NÁBOJ junior

6. ročník

2017/18

Vzorová řešení

výfuk

matfyz

Milí příznivci matematiky a fyziky,

i letos se vám do rukou dostává brožurka týmové matematicko-fyzikální soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání soutěžních úloh i jejich řešení. V roce 2017 soutěž proběhla na 17 místech v České republice, na 24 místech na Slovensku a na jednom místě v Polsku. Dohromady se klání zúčastnilo více než 2500 žáků základních škol a víceletých gymnázií. Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na internetové stránce `junior.naboj.org`.

Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že další ročník Náboje Junior proběhne tradičně v listopadu 2018. A pokud byste chtěli uspořádat Náboj Junior i ve vašem městě a zvýšit tak přístupnost soutěže v regionu, budeme velice potěšeni a rádi s vámi navážeme spolupráci. V případě zájmu nám napište na kontaktní e-mail.

Spoluvyhlašovateli soutěže jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Na přípravě soutěžních úloh, této brožurky a na samotné organizaci soutěže v České republice se podíleli zejména organizátoři a příznivci korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, ve spolupráci s organizátory v jednotlivých organizačních místech. Na Slovensku organizaci zabezpečilo občanské sdružení Trojsten a v Polsku studenti Jagellonské univerzity v Krakově.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady,

Organizátoři
`info-cz@junior.naboj.org`

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Úloha 1 ... konečná

Do autobusu na počáteční zastávce nastoupí tři lidé. Na druhé zastávce jeden cestující vystoupí a pět lidí nastoupí. Na třetí zastávce dvě osoby vystoupí a čtyři nastoupí. Na čtvrté zastávce nikdo nevystoupí, ale naopak deset lidí nastoupí. Na páté zastávce vystoupily dvě osoby a nastoupilo sedm osob. Kolik cestujících nejvíce může z autobusu vystoupit na šesté zastávce?

Zapišme si úlohu číselně. Na počáteční zastávce byl autobus pochopitelně prázdný. Všechny nastupující osoby budeme tedy přičítat a vystupující odečítat. Tím dostaneme výraz

$$0 + 3 - 1 + 5 - 2 + 4 - 0 + 10 - 2 + 7 = 24\,.$$

Tedy 24 osob cestovalo z páté zastávky na šestou, proto na šesté zastávce mohlo vystoupit nanejvýše 24 cestujících.

Úloha 2 ... hodiny

O jakou část kruhu se otočí hodinová ručička za 40 minut*?*

Pro hodinovou ručičku platí přímá úměra: pokud ručička opíše za hodinu (tzn. za 60 min) dvanáctinu kruhu (neboť celý kruh opíše hodinová ručička za 12 hodin), tak za $40\,\mathrm{min} = 2/3\,\mathrm{h}$ opíše $2/3 \cdot 1/12 = 1/18$ kruhu.

Úloha 3 ... zdravá výživa

Organizátoři Výfuku jednou jedli salát. Vědí, že ingredience v něm jsou v poměrech salát : sýr = = 3 : 2, sýr : cibule = 5 : 6, cibule : rajče = 3 : 2, rajče : hrášek = 4 : 7. Kolik salát obsahuje hrášku, když na něj použili 150 g *salátu?*

Chceme zjistit poměr mezi salátovými listy a hráškem. Tohoto vztahu dosáhneme, když všechny poměry vynásobíme. Tím se vykrátí hmotnosti všech ingrediencí kromě salátu a hrášku:

$$\frac{\text{salát}}{\text{sýr}} \cdot \frac{\text{sýr}}{\text{cibule}} \cdot \frac{\text{cibule}}{\text{rajče}} \cdot \frac{\text{rajče}}{\text{hrášek}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{15}{14}\,.$$

Jestliže tedy víme, že salát váží 150 g, tak pomocí trojčlenky dopočteme hmotnost hrášku.

$$\text{hrášek} = \frac{14}{15} \cdot \text{salát} = \frac{14}{15} \cdot 150\,\mathrm{g} = 140\,\mathrm{g}\,.$$

Na salát jsme potřebovali 140 g hrášku.

Úloha 4 ... sudoku

Vyřešte následující sudoku: do mřížky vepište čísla 1 *až* 4 *tak, aby platilo, že v každém řádku, sloupci i zvýrazněném čtverci velikosti* 2×2 *jsou všechna čísla obsažena právě jednou.*

	3	1	
4			
			1
	4	3	

Správných postupů řešení tohoto úkolu je více, proto zde předvedeme pouze jeden ilustrativní. Pro začátek si jednotlivé řádky označíme postupně I, II, III a IV a podobně sloupce ponesou označení A, B, C a D.

	A	B	C	D
I	2	**3**	**1**	4
II	**4**	1	2	3
III	3	2	4	**1**
IV	1	**4**	**3**	2

Pokusíme se nejprve doplnit do mřížky číslice 1. Vidíme, že v řádcích I a III již tato číslice je. Navíc vzhledem k tomu, že je obsažena v pravých čtvercích 2×2, zužuje se výběr volných políček na BII a AIV. Následně analogickou úvahou doplníme číslici 4 na pozice DI a CII.

Nyní můžeme doplnit číslici 3, která se nachází ve sloupcích B a C. Vzhledem k tomu, že ve sloupci B se tato číslice nachází v horní polovině mřížky, je možné napsat číslici 3 pouze na políčko AIII. Analogický argument použijeme při doplňování trojky na pozici DII. Na zbylá místa nakonec vepíšeme číslici 2 (viz obrázek).

Úloha 5 ... Tu/Lf

Lukáš se o víkendu rozhodl, že vytvoří novou soustavu jednotek. Jako první zavedl novou jednotku času, kterou skromně pojmenoval po sobě, tedy Lukáš, a vytvořil jí značku podle svých iniciálů, tedy Lf*. Tuto jednotku zadefinoval jako dobu, během níž mrkne, tedy* $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$. *Dále zadefinoval novou jednotku vzdálenosti, kterou pojmenoval po své kamarádce Terce (značka* Tu*), která odpovídá Terčině výšce, tedy* $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$. *Jaká rychlost v těchto nových jednotkách (tedy vyjádřeno v* Tu/Lf *odpovídá maximální povolené rychlosti na dálnici (tj.* $36\,\mathrm{m/s}$*)?*

Nejprve si vyjádříme metry a sekundy podle nových Lukášových jednotek. Víme, že $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$, takže $1\,\mathrm{m} = 1/1{,}8\,\mathrm{Tu} = 10/18\,\mathrm{Tu}$. Totéž provedeme s časem. Víme, že $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$, tedy $1\,\mathrm{s} = 1/0{,}1\,\mathrm{Lf} = 10\,\mathrm{Lf}$. Nakonec přepočteme rychlost $36\,\mathrm{m/s}$ do Tu/Lf:

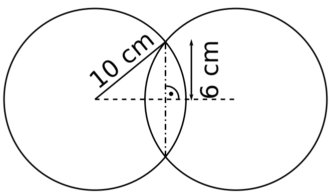
$$36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36 \cdot \frac{\frac{10}{18}\,\mathrm{Tu}}{10\,\mathrm{Lf}} = \frac{36\,\mathrm{Tu}}{18\,\mathrm{Lf}} = 2\,\mathrm{Tu/Lf}\,.$$

Rychlost $36\,\mathrm{m/s}$ tedy odpovídá rychlosti $2\,\mathrm{Tu/Lf}$.

Úloha 6 ... okrouhlá

Dvě kružnice, každá o průměru $20\,\mathrm{cm}$*, se protínají ve dvou bodech vzdálených* $12\,\mathrm{cm}$*. V jaké vzdálenosti jsou jejich středy?*

Úsečka spojující průsečíky kružnic je kolmá na úsečku spojující středy těchto kružnic a navíc se úsečky navzájem půlí, protože jsou to úhlopříčky kosočtverce se stranou rovnou poloměru kružnice.



Poloviny těchto úseček jsou také odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku s přeponou o délce poloměru kružnice (polovina průměru, tzn. 10 cm). Jedna z těchto odvěsen je rovná polovině délky vzdálenosti průsečíků, tzn. 6 cm. Délku druhé odvěsny x dopočteme z Pythagorovy věty:

$$(10\,\mathrm{cm})^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (6\,\mathrm{cm})^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{(10\,\mathrm{cm})^2 - (6\,\mathrm{cm})^2} = 16\,\mathrm{cm}\,.$$

Vzdálenost středů kružnic je tedy 16 cm.

Úloha 7 ... horké brzdy

Nákladní vlak váží 1 200 t a jede po kolejích rychlostí 72 km/h. Najednou začne prudce brzdit. Kolik tepla by vzniklo, pokud by se všechna pohybová energie vlaku přeměnila v jeho brzdách na teplo?

Stačí nám spočítat pohybovou (kinetickou) energii vlaku. Pro ni platí vztah $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, kde m značí hmotnost a v rychlost vlaku. Hmotnost vlaku převedeme na kilogramy (1 200 t = = 1 200 000 kg) a rychlost na metry za sekundu (72 km/h = 20 m/s):

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\,200\,000\,\mathrm{kg}\cdot(20\,\mathrm{m/s})^2 = 240\,000\,000\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{MJ}\,.$$

Teplo, které by vzniklo zabrzděním vlaku, je 240 MJ.

Úloha 8 ... obvodová

Petr má obdélník rozdělený na 4 menší obdélníky s celočíselnými délkami stran v cm, *jejichž obsahy (v* cm^2*) jsou zakresleny na obrázku. Jaký je obvod Petrova obdélníku?*

18	15
24	20

Rozkladem zjistíme společného dělitele obsahů 18 cm^2 a 15 cm^2, což je 3. První obdélník má tedy rozměry 6 cm × 3 cm a druhý 3 cm × 5 cm. Tím pádem obdélník s obsahem 24 cm^2 má rozměry 4 cm × 6 cm, jelikož s prvním obdélníkem sdílí hranu o délce 6 cm. Rozměry posledního obdélníku jsou tím pádem 4 cm × 5 cm. Nyní již stačí sečíst délky stran, které přispívají do obvodu celého obdélníku:

$$o = 2\,(a+b) = 2\cdot[(6\,\mathrm{cm}+5\,\mathrm{cm})+(3\,\mathrm{cm}+4\,\mathrm{cm})] = 36\,\mathrm{cm}\,.$$

Obvod Petrova obdélníku je tedy 36 cm.

Úloha 9 ... slaný krystal

Julče roste v rámci školního experimentu krystal chemikálie o hustotě 2 g/cm^3 ve tvaru krychle docela pomalu. Každá hrana toho krystalu se jí prodlouží o jeden milimetr za týden. Kolik týdnů by musela čekat, aby její krystal vážil alespoň 16 g?

Objem V krystalu Julčiny chemikálie s hmotností požadovaných 16 g je jednoduše

$$V = \frac{16\,\mathrm{g}}{2\,\mathrm{g/cm^3}} = 8\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Jelikož víme, že krystal je krychlový, je jeho objem roven třetí mocnině délky hrany. Třetí odmocninou z 8 je 2, proto musí být hrana požadovaného krystalu dlouhá 2 cm = 20 mm. Jelikož je rychlost růstu zadaná v milimetrech za týden, bude potřebná doba růstu rovna 20 týdnů. Julča tedy musí počkat 20 týdnů.

Úloha 10 ... džus

Babička Andrea si vyrábí džus z malin a borůvek ze své zahrady, kde sesbírala dohromady 70 kg *tohoto ovoce. Na jeden litr malinového džusu potřebuje* 3 kg *malin a na jeden litr borůvkového* 4 kg *borůvek. Kolik kilogramů borůvek sesbírala, jestliže vyrobila* $21\,\ell$ *džusu?*

Označíme-li hmotnost malin m_m a hmotnost borůvek m_b, platí $m_\mathrm{m} = 70\,\mathrm{kg} - m_\mathrm{b}$. Z malin vyrobíme $V_\mathrm{m} = m_\mathrm{m}/3\,\mathrm{kg}/\ell$ džusu; analogicky z borůvek vyrobíme $V_\mathrm{b} = m_\mathrm{b}/4\,\mathrm{kg}/\ell$ džusu. Pro celkové množství vyrobeného džusu platí $21\,\ell = V_\mathrm{m} + V_\mathrm{b}$. Dosadíme-li za objemy, dostaneme rovnici:

$$21\,\ell = \frac{m_\mathrm{m}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\mathrm{b}}{4\,\mathrm{kg}/\ell} = \frac{70\,\mathrm{kg} - m_\mathrm{b}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\mathrm{b}}{4\,\mathrm{kg}/\ell}\,.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme hmotnost borůvek $m_\mathrm{b} = 28\,\mathrm{kg}$.

Úloha 11 ... profilovka

Kuba chce mít novou profilovou fotku co nejenergičtější. Na jedné fotce stojí v Anglii u řeky v nadmořské výšce 20 m *n. m. Na druhé jede na kole v Monaku (*0 m *n. m.). Jakou rychlostí by na kole musel Kuba jet, aby byla jeho celková energie v době pořízení fotek stejná?*

Hodnotu Kubovy rychlosti získáme porovnáním potenciální energie E_p z fotky v Anglii a kinetické energie E_k z fotky z Monaka. Pokud označíme m Kubovu hmotnost, $h = 20\,\mathrm{m}$ nadmořskou výšku v Anglii a v hledanou rychlost, získáme

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} \quad\Rightarrow\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m/s}\,.$$

Aby byla Kubova energie v době pořízení fotek stejná, musí jet v Monaku rychlostí $20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 12 ... seznamování

Na táboře bylo 40 *chlapců a* 28 *dívek. Při seznamovací hře se všechny děti postavily do kroužku.* 18 *chlapců mělo vedle sebe po pravé ruce některou z dívek. Kolik chlapců mělo dívku po levé ruce?*

Dívky v kroužku jsou rozmístěny vždy ve *skupinkách* obsahující nějaký počet dívek (tento počet může být i jedna). Každá *skupinka* je pak ohraničena chlapcem zleva, který drží krajní dívku za pravou ruku, a chlapcem zprava, jenž drží krajní dívku z této skupinky za levou ruku. Tudíž, když má 18 chlapců dívku po pravé ruce, musí mít i 18 chlapců dívku po levé ruce.

Úloha 13 ... nádrž

Na stěně vodní nádrže se utvořila prasklina, ze které vodorovně vytéká proud vody rychlostí $26\,\mathrm{m/s}$. *Vlivem tíhové síly začne vytékající proud vody padat směrem k zemi, tzn. kromě neměnné vodorovné složky rychlosti začne v závislosti na čase* t *narůstat její svislá složka* u, *a to podle vztahu* $u = gt$, *kde* g *je gravitační zrychlení.*

Po jakém čase od momentu „vytečení“ bude velikost svislé složky stejná jako velikost vodorovné složky?

Jelikož je vodorovná složka rychlosti neměnná, stačí položit $u = 26\,\mathrm{m/s}$ (tehdy budou obě složky stejně velké) a dosadit do vztahu pro časovou závislost:

$$u = gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u}{g} = \frac{26\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

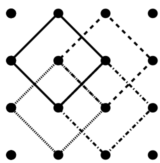
Čas, kdy jsou složky rychlosti stejně velké je $2{,}6\,\mathrm{s}$.

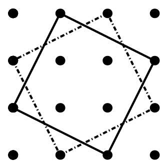
Úloha 14 ... čtverce

Kolik čtverců můžeme zakreslit do pravidelné čtvercové mřížky tak, aby jejich vrcholy ležely na nějakém ze 16 *bodů čtvercové mřížky?*

Začněme sčítat od nejmenších čtverců. Do mřížky lze zakreslit 9 čtverečků 1×1, 4 čtverce 2×2 a jeden čtverec 3×3, který nám „obsadí“ celou mřížku.

Tím ovšem výčet čtverců nekončí, protože kolmé na sebe jsou i úsečky, které spojují tečky mřížky diagonálně. Do mřížky tak lze zakreslit i 4 čtverce s rozměry $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ a 2 čtverce s rozměry $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ (viz obrázek).





Dohromady tak lze do mřížky zakreslit $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ různých čtverců.

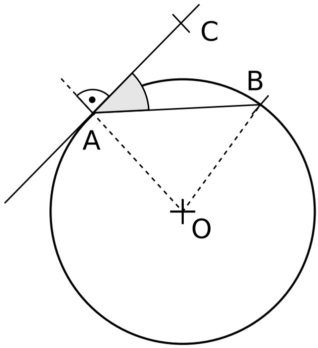
Úloha 15 ... rytířský turnaj

Královna Alžběta pořádala rytířský turnaj, v němž zvítězí pouze jediný: ten nejrychlejší, nejsilnější, nejstatečnější, nejmoudřejší a nejvtipnější ze všech. Do turnaje se přihlásilo celkem 200 *rytířů z širokého okolí. Rytíři vždy soupeří ve dvojicích, přičemž právě jeden z dvojice postupuje dále. Pokud však v nějakém kole nenajde jeden rytíř protivníka, postupuje automaticky k další disciplíně. Kolik zápasů dvojic se na turnaji odehrálo, zbyl-li opravdu na konci jediný vítěz?*

V každém zápase vypadne jeden účastník turnaje. Aby zbyl jeden jediný vítěz, musí být vyřazeno celkem 199 rytířů. Na turnaji se tedy odehrálo 199 zápasů.

Úloha 16 ... geometrická

Patrik si na kružnici se středem v bodě O *nakreslil dva různé body* A *a* B*. Pak narýsoval bod* C *takový, aby přímky* OA *a* CA *byly na sebe kolmé. Nakonec změřil, že* $\measuredangle$CAB $= 42°$*. Jak velký je úhel* $\measuredangle$AOB*?*



Nejdříve si situaci načrtneme. Z obrázku vidíme, že úhel $\measuredangle$OAB je doplňkem úhlu $\measuredangle$CAB do $90°$ a má tedy velikost $\measuredangle$OAB $= 90° - 42° = 48°$. Jelikož jsou body A a B na kružnici, je trojúhelník ABO rovnoramenný a platí, že $\measuredangle$OAB = $\measuredangle$OBA. Vzhledem k tomu, že součet vnitřních úhlů je v trojúhelníku vždy $180°$, pro velikost úhlu $\measuredangle$AOB platí $\measuredangle$AOB $= 180° - 2 \cdot 48° = 84°$.

Úloha 17 ... benzín

Víme, že spalováním benzínu v motoru získáme $32\,\mathrm{MJ}$ *energie na litr benzínu, přičemž pouze polovinu z této energie motor umí přeměnit na pohybovou energii.*

Jedeme-li v autě po dálnici konstantní rychlostí $110\,\mathrm{km/h}$ *(kdy na auto působí konstantní odporová síla vzduchu* $800\,\mathrm{N}$*) a máme-li v nádrži* $5\,\ell$ *benzínu, jakou vzdálenost ujedeme, než nám dojde benzín?*

Využitelná energie benzínu odpovídá práci, kterou musí auto vynaložit na ujetí dané dráhy. Tato práce je rovna součinu ujeté dráhy s a síly, kterou musí motor vynakládat, což je odporová síla působící na auto (motor musí tuto sílu překonávat).

Celkovou využitelnou energii, kterou spalováním benzínu získáme, vypočteme jako:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 32\,\mathrm{MJ}/\ell \cdot 5\,\ell = 80\,\mathrm{MJ}\,.$$

Z této energie již spočítáme ujetou dráhu:

$$s = \frac{E}{F} = \frac{80\,\mathrm{MJ}}{800\,\mathrm{N}} = \frac{80\,000\,000\,\mathrm{J}}{800\,\mathrm{N}} = 100\,000\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{km}\,.$$

Než autu dojde benzín, ujede dráhu $100\,\mathrm{km}$.

Úloha 18 ... oříšky v čokoládě

Kolik oříšků v čokoládě se vejde do dárkového kornoutu z celofánu, když 50 % jeho objemu budou tvořit vzduchové mezery mezi oříšky? Výška kornoutu je 24 cm, poloměr podstavy 8 cm a objem jednoho oříšku v čokoládě je $0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Objem kužele je $V = \pi r^2 h/3$, kde $r = 8\,\mathrm{cm}$ je poloměr jeho podstavy a $h = 24\,\mathrm{cm}$ je jeho výška. Polovina jeho objemu (tj. objem, který zabírají oříšky) je tedy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{1\,536\pi}{6}\,\mathrm{cm}^3 = 256\pi\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Tento objem vydělíme objemem jednoho oříšku, čímž získáme jejich celkový počet v kornoutu:

$$\frac{256\pi\,\mathrm{cm}^3}{0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3} = \frac{256\cdot 10}{2} = 1\,280\,.$$

Do kornoutu se tedy vejde 1 280 oříšků.

Úloha 19 ... ledař

V minulosti jste si museli nechat dodat led na chlazení svého mrazáku od ledaře. Jaká minimální hmotnost ledu (o teplotě $-10\,^\circ\mathrm{C}$ a měrné tepelné kapacitě $2\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}$) by byla potřeba, aby se ochladil prostor o objemu $200\,\mathrm{m}^3$ v mrazáku řeznictví obsahující pouze vzduch o hustotě $1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a měrné tepelné kapacitě $1\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}$, z $20\,^\circ\mathrm{C}$ tak, aby po uzavření a zchlazení prostoru žádný led nezačal tát? Předpokládejte, že led neubírá místo v mrazáku, tj. má vyhrazený další prostor.

Požadavek, aby led neroztál, znamená, že koncová teplota v mrazáku bude $0\,^\circ\mathrm{C}$. Pokud by byla v mrazáku koncová teplota nižší, bylo by v něm zbytečně moc ledu, a naopak byla-li by koncová teplota vyšší, část ledu by roztála. Protože neuvažujeme energetické ztráty, platí, že teplo, které led přijme během ohřátí z $-10\,^\circ\mathrm{C}$ na $0\,^\circ\mathrm{C}$, se musí rovnat teplu, které odevzdá vzduch mrazáku.

Pro přijaté/odevzdané teplo platí, že je rovno součinu hmotnosti, odpovídající tepelné kapacity a změny teploty. Změna teploty ledu je $10\,^\circ\mathrm{C}$ a změna teploty vzduchu je $20\,^\circ\mathrm{C}$. Hmotnost vzduchu v mrazáku spočteme jednoduše ze vzorce $m_{vz} = V\varrho = 200\,\mathrm{m}^3\cdot 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} = 240\,\mathrm{kg}$. Označíme-li hmotnost ledu m, lze psát rovnost přijatého a odevzdaného tepla:

$$m\cdot 2\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}\cdot 10\,^\circ\mathrm{C} = 240\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{240\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{2\,\mathrm{kJ/kg\cdot{}^\circ C}\cdot 10\,^\circ\mathrm{C}} = 240\,\mathrm{kg}\,.$$

Potřebná hmotnost ledu je 240 kg.

Úloha 20 ... numismatická

Eva procházela půdu, kde našla dědovu starou truhlu se spoustou mincí prastaré měny o nominálních hodnotách 5, 9 a 12. Přišla na to, že pokud by platila těmito mincemi v obchodě a obchodník by jí neměl čím vrátit, některé částky by neměla možnost zaplatit přesně. Kolik takových částek je?

Ze zadaných hodnot očividně nemůžeme dostat hodnoty 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13 a 16. Poté si všimneme, že kombinací mincí z truhly lze zaplatit řadu pěti částek (17, 18, 19, 20 a 21). Všechny vyšší částky pak jdou zaplatit například tím, že budeme přidávat minci 5. Nemůžeme tedy přesně zaplatit pouze 10 hodnot.

Úloha 21 ... vor

Těžký náklad se kdysi dopravoval po řekách na vorech. Jakou maximální hmotnost může mít náklad, který unese vor vyrobený z 10 válcových klád dlouhých 5 m o průměru 20 cm, aniž by se náklad namočil? Uvažujte, že prázdný vor má pod hladinou tři pětiny svého objemu.

Vor se může nakládat, dokud se celý nepotopí. Tehdy se vztlaková síla celkově ponořeného voru F_{vz} bude rovnat součtu tíhové síly klád F_{k}, ze kterých je vor vyroben, a tíhové síly nákladu F_{n}:

$$F_{\mathrm{vz}} = F_{\mathrm{k}} + F_{\mathrm{n}}\,.$$

Vztlakovou sílu voru spočteme z jeho objemu $V = n\pi r^2 l$, kde n je počet klád, r je poloměr jedné klády a l je její délka, hustoty vody ϱ a tíhového zrychlení g:

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g = n \cdot \pi r^2 l \varrho g\,.$$

Tíhovou sílu klád F_{k} určíme z poznatku, že prázdný vor je ponořen do 3/5 svého objemu (tedy působí na něj vztlaková síla $3F_{\mathrm{vz}}/5$):

$$F_{\mathrm{k}} = \frac{3}{5}F_{\mathrm{vz}}\,.$$

Dosazením do první rovnice zjišťujeme, že platí $F_{\mathrm{n}} = 2F_{\mathrm{vz}}/5$. Maximální hmotnost nákladu zjistíme následovně:

$$m = \frac{F_{\mathrm{n}}}{g} = \frac{2}{5} \cdot n \cdot \pi r^2 l \varrho\,.$$

Odtud číselným dosazením dostáváme

$$m = \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot \pi \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 200\pi\,\mathrm{kg} \doteq 628\,\mathrm{kg}\,.$$

Vor uveze náklad o maximální hmotnosti 628 kg.

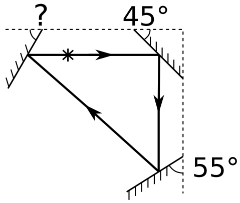
Úloha 22 ... máslová

Radka si dává každý den na snídani máslo. Novou kostku másla načala 6. 11. Dnes (24. 11.) po snídani zjistila, že všechny 3 rozměry kostky másla mají 2/3 původní hodnoty. Kdy Radka dojí tuto kostku másla, jestliže každý den sní stejné množství?

Současný objem másla činí $(2/3)^3 = 8/27$ jeho původního objemu. Radka tedy dodnes snědla $1 - 8/27 = 19/27$ z původní kostky másla, čemuž odpovídá 19 snídaní. Z toho vyplývá, že si Radka každý den dá 1/27 másla. Zbylá část tedy Radce vystačí na 8 dní, přičemž první z nich je 25. 11. Kostku proto dojí 2. prosince.

Úloha 23 ... cyklická

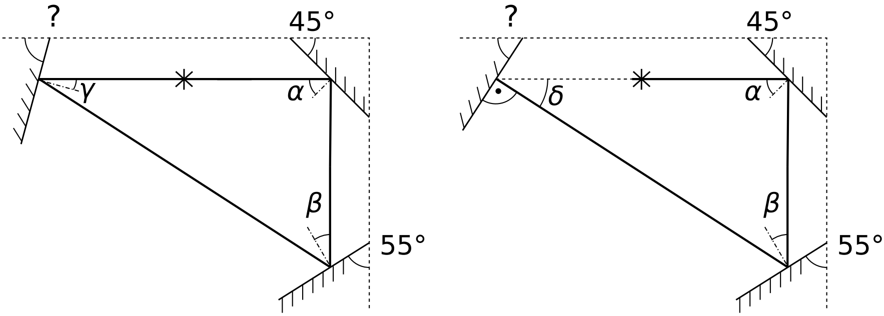
Jindra si vymyslel novou hračku, která se skládá ze tří zrcadel. První svírá s vodorovným směrem úhel 45°, druhé svírá se svislým směrem úhel 55° (viz obrázek). Laserový svazek vystupuje z laseru rovnoběžně s vodorovným směrem. Jak má Jindra nastavit třetí zrcadlo (tzn. jaký je úhel označený ?), aby laserový paprsek opět dopadal na zdroj záření rovnoběžně s vodorovným směrem?



Označme si α, β, γ úhly dopadů na jednotlivá zrcadla (viz obrázek vlevo), přičemž víme, že u každého zrcadla musí být stejně veliké i příslušné úhly odrazu.

Jestliže úhel α je doplňkový k úhlu náklonu zrcadla, pak lze jeho velikost dopočítat jako $\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Stejným způsobem zjistíme i velikost úhlu β: $\beta = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$. Protože součet všech úhlů v trojúhelníku tvořených laserovým paprskem je 180°, dopočítáme $2\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 20\,^\circ$, tedy $\gamma = 10^\circ$.

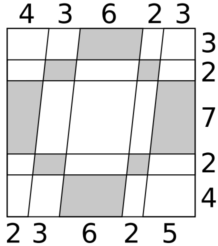
Úhel naklonění třetího zrcadla je pak opět díky střídavému úhlu roven $90^\circ - \gamma = 80^\circ$.



Další variantou je, že se budeme snažit o kolmý odraz na třetím zrcadle, čímž odražený paprsek pošleme do zdroje stejnou cestou jakou z něj přišel (viz obrázek vpravo).[1] Opět ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku dostáváme $\delta = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 20^\circ$ a z vlastnosti doplňkových úhlů získáme pro náklon třetího zrcadla úhel $90^\circ - \delta = 70^\circ$.

Úloha 24 . . . plošná

Vypočítejte celkový obsah šedě obarvených částí na obrázku. Čísla uvedená na obrázku odpovídají délkám jednotlivých úseků na obvodu čtverce v cm.



[1] Je to sice netradiční, ale každopádně správné řešení.

Jedná se většinou o rovnoběžníky, u kterých se dá spočítat obsah pomocí vztahu $S = av_a$, kde v_a je výška na stranu a. Pouze útvary v krajních sloupcích jsou lichoběžníky. Všimněme si, že „pravý“ sloupec můžeme přesunout vedle „levého“ sloupce, čímž z těchto dvou lichoběžníků vznikne opět rovnoběžník. Jelikož nyní známe velikost jedné strany a k ní příslušné výšky u všech (i nově vzniklých) rovnoběžníků, můžeme celkový obsah spočítat jako

$$S = 6 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + (2+5) \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 111\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Součet šedě vybarvených obsahů je $111\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 25 ... vodopád

Terka si chce na zahradě postavit malý vodopád vysoký $1\,\mathrm{m}$ *o průtoku* $10\,\ell/\mathrm{s}$. *Jaký výkon musí mít čerpadlo přečerpávající vodu z jezírka pod vodopádem do nádrže nad ním? Vnitřní tření v kapalině zanedbejte.*

Aby byl průtok vodopádu $10\,\ell/\mathrm{s}$, čerpadlo musí za $1\,\mathrm{s}$ vyčerpat do dané výšky $10\,\ell$ (tedy $10\,\mathrm{kg}$) vody. Jinými slovy, musí této vodě dodat potenciální energii $10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{J}$. Jelikož energie (zde $100\,\mathrm{J}$) za čas ($1\,\mathrm{s}$) odpovídá výkonu, Terčino čerpadlo musí mít výkon $100\,\mathrm{J/s} = 100\,\mathrm{W}$.

Úloha 26 ... desetinná

Kolik desetinných míst bude mít číslo $1/5^{10}$ *napsané v běžném desetinném tvaru (tj. na kolikátém desetinném místě se nachází poslední platná cifra)?*

Pro určení počtu desetinných míst by se nám hodilo zlomek upravit do tvaru $x/10^n$, kde x je číslo nekončící cifrou 0 a 10^n je vhodná mocnina desítky (pokud by číslo x nulou končilo, mohli bychom zlomek krátit a snížit tak počet platných desetinných míst). Takovéto číslo má pak n desetinných míst (například $4/1\,000 = 0{,}004$).

Jelikož ve zlomku ze zadání jsou jen mocniny pětky, musíme zlomek rozšířit. Stačí si jenom uvědomit, že platí $5 \cdot 2 = 10$. Pokud tedy náš zlomek rozšíříme číslem 2^{10}, dostaneme:

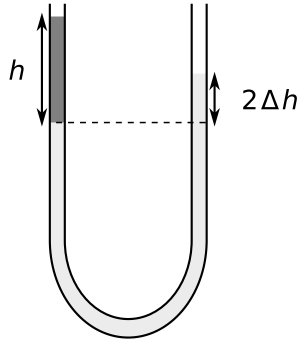
$$\frac{1}{5^{10}} = \frac{1}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} = \frac{2^{10}}{10^{10}}\,.$$

Číslo v čitateli je $2^{10} = 1\,024$ a nekončí nulou. Z mocniny desítky ve jmenovateli tedy můžeme určit, že číslo $1/5^{10}$ má 10 desetinných míst.

Úloha 27 ... u-trubice

Bětka našla v garáži dlouhou trubici ve tvaru písmene U *s průřezem* $1\,\mathrm{cm}^2$ *a naplnila ji z větší části vodou. Pak do levého ramene trubice nalila ještě* $10\,\mathrm{ml}$ *benzínu s hustotou* $0{,}72\,\mathrm{g/cm}^3$ *a počkala, až se kapaliny v trubici ustálí. O kolik tím stoupla hladina vody v pravém rameni trubice, víte-li, že benzín se s vodou nemísí?*

Objem $10\,\mathrm{ml} = 10\,\mathrm{cm}^3$ benzínu vytvoří v trubici sloupec o výšce $h = 10\,\mathrm{cm}^3/1\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}$, který tlačí na hladinu vody v levém rameni trubice hydrostatickým tlakem $p = \varrho g h$, kde $\varrho = 0{,}72\,\mathrm{g/cm}^3$ je hustota benzínu a g tíhové zrychlení. Tento dodatečný tlak způsobí, že hladina vody v levém rameni poklesne o Δh, proto se v pravém rameni hladina o stejnou výšku zvedne (voda se nikde neztrácí).



V pravém rameni je tedy hladina o $2\Delta h$ výše než hladina vody v levém rameni. Jsou-li tlaky v trubici ustálené, musí tato voda „navíc" také způsobovat tlak p. Platí tedy:

$$\varrho g h = \varrho_{\mathrm{v}} g\,(2\Delta h) \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{\varrho h}{2\varrho_{\mathrm{v}}} = \frac{0{,}72\,\mathrm{g/cm^3}\cdot 10\,\mathrm{cm}}{2\cdot 1\,\mathrm{g/cm^3}} = 3{,}6\,\mathrm{cm}\,.$$

Voda v pravém rameni trubice stoupla o 3,6 cm oproti své původní výšce hladiny.

Úloha 28 ... výroční

Vypočítejte, kolik je

$$\frac{2018! - 2017!}{2017!}\,.$$

Znak ! *označuje faktoriál, tzn. součin všech přirozených čísel od* 1 *do daného čísla (například* $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$*).*

Z definice faktoriálu platí $2018! = 2018\cdot 2017\cdot 2016\cdots 1$. Lze si také všimnout, že platí $2018! = 2018\cdot 2017!$, což řešení úlohy výrazně zjednodušuje. Čitatel zlomku ze zadání lze přepsat jako $2018! - 2017! = 2018\cdot 2017! - 2017!$, odkud lze člen 2017! vytknout. Dostaneme tedy $2017!\cdot(2018-1)$. Po dosazení do zlomku ze zadání tak dostaneme:

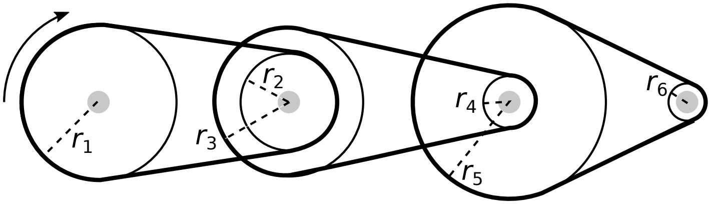
$$\frac{2018! - 2017!}{2017!} = \frac{2017!\cdot(2018-1)}{2017!} = 2018 - 1 = 2017\,.$$

Zlomek ze zadání je roven číslu 2017.

Úloha 29 ... převodovka

V převodovce máme šest ozubených kol, která jsou buď spojena řetězem, nebo jsou na společné hřídeli, viz obrázek.

Víme, že poloměry jednotlivých kol jsou $r_1 = 21\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 13\,\mathrm{cm}$ $r_3 = 20\,\mathrm{cm}$, $r_4 = 7\,\mathrm{cm}$, $r_5 = 26\,\mathrm{cm}$ *a* $r_6 = 5\,\mathrm{cm}$. *První kolo se otáčí rychlostí* 3 *otáčky za minutu. Jakou rychlostí (v otáčkách za minutu) se otáčí poslední kolo převodovky?*



Je třeba si uvědomit, že kola spojená řemenem se otáčí stejnou obvodovou rychlostí, zatímco kola na stejné hřídeli se otáčí stejnou úhlovou rychlostí (tzn. za minutu se otočí o stejný počet otáček).

Označme si úhlovou rychlost prvního kola $\omega_1 = 3\,\text{ot/min}$ ($\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ jsou úhlové rychlosti kol o poloměrech $r_1, r_2, \ldots, r_6$). Jeho obvodová rychlost je pak $v_1 = 2\pi r_1 \omega_1$, kde člen $2\pi r_1$ představuje obvod prvního kola (analogickým způsobem budeme definovat obvodové rychlosti pro další kola).

Jelikož jsou kola o poloměrech r_1 a r_2 spojeny řemenem, bude pro jejich obvodové rychlosti platit rovnost $v_1 = v_2$, kterou si lze zapsat i jako:

$$2\pi r_1 \omega_1 = 2\pi r_2 \omega_2 \quad \Rightarrow \quad r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 \,.$$

Postupujeme-li podle nákresu, lze dále psát $\omega_3 = \omega_2$ a $r_3\omega_3 = r_4\omega_4$, takže platí:

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_3}{r_4}\omega_2 = \frac{r_3}{r_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\omega_1 \,.$$

A nakonec platí $\omega_4 = \omega_5$ a $r_5\omega_5 = r_6\omega_6$, což můžeme zapsat jako:

$$\omega_6 = \frac{r_5}{r_6}\omega_5 = \frac{r_5}{r_6}\omega_4 = \frac{r_5}{r_6}\cdot\frac{r_3}{r_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{26\,\text{cm}\cdot 20\,\text{cm}\cdot 21\,\text{cm}}{5\,\text{cm}\cdot 7\,\text{cm}\cdot 13\,\text{cm}}\cdot 3\,\text{ot/min} = 72\,\text{ot/min}\,.$$

Šesté kolo převodovky se otáčí úhlovou rychlostí $72\,\text{ot/min}$.

Úloha 30 ... zlomky, zlomky, zlomky

Marco si z legrace napsal zlomky

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \frac{1}{72}, \frac{1}{90} \text{ a } \frac{1}{110}\,.$$

Potom se zamyslel, jaký by asi mohl být jejich součet. Kolik má onen součet být?

Můžeme si všimnout, že zlomky nejsou voleny náhodně, neboť platí:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \ldots$$

Jinými slovy, všechny zlomky jsou rovny rozdílu převrácených hodnot dvou po sobě jdoucích malých přirozených čísel. Když postupně sčítáme zadané zlomky v této rozepsané podobě, téměř všechny z nich se nám navzájem odečtou:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}\,.$$

Součet všech zlomků je proto $10/11 \doteq 0{,}909$.

Úloha 31 ... červená

Marek rád zkoumá přirozená čísla tak, že určuje součty cifer L, resp. S, na lichých, respektive sudých pozicích. Marek zjistil, že pro každé číslo dělitelné 11 platí, že rozdíl $|L-S|$ je dělitelný 11, přičemž často je tento rozdíl dokonce nulový. Čísla splňující $|L-S| = 0$ Marek nazval červená čísla.

Pomozte Markovi a najděte nejmenší číslo, které je opět dělitelné 11, ale není červené.

Zjevně platí, že všechny dvouciferné násobky 11 jsou červená čísla. Hledejme proto naše číslo mezi čísly trojcifernými. Obecně můžeme hledané číslo napsat ve tvaru $100a + 10b + c$, kde a, b, c označují hodnoty jednotlivých cifer (a jsou tedy samy jednociferná čísla).

Tato čísla musí splňovat podmínku $|a + c - b| \neq 0$ a zároveň být dělitelná 11, takže musí platit $|a + c - b| = 11$ (pro vyšší rozdíly dělitelné 11 by čísla a a c musela být dvouciferná).

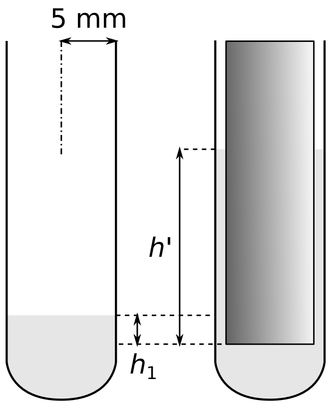
Hledáme-li nejmenší číslo, lze položit $a = 1$. Potom ale musí platit $c - b = 10$, nebo $c - b = -12$, což pro jednociferná čísla není možné. Musíme tedy položit $a = 2$ a splnit podmínku $c - b = 9$.[2] Nejmenší číslo získáme, pokud položíme $b = 0$ a $c = 9$. Nejmenší číslo, které není červené a zároveň je dělitelné 11, je číslo 209.

Úloha 32 ... zkumavka

Jarda rád experimentuje v chemické laboratoři. Posledně si vzal dlouhou zkumavku s poloměrem 5 mm a nalil do ní trochu vody. Pak našel dlouhý válcový kus korku s poloměrem 4 mm, výškou 10 cm a hustotou 0,25 g/cm³ a nenapadlo ho nic jiného, než jej vhodit do zkumavky a nechat ho v ní svisle plovat. O kolik se vhozením korku zvedla hladina vody ve zkumavce?

Jelikož korek ve zkumavce plove, platí rovnost tíhové a vztlakové síly na něj působící. Tíhová síla je $F_G = mg = \varrho V g$, kde $\varrho = 0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$ je hustota korku, g tíhové zrychlení a V objem korku (ten lze vypočítat jako Sh, kde S je obsah podstavy a $h = 10\,\mathrm{cm}$ je jeho výška). Pro vztlakovou sílu platí $F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V' g$, kde ϱ_{v} je hustota vody a V' je objem ponořené části (tu lze opět vyjádřit jako Sh', kde h' je výška ponořené části). Z rovnice pro rovnost sil vyjde:

$$\varrho S h g = \varrho_{\mathrm{v}} S h' g \quad \Rightarrow \quad h' = h\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{v}}} = 10\,\mathrm{cm} \cdot \frac{0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 2{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$



[2] Druhá varianta $c - b = -13$ pro jednociferná čísla opět nastat nemůže.

Korek je tedy ponořen ve vodě do hloubky 2,5 cm. To ovšem ale neznamená, že o stejnou výšku vystoupala i hladina vody. Z obrázku lze vidět, že válcový objem vody s poloměrem 5 mm (stejný jako má zkumavka) a výškou h_1 se po ponoření korku změní do tvaru válcového mezikruží s vnitřním poloměrem 4 mm, vnějším poloměrem 5 mm a výškou $h' = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Jelikož je voda nestlačitelná, její objem se nemůže změnit. Platí tedy:

$$\pi \cdot (5\,\mathrm{mm})^2\, h_1 = \pi \cdot \left[(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2\right] \cdot 25\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow$$

$$h_1 = 25\,\mathrm{mm} \cdot \frac{(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2}{(5\,\mathrm{mm})^2} = 9\,\mathrm{mm}\,.$$

Z obrázku navíc platí, že změna výšky hladiny je $25\,\mathrm{mm} - h_1 = 16\,\mathrm{mm}$. Hladina vody ve zkumavce tedy vhozením korku stoupla o 16 mm.

Úloha 33 ... dělitelná

Pavla se zamyslela nad tím, jaká čísla od dvojky do stovky nejsou dělitelná 2, 3 *a ani* 5. *Zjistila, že některá z nich jsou prvočísla, ale ne všechna! Jaký je součet těch, která prvočísly nejsou?*

Čísla, která hledáme, mají prvočíselný rozklad takový, že je lze rozložit na součin prvočísel neobsahující činitele 2, 3 a 5. Součin tedy může obsahovat pouze další (větší) prvočísla, např. 7, 11, 13, 17 atd.

Všimněme si dále, že pro nejmenší přijatelný násobek 17 platí $7 \cdot 17 = 119 > 100$. Hledaná čísla tedy v rozkladu obsahují jen prvočísla 7, 11 a 13, a to jen v omezeném počtu kombinací.

Pavliným podmínkám vyhovuje pouze mocnina $7^2 = 49$ a násobky $7 \cdot 11 = 77$ a $7 \cdot 13 = 91$. Všechny další kombinace prvočinitelů dávají čísla větší než 100. Sečtením nalezených čísel tak dostáváme výsledek $49 + 77 + 91 = 217$.

Úloha 34 ... polička

Marco si posledně koupil velmi vzácnou homogenní cihlu s hmotností 32 kg *a rozměry* 10 cm, 20 cm *a* 25 cm, *kterou si chtěl vystavit na poličce v pokoji. Polička je dostatečně pevná, má zanedbatelnou hmotnost a délku* 1 m. *Na obou koncích je polička pevně uchycena do zdi podpěrami s maximální nosností pouze* 20 kg. *Marco tedy nemůže umístit cihlu na poličku na libovolné místo. Jak nejblíže může být umístěna jedna ze stěn cihly od levé podpěry?*

Cihla tlačí na Marcovu poličku tíhovou silou v místě pod svým těžištěm směrem kolmo dolů. Velikost této síly je $F_G = Mg$, kde $M = 32\,\mathrm{kg}$ je hmotnost cihly a g je tíhové zrychlení. V opačném směru poličku podpírá levá a pravá podpěra silami F_l a F_p, které v součtu kompenzují tíhovou sílu cihly (tzn. platí $F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} = F_G$).

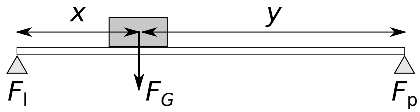
Má-li být Marcova cihla co nejblíže levé podpěře, můžeme uvažovat, že tato podpěra bude zatížena maximální možnou měrou, tedy platí $F_\mathrm{l} = mg$, kde $m = 20\,\mathrm{kg}$ je nosnost podpěry, tzn. $F_\mathrm{l} = 200\,\mathrm{N}$.

Z rovnic výše platí

$$F_\mathrm{p} = F_G - F_\mathrm{l} = (M - m)\,g = (32\,\mathrm{kg} - 20\,\mathrm{kg}) \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 120\,\mathrm{N}\,.$$

Síla, kterou tlačí cihla na poličku, se tedy rozdělí na dvě části velké 200 N a 120 N.

Kdyby bylo těžiště cihly přesně nad levou podpěrou, celá tíhová síla cihly bude působit na levou podpěru (takže hypoteticky $F_\mathrm{l} = F_G$ a $F_\mathrm{p} = 0$). Začneme-li cihlu posouvat směrem k pravé podpěře, síla F_l začne klesat a síla F_p stejnou měrou růst, neboť vždy musí platit $F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} = F_G$. Posuneme-li nakonec cihlu nad pravou podpěru, bude zcela jistě platit $F_\mathrm{p} = F_G$ a $F_\mathrm{l} = 0$.



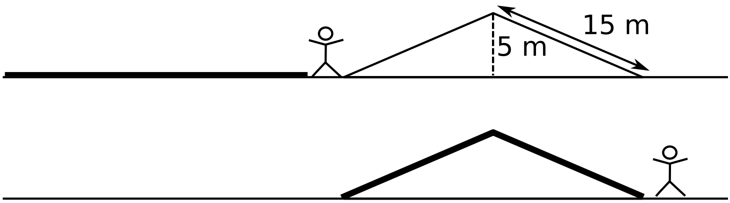
Označíme-li vzdálenost těžiště cihly od levé podpěry x a vzdálenost od pravé podpěry y (viz obrázek), z úvahy výše plyne, že poměr sil $F_\mathrm{p} : F_\mathrm{l} = 120\,\mathrm{N} : 200\,\mathrm{N} = 3 : 5$ se musí rovnat poměru vzdáleností $x : y$.[3] Navíc platí $y = 1\,\mathrm{m} - x$, takže

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{1\,\mathrm{m} - x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{8}\,\mathrm{m} = 0{,}375\,\mathrm{m} = 37{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Aby mohl Marco přiblížit jednu ze stěn cihly co nejblíže k levé podpěře, musí ji položit na nejširší hranu dlouhou 25 cm. Tím bude levá stěna cihly blíže k levé podpěře navíc o polovinu délky této hrany, tj. o 12,5 cm, a výsledná vzdálenost tak bude činit $37{,}5\,\mathrm{cm} - 12{,}5\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm}$.

Úloha 35 ... hasičská hadice

Hasiči musí po každém zásahu důsledně vysušit hadice. Dobrovolný hasič Dan to dělá tak, že mokrou hadici o délce 30 m *a hmotnosti* 60 kg *nejdříve vyrovná na zemi, a pak ji taháním vynese na konstrukci ve tvaru pyramidy s výškou* 5 m *a rameny dlouhými* 15 m. *Opomeneme-li tření, jakou práci vytažením hadice na konstrukci vykoná?*



Neuvažujeme-li tření, je tíhová síla působící na hadici jediná síla, kterou musí Dan překonávat a konat tak práci. Tato síla je zčásti kompenzována reakcí podložky. Například na vodorovné podložce by hypoteticky Dan nekonal žádnou práci, ale na nakloněné rovině již práci koná. Tato síla se ale v čase mění, protože se mění i hmotnost části hadice, která je vytažena na pyramidě.

Místo zdlouhavého počítání sil je výhodnější uvažovat energie. Práce W, kterou Dan vykoná proti tíhové síle, se beze ztrát musí proměnit na potenciální energii hadice. Pokud uvážíme, že hadice měla na začátku nulovou potenciální energii, po vytažení na pyramidu bude mít energii $E_\mathrm{p} = mgh$, kde $m = 60\,\mathrm{kg}$ je hmotnost hadice, g je tíhové zrychlení a h je výška, ve které se těžiště hadice nachází.

[3] Je-li síla na jednu z podpěr x-krát větší, cihla bude k této podpěře x-krát blíže.

Ke zjištění výšky h si stačí hadici pomyslně rozdělit na dvě ramena, jejichž těžiště se nachází v polovině jejich délky, tzn. ve výšce $h = 5\,\mathrm{m}/2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ nad zemí. Výsledné těžiště hadice se bude nacházet ve stejné výšce, takže potenciální energie i práce, kterou Dan musel pro vytažení hadice vykonat, bude činit

$$W = E_\mathrm{p} = mgh = 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 1\,500\,\mathrm{J} = 1{,}5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Dan tedy musel vykonat práci $1{,}5\,\mathrm{kJ}$.

Úloha 36 ... zmrzlina

V parných letních dnech zmrzlinář vypozoroval, že z celé vesnice jí 7 dětí zmrzlinu každý den, 6 dětí si ji kupuje obden a 3 děti mají na zmrzlinu chuť každý třetí den. První i druhý den prodal zmrzlinář shodně po 11 zmrzlinách, třetí den si pro ni přišlo 12 dětí. Kolik zmrzlin prodá čtvrtý den?

Je nutné si uvědomit, že nevíme, který den začínají jíst zmrzlinu děti, které ji nejí denně. A navíc nemusí platit, že všechny děti, které jedí zmrzlinu obden, ji začnou také jíst ve stejný den.

Nejdříve od počtů prodaných zmrzlin odečteme ty, pro něž si přijdou děti každý den. Zbylé děti pak snědly první i druhý den 4 zmrzliny a třetí den 5 zmrzlin, dohromady tedy 13 zmrzlin.

Každé dítě, které jí zmrzlinu každý třetí den, si během vzpomínaných tří dnů mohlo koupit zmrzlinu právě jednou. Jelikož takové děti jsou 3, tak pak děti kupující zmrzlinu obden musely sníst zbylých 10. Některé z nich jedly dvakrát (v první a třetí den), zbylé jen jednou (ve druhý den) a celkem těchto dětí bylo 6. Když si označíme neznámou x děti, které chodí pro zmrzlinu obden a ve zmíněné dny si ji daly celkem dvakrát, lze tuto formulaci napsat do rovnice:

$$10 = 2x + (6 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 4\,.$$

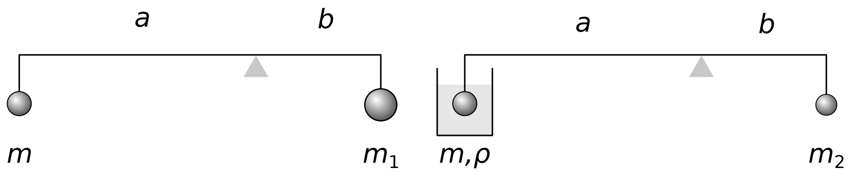
Tyto děti si čtvrtý den kupovat zmrzlinu nebudou, neboť si ji koupily v den třetí a ke zmrzlináři přijdou až pátý den. Zároveň však už první den nezbývá žádná zmrzlina pro děti navštěvující zmrzlináře každý třetí den, a proto se žádné z těchto dětí u něj nezastaví ani den čtvrtý.

Čtvrtý den si zmrzlinu koupí jenom dvě děti, které ji jedí obden, a všech 7 dětí, které si ji dávají denně. Zmrzlinář tedy prodá čtvrtý den $7 + 2 = 9$ zmrzlin.

Úloha 37 ... hustoměr

Pavla má kovovou kuličku, u níž by ráda zjistila její hustotu. Proto si postavila mechanický hustoměr, který funguje následovně. Hustoměr vypadá jako nerovnoramenná dvojzvratná páka. Na konec jednoho rameno se zavěsí kulička a vyváží se umístěním závaží o hmotnosti $100\,\mathrm{g}$ na druhý konec. Následně se celá kulička ponoří do vody a opět se provede vyvážení – na konec druhého ramena se tentokrát umístí závaží o hmotnosti $80\,\mathrm{g}$. Jaká je hustota Pavliny kuličky? Vztlak vzduchu neuvažujte.

Postupujme obecně a délku ramena, na které je pověšena Pavlina kulička, označme a, délku druhého ramena b. Hmotnost kuličky označme m, její hustotu ϱ a hmotnosti závaží $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$, viz obrázek.



Je-li hustoměr v rovnováze, momenty sil, kterými na hustoměr působí kulička a závaží, musí být stejně velké. Pokud je kulička ve vzduchu, platí jednoduše $mga = m_1gb$ a po vykrácení tíhového zrychlení $ma = m_1b$.

Po ponoření kuličky do vody (hustotu vody označíme ϱ_v) poklesne síla, jež kulička působí na rameno hustoměru, o vztlakovou sílu $\varrho_\mathrm{v}Vg$, kde $V = m/\varrho$ je objem Pavliny kuličky. Rovnováha momentů sil se tím upraví do tvaru:

$$(mg - \varrho_\mathrm{v}Vg)\,a = m_2gb \quad \Rightarrow \quad \left(m - m\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)a = m_2b\,.$$

Z levé strany rovnice lze vytknout m před závorku a dosadit za něj z první rovnice ($m = m_1b/a$). Dostáváme:

$$\frac{m_1b}{a}\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)a = m_2b\,.$$

V rovnici se vykrátí členy a i b. Vydělením obou stran rovnice členem m_1 tak dostaneme

$$\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) = \frac{m_2}{m_1} = \frac{80\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 0{,}8\,.$$

Porovnáním levé a pravé strany rovnice vidíme, že poměr hustot $\varrho_\mathrm{v}/\varrho = 0{,}2$, takže hustota Pavliny kuličky je $\varrho = \varrho_\mathrm{v}/0{,}2 = 5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Úloha 38 ... lhář

Organizátoři Náboje Junior si myslí číslo. Eva tvrdí, že když od tohoto čísla odečteme 1 a výsledek vydělíme 3, získáme druhou mocninu nějakého jiného čísla. Lukáš zase říká, že myšlené číslo je dělitelné 3 a Kuba prohlašuje, že se jedná o prvočíslo a jeho ciferný součet se rovná 10. O které nejmenší číslo jde? Pozor, jeden z organizátorů nemluví o myšleném čísle pravdu!

Označme hledané číslo x. Eva tvrdí, že $x - 1$ je dělitelné 3 (neboť výsledek dělení je opět přirozené číslo). Lukáš ale říká, že rovnou x je dělitelné třemi. Jeden z nich je tedy lhář.

Kuba zase tvrdí, že ciferný součet čísla x je 10. To znamená, že podle Kuby x není dělitelné 3, protože ciferný součet x dělitelný 3 není. V dělitelnosti třemi se tak Kuba shoduje s Evou. Lukáš je proto bezpochyby lhářem a x není dělitelné třemi.

Podle Evy je číslo x ve tvaru $x = 3n^2 + 1$, kde n je nějaké přirozené číslo.

Aby bylo x zároveň prvočíslo, člen $3n^2$ musí být sudý (jinak by bylo x sudé a nebylo by tedy prvočíslo). Sudé tedy musí být i číslo n, což lze zapsat jako $n = 2m$, kde m je nějaké jiné přirozené číslo. Dosadíme-li tento poznatek do vyjádření pro x, dostaneme:

$$x = 3n^2 + 1 = 3 \cdot (2m)^2 + 1 = 12m^2 + 1\,.$$

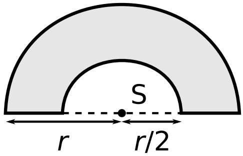
Na základě této podmínky můžeme zkontrolovat kandidáty na číslo x pro malé m. Postupně pro $m = 1, 2, \ldots$ vyjdou čísla 13, 49, 109, 193, … Vidíme, že ciferný součet rovný 10 má číslo 109. Toto číslo splňuje téměř všechna tvrzení Evy a Kuby, stačí jen ověřit, zda-li je číslo prvočíslem.

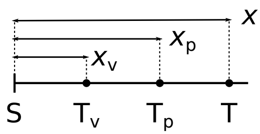
To, že číslo je liché a má ciferný součet 10, vylučuje dělitelnost prvočísly 2 a 3. Číslo končící na cifru 9 také není dělitelné 5. Nedělitelnost 7 musíme ověřit ručně (nejbližší násobek 7 je $7\cdot 10+7\cdot 6 = 112$). Dělitelnost vyššími prvočísly ověřovat nemusíme, protože pro další prvočíslo 11 platí $11^2 = 121 > 109$. Pokud by bylo číslo 109 dělitelné 11 nebo větším prvočíslem, muselo by zároveň být dělitelné i jedním z již testovaných prvočísel.

Číslo, které si myslí organizátoři, je 109.

Úloha 39 … půlkruh

Fyzikální malíř Petr chtěl nakreslit symetrický most, a proto se zamýšlel nad tím, jak se posune těžiště kartonového půlkruhu o poloměru r, když z něj vyřízne půlkruh s polovičním poloměrem podle obrázku. Věděl, že původní těžiště bylo od středu S *vzdálené $\frac{4r}{3\pi}$. V jaké vzdálenosti od bodu* S *bude ležet nové těžiště?*





Z osové symetrie je zřejmé, že těžiště původního půlkruhu T_p, Petrova mostu T i vyříznutého půlkruhu T_v leží na úsečce, která vychází z bodu S a rozděluje všechny tři objekty na stejné poloviny. Celý problém se nám tak zjednodušuje do jednoho rozměru.

Schématicky si lze situaci znázornit pomocí úsečky na obrázku, v němž jsme si také označili příslušné vzdálenosti x_p, x a x_v. Zkombinováním těžišť mostu a vyříznutého půlkruhu musíme dostat těžiště původního půlkruhu, takže platí:

$$x_\mathrm{p} = \frac{mx + m_\mathrm{v} x_\mathrm{v}}{m + m_\mathrm{v}}\,,$$

kde hmotnosti m a m_v odpovídají hmotnostem mostu a půlkruhu a $m_\mathrm{p} = m + m_\mathrm{v}$ je hmotnost původního půlkruhu.

Hmotnost kartonu, ze kterého Petr most vyrábí, je úměrná jeho obsahu. Obsah vyříznutého půlkruhu S_v je jedna čtvrtina[4] obsahu původního půlkruhu S. Zbylé tři čtvrtiny odpovídají obsahu mostu. Platí tedy $m_\mathrm{v} = m_\mathrm{p}/4$ a $m = 3m_\mathrm{p}/4$. Dosazením do vztahu pro těžiště dostáváme:

$$x_\mathrm{p} = \frac{3x + x_\mathrm{v}}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4x_\mathrm{p} - x_\mathrm{v}}{3}\,.$$

Ze zadání víme, že $x_\mathrm{p} = 4r/3\pi$. Jelikož vyříznutý půlkruh je dvakrát menší, bude platit $x_\mathrm{v} = x_\mathrm{p}/2 = 2r/3\pi$ a tedy

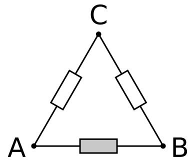
$$x = \frac{4x_\mathrm{p} - x_\mathrm{v}}{3} = \frac{4\cdot\dfrac{4r}{3\pi} - \dfrac{2r}{3\pi}}{3} = \frac{14r}{9\pi}\,.$$

[4] $S_\mathrm{v} = \frac{\pi r^2}{2} \to \frac{\pi\,(r/2)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{S}{4}\,.$

Těžiště Petrova mostu je vzdáleno od bodu S o $14r/9\pi$, což je asi $0{,}5r$.

Úloha 40 ... odporná

Eva dostala k narozeninám trojúhelník ABC se třemi rezistory (viz obrázek). Odpory bílých rezistorů jsou stejné na rozdíl od odporu šedého rezistoru. Evě ale tato informace nestačila, a tak popadla svorky multimetru, zapojila je k bodům A a B a naměřila odpor $6\,\Omega$. Pak svorky multimetru zapojila k bodům A a C a multimetr ji ukázal odpor $12\,\Omega$. Jaká je hodnota odporu šedého rezistoru?



Označme odpor bílého rezistoru R_b a odpor šedého rezistoru $R_\mathrm{š}$. Ani jednu z hodnot (zatím) totiž neznáme.

Zapojí-li Eva svorky multimetru k bodům A a B, proměřuje zapojení, kde jsou bílé odpory zapojeny sériově a k nim je paralelně zapojen šedý rezistor. Pro celkový odpor $R_\mathsf{AB} = 6\,\Omega$ tedy platí:

$$\frac{1}{R_\mathsf{AB}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{b}} + \frac{1}{R_\mathrm{š}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathsf{AB} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{š}}{2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š}}\,.$$

Pokud ale Eva zapojí svorky multimetru mezi body A a C, v sérii je zapojen jeden bílý a šedý rezistor, ke kterým je paralelně zapojen zbylý bílý rezistor. Pro celkový odpor $R_\mathsf{AC} = 12\,\Omega$ tedy platí:

$$\frac{1}{R_\mathsf{AC}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š}} + \frac{1}{R_\mathrm{b}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathsf{AC} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š})\,R_\mathrm{b}}{2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š}}\,.$$

Tyto rovnice vypadají relativně jednoduše, ale jejich úprava není až tak snadná. Všimněme si ale, že jmenovatele zlomků na pravých stranách rovnic jsou stejné. Zkusme proto z první rovnice celý tento jmenovatel vyjádřit:

$$2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{š}}{R_\mathsf{AB}}$$

a dosadit do druhé rovnice:

$$R_\mathsf{AC} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š})\,R_\mathrm{b}}{\frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{š}}{R_\mathsf{AB}}} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š})\,R_\mathrm{b}R_\mathsf{AB}}{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{š}}\,.$$

Člen R_b se nachází jak v čitateli, tak ve jmenovateli a vykrátí se. Pokud rovnici vydělíme členem $R_\mathsf{AB}/2$, dostaneme:

$$2 \cdot \frac{R_\mathsf{AC}}{R_\mathsf{AB}} = \frac{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{š}}{R_\mathrm{š}} = 1 + \frac{R_\mathrm{b}}{R_\mathrm{š}}\,.$$

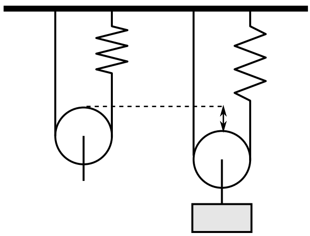
Levá strana rovnice je rovna $2 \cdot 12\,\Omega/6\,\Omega = 4$, takže (z pravé strany) $R_\mathrm{b}/R_\mathrm{š} = 3$ anebo $R_\mathrm{b} = 3R_\mathrm{š}$. Tento poznatek dosadíme do první rovnice pro odpor R_AB:

$$R_\mathsf{AB} = \frac{2 \cdot 3R_\mathrm{š}R_\mathrm{š}}{2 \cdot 3R_\mathrm{š} + R_\mathrm{š}} = \frac{6R_\mathrm{š}^2}{7R_\mathrm{š}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{š} = \frac{7}{6}R_\mathsf{AB} = 7\,\Omega\,.$$

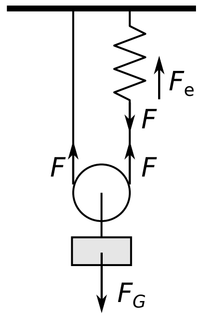
Odpor šedého rezistoru je $7\,\Omega$.

Úloha 41 ... napružená

O jakou vzdálenost klesne volná kladka, zavěsíme-li na ni závaží o hmotnosti 1,5 kg *(viz obrázek)? Délka nezatížené pružiny je* 20 cm *a její tuhost je* 25 N/m.



Zamysleme se nejdříve, které síly působí na kladku. Směrem dolů kladku táhne tíhová síla závaží $F_G = 1{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 15\,\mathrm{N}$. Naopak, směrem nahoru působí z obou stran tahová síla lana F. Má-li být soustava v rovnováze, musí být celková síla působící na kladku nulová. Pro velikost síly F tedy musí platit $F = F_G/2 = 7{,}5\,\mathrm{N}$.

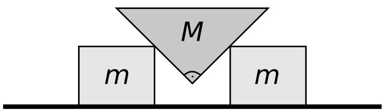


Síla F se nataženým lanem přenáší až k pružině, kterou natahuje z klidové délky o vzdálenost x. Proti natahování se pružina „brání“ elastickou silou $F_\mathrm{e} = kx$, kde $k = 25\,\mathrm{N/m}$ je její tuhost. Z rovnosti $F = F_\mathrm{e}$ tedy vypočítáme, že $x = F/k = 0{,}3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$. Zavěšením závaží se tedy pružina natáhne o 30 cm.

Samotná kladka ale klesne méně než o tuto délku. Je třeba si rozmyslet, že prodloužením lana o vzdálenost x kladka poklesne pouze o $x/2$, tedy v našem případě o 15 cm.

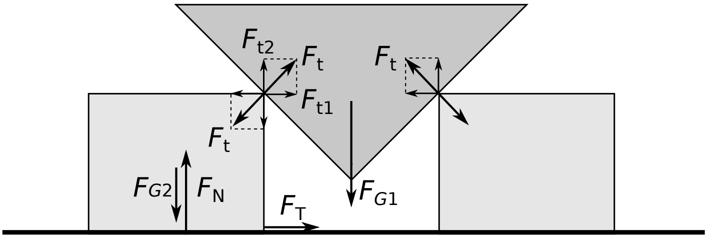
Úloha 42 ... klín

Petra našla doma dva dřevěné kvádry o hmotnosti m, mezi které vetkla pravoúhlý klín (viz obrázek). Tření mezi kvádry a podložkou je popsáno nenulovým koeficientem tření f, tření mezi kvádry a klínem neuvažujte. Jakou největší hmotnost M (v závislosti na f) může mít klín, aby se kvádry od sebe nerozjely?



Aby se kvádry nepohybovaly, musí platit, že výsledná síla na ně působící je nulová. Jinými slovy, třecí síla a reakce od podložky musí vykompenzovat sílu, kterou na kvádr působí klín.

Všechny síly, které na soustavu působí, jsou uvedeny na obrázku. Na klín působí tíhová síla $F_{G1} = Mg$ a dvakrát reakce tlakové síly F_t, kterou klín tlačí na kvádry. Všimněme si, že daná situace je symetrická. Tohoto faktu budeme v našem řešení využívat.



Jelikož je hranol pravoúhlý, síla F_t působí pod úhlem $45°$ vzhledem k vodorovnému směru. Rozložíme-li tuto sílu na její vodorovnou a svislou složku (viz obrázek), vytvoří spolu pravoúhlý trojúhelník, v němž obě odvěsny svírají s přeponou úhel $45°$. Toto ovšem splňuje jedině rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, takže velikost vodorovné složky (F_{t1}) je stejná jako svislé složky (F_{t2}).

Výslednicí všech reakčních sil F_{t1}, F_{t2} je tíhová síla F_{G1} (předpokládáme, že jsme v okamžiku, kdy máme maximální hmotnost klínu, ale celá soustava je ještě stále v klidu). Vodorovné složky F_{t1} působící v navzájem opačném směru daném symetrií se vyruší. Naopak svislé složky F_{t2} působí obě totožným směrem, který je opačný ke svislému směru tíhové síly F_{G1}. Rovnováhu sil působících na klín tak lze zapsat jako (vyrušení ve vodorovném směru nám nyní nic nového nepřinese):

$$F_{G1} = 2F_{t2} \quad \Rightarrow \quad F_{t2} = F_{t1} = \frac{F_{G1}}{2} = \frac{Mg}{2}\,.$$

Teď se podrobněji podívejme na síly působící na kvádry. Jelikož je situace symetrická, stačí se zaměřit jenom na jeden z kvádrů, např. na levý. Na tento kvádr působí také síly F_{t1} a F_{t2}, a to jako tlakové síly. Síla F_{t2} působí spolu s tíhovou silou $F_{G2} = mg$ směrem kolmo dolů. Proti těmto silám působí reakční síla podložky F_N (jinak by se kvádry „propadly“ skrz podložku). Platí tedy $F_N = F_{G2} + F_{t2}$.

Ve vodorovném směru působí na kvádr jenom dvě navzájem opačné síly, a to tlaková síla F_{t1} a třecí síla F_T, která tlakovou sílu od klínu kompenzuje. Bude-li hmotnost klínu růst, bude růst i velikost třecí síly (nesmíme zapomínat, že třecí síla je velká pouze tak, aby vykompenzovala všechny síly, které se snaží posouvat tělesem), a to až po její maximální hodnotu fF_N, kde f je koeficient tření. Požadavek, aby se hranoly nerozpohybovaly, lze tedy napsat jako $F_T = fF_N \geq F_{t1}$. Do této nerovnice dosadíme známé vztahy pro F_N, F_{t1}, F_{t2} a obě tíhové síly. Dostáváme:

$$f\,(F_{G2} + F_{t2}) \geq F_{t1} \quad \Rightarrow \quad f\left(mg + \frac{Mg}{2}\right) \geq \frac{Mg}{2}\,.$$

Rovnici upravíme do tvaru $fmg \geq (1-f)\,Mg/2$ a zamyslíme se. Bude-li $f \geq 1$, člen $(1-f)$ bude záporný (nebo nulový), stejně jako celá pravá strana nerovnice, nezávisle na M, a nerovnice bude platit vždy. Fyzikálně to znamená, že se kvádry nepohnou při *libovolné* hmotnosti $M \geq 0$.

Bude-li platit $f < 1$, nerovnici lze dále upravit a vyjádřit M. Stačí ji vynásobit kladným výrazem $2/g\,(1-f)$:

$$\frac{2fmg}{g\,(1-f)} \geq M \quad \Rightarrow \quad M \leq \frac{2fm}{(1-f)}\,.$$

Bude-li platit $f < 1$, je hmotnost Petřina klínu omezená jako $M \leq 2fm/\,(1-f)$. Naopak pro $f \geq 1$ je maximální hmotnost klínu neomezená.

Náboj Junior 2017

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Kadaň – *Sluníčková základní škola Kadaň*
K. Vary – *První české gymnázium v K. Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Plzeň – *Gymnázium Mikulášské náměstí*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská*
Sokolov – *Gymnázium a KVC Sokolov*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Ústí n. Labem – *Fak. soc. ekonomická UJEP*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Bánovce n. Bebr. – *Gymnázium J. Jesenského*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lipt. Mikuláš – *Gymnázium M. M. Hodžu*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Michalovce – *Gymnázium P. Horova*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Komenského*
Piešťany – *Gymnázium P. de Coubertina*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Prievidza – *Gymnázium V. B. Nedožerského*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Sučany – *Bilingválne gymnázium M. Hodžu*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Piar. gymnázium J. Braneckého*
Trnava – *ZŠ s MŠ Spartakovská*
Trstená – *Gymnázium M. Hattalu*
Zvolen – *Gymnázium Ľ. Štúra*

Kraków – *Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński*

Náměty úloh

Alžběta Andrýsková, Beata Czernecka, Martina Daňková, Jindřich Dušek, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Robert Gemrot, Miroslav Jarý, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, David Němec, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Jakub Sláma, Daniel Slezák, Petra Štefaníková, Kateřina Stodolová, Patrik Švančara, Pavla Trembulaková a Julie Weisová

Autoři zadání a řešení úloh

Petra Hrubcová, Simona Gabrielová, David Němec, Jakub Sláma, Petr Šimůnek, Radka Štefaníková, Petra Štefaníková, Patrik Švančara a Pavla Trembulaková

Překladatelé

Beata Czernecka, Jakub Hluško, Katarína Marčeková, Radek Kusek, Mikuláš Polák a Karolina Szulc

Recenzenti

RNDr. Zdenka Baxová, PaedDr. Ľubomír Konrád a Tomáš Kremel