto podmienka vytvorí z ktoréhokoľvek platného trojčíslia to najmenšie trojciferné číslo). Teda predpokladáme, že:

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$$

Pozrime sa bližšie na vzťah $(a + b + c)^2 = abc$. Môže ho prepísať aj ako $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = abc$. Použitím $c \leq 9$ vieme, že $abc \leq 9ab$. Na druhú stranu, použitím $a \leq b \leq c$ vieme, že:

$$\begin{aligned}c^2 &\geq ab\\ ac &\geq ab\\ bc &\geq ab\end{aligned}$$

Taktiež, $(a-b)^2 \geq 0$, čiže $a^2+b^2 \geq 2ab$. Spojením týchto nerovností dostávame, že:

$$9ab \leq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = abc \leq 9ab$$

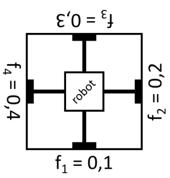
Keďže ľavá a pravá strana tejto nerovnosti je rovnaká, musíme mať rovnosti vo všetkých použitých nerovnostiach.

- V nerovnosti $abc \leq 9ab$ nastáva rovnosť iba vtedy, keď $c=9$.
- V nerovnosti $ac \geq ab$ nastáva rovnosť iba vtedy, keď $b=c$.
- V nerovnosti $bc \geq ab$ nastáva rovnosť iba vtedy, keď $a=c$.

Zlúčením všetkých týchto troch pozorovaní dostávame, že jediným možným prípadom je $a=b=c=9$. Ako sme už skontrolovali, toto naozaj je riešenie. Čiže číslo 999 je jediným trojciferným číslom, ktoré spĺňa uvedené podmienky. Teda je najmenším číslom väčším ako 1 s danými vlastnosťami, teda 999 je Maťkovým obľúbeným číslom.

Úloha 42 ... Druhý stabilný robot

Vedci chcú teraz preskúmať ďalšiu hlbokú jamu, ktorú vykopali. Jej prierezom je štvorec. Opäť spustili malého robota s hmotnosťou 15 kg do jamy. Aby sa zastabilizoval, robot začal tlačiť ramenom do každej steny jamy. Každé rameno tlačilo silou F. Tentokrát ale vedci rýchlo zistili, že súčinitele šmykového trenia medzi ramenami a stenami jamy sú 0,1, 0,2, 0,3 a 0,4. Nakreslili teda nákres robota a jamy pri pohľade zhora, ktorý vidíš na obrázku. Aká je minimálna sila F v Newtonoch, ktorou musí robot pôsobiť, aby zostal v pokoji?



Výsledok: 250

Riešenie: Postupujeme rovnako ako v úlohe 25. Tentokrát sa však musíme zamyslieť, čo spravia rozdielne súčinitele šmykového trenia. Sústreďme sa najprv iba na ten smer, v ktorom máme súčinitele $f_1 = 0{,}1$ a $f_3 = 0{,}3$. Vieme, že sila F_t vo vzťahu $F_t = fF$ predstavuje maximálnu možnú treciu silu, teda $F_t \leq fF$. Týmto spôsobom dostávame dve trecie sily $F_{t_1} \leq f_1F$ and $F_{t_3} \leq f_3F$. Ak by tieto dve sily boli rozdielne, začal by na robota pôsobiť moment sily (okolo osi spájajúcej druhé dve ramená robota). To by spravilo robota nestabilným. Kvôli tomu musí platiť, že $F_{t_1} = F_{t_3}$. Spojením vyššie spomenutých nerovností s tým, že $f_1 \leq f_3$, dostávame, že $F_{t_1} = F_{t_3} = f_1F$. Rovnako pre $f_2 = 0{,}2$ a $f_4 = 0{,}4$, dostávame $F_{t_2} = F_{t_4} = f_2F$. Aby sme vykompenzovali tiažovú silu $F_G = mg$, musíme mať:

$$\begin{aligned} F_G &= F_{t_1} + F_{t_2} + F_{t_3} + F_{t_4} \\ mg &= f_1F + f_2F + f_1F + f_2F \\ mg &= 2(f_1+f_2)F \\ F &= \frac{mg}{2(f_1+f_2)} \end{aligned}$$

To znamená, že robot potrebuje tlačiť silou:

$$F = \frac{mg}{2(f_1+f_2)} = \frac{15\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2\cdot(0{,}1+0{,}2)} = 250\,\mathrm{N}$$

Poďakovanie

Odborný garant súťaže

Marián Poturnay

Námety úloh

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Anežka Čechová, Rikkie Gieler, Jaroslav Herman, Anna Koziara, Emil Łasocha, Hai An Mai, Filip Manijak, Richard Materna, Hubert Pochłopień, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Rusnák

Autori zadaní a riešení úloh

Richard Materna, Tomáš Miškov, Marián Poturnay

Recenzenti

Marija Ćorić, Matej Hrmo, Emil Łasocha, Filip Manijak, Richard Materna, Tomáš Miškov, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Kateřina Rosická, Patrik Švančara, Matej Vojvodić

Preklady

Ezequiel Albentosa Ruiz, Daniel Arribas Mercado, Lance Bakker, Veronika Bartaková, Anežka Čechová, Marija Ćorić, Rikkie Gieler, Laura Horvat, Dominik Chmura, Justyna Jaworska, Michno Katzper, Lukáš Linhart, Quim Llorens Giralt, Casper Madlener, Richard Materna, Tomáš Miškov, Łukasz Orski, Miroslav Pajger, Mislav Plavac, Marián Poturnay, Ivan Premuš, Lucija Relić, Kateřina Rosická, Micheala Rosinská, Juraj Rosinský, Matej Vojvodić, Szymon Wojtulewicz, Wouter Zandsteeg

Koordinátori

Mislav Brnetić & Matej Vojvodić (HR), Matej Hrmo (SK), Justyna Jaworska (PL), Azucena Molina-Solís & Gemma Martínez-Redondo (ES), Tomáš Miškov (NL), Kateřina Rosická (CZ)

Organizačné miesta

Bánovce nad Bebravou: Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica:** Gymnázium J.G. Tajovského • **Białystok:** Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała:** V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava:** UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno:** Gymnázium Jána Chalupku • **Brno:** Gymnázium třída Kapitána Jaroše • **Brno:** Gymnázium Matyáše Lercha • **České Budějovice:** Gymnázium Jírovcova • **Český Krumlov:** Gymnázium Český Krumlov • **Frýdlant nad Ostravicí:** Kulturní Dům • **Grodzisk Mazowiecki:** Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec:** Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové:** Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Katowice:** VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie • **Kościerzyna:** Szkoła Podstawowa nr 1 im. Tadeusza Kościuszki • **Košice:** Gymnázium Alejová • **Kraków:** Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego • **Kutná Hora:** Gymnázium Jiřího Ortena • **Łebcz:** Szkoła Podstawowa im. Polskich Noblistów • **Levice:** Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec:** Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš:** Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź:** I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lublin:** II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego • **Lučenec:** Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy • **Námestovo:** Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra:** Gymnázium Párovská • **Olomouc:** Gymnázium Olomouc - Hejčín • **Ostrava:** Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice:** Gymnázium Dašická • **Partizánske:** Gymnázium Partizánske • **Piešťany:** Gymnázium Pierra de Coubertina • **Plzeň:** Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad:** Gymnázium Kukučínova • **Praha:** Gymnázium Voděradská • **Praha:** Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov:** Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza:** Gymnázium V. B. Nedožerského • **Przasnysz:** Liceum Ogólnokształcące im. KEN • **Púchov:** Gymnázium Púchov • **Sokolov:** Gymnázium a KVC Sokolov • **Sučany:** Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Szczecin:** XIII Liceum Ogólnokształcące • **Šahy:** Gymnázium Mládežnícka • **Šurany:** Gymnázium Bernolákova • **Toruń:** IV Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki • **Trenčín:** Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava:** Gymnázium Jána Hollého • **Třebíč:** Katolické gymnázium • **Ústí nad Labem:** Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Multifunkční centrum • **Warszawa:** V Liceum Ogólnokształcące im. Księcia Józefa Poniatowskiego • **Wrocław:** Centrum Kształcenia Ustawicznego Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu • **Zlín:** Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť