A–39 švédsky pop

Rovnicu zo zadania môžeme upraviť do tvaru $\left(\overline{BB}\right)^2 = \overline{ABBA} - \left(\overline{AA}\right)^2$. Keďže čísla na pravej strane rovnice sú zhodne párne alebo nepárne,[2] číslo $\left(\overline{BB}\right)^2$ musí byť párne. Možné hodnoty čísla B sú teda $B \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Číslo $\overline{ABBA}$ vieme ďalej matematicky zapísať aj ako $1\,001A + 110B$, nakoľko cifra A sa nachádza na mieste jednotiek a tisícov a cifra B na mieste stoviek a desiatok. Rovnako sa dá rozpísať $\left(\overline{AA}\right)^2 = (11A)^2 = 121A^2$ a $\left(\overline{BB}\right)^2 = 121B^2$. Rovnicu zo zadania tak vieme prepísať do tvaru:

$$1001A + 110B = 121A^2 + 121B^2 \quad \Rightarrow \quad 3A - B = 11A^2 + 11B^2 - 88A - 11B\,.$$

Rovnicu sme upravili tak, aby boli na pravej strane všetky členy deliteľné jedenástimi. Keďže ide o rovnicu, 11 musí deliť tiež ľavú stranu rovnice (alebo sú obe strany nulové, čo pre nás nie je zaujímavé riešenie). Dostávame tak možnosti $3A - B = 0$, $3A - B = 11$ alebo $3A - B = 22$ (vyššie rozdiely nemožno pre jednociferné A a B dosiahnuť).

Z prvej rovnosti plynie $A = B/3$, nuž B je deliteľné tromi. To z možných hodnôt pre B túto podmienku spĺňa iba $B = 6$ a teda $A = 2$. Avšak požadovaná rovnosť $2\,662 = 22^2 + 66^2$ neplatí. Z druhej rovnosti plynie $A = (11 + B)/3$. Celočíselnú hodnotu pre A získame jedine pre $B = 4$, a tou bude $A = 5$. Znovu ale neplatí $5445 = 55^2 + 44^2$. Naostatok, pre tretiu rovnosť nachádzame $A = (22 + B)/3$. Celočíselnú hodnotu pre cifru A nájdeme pre $B = 2$, a to $A = 8$. Tu sa môžeme presvedčiť, že skutočne platí $8\,228 = 88^2 + 22^2$. Hľadaná dvojica čísel A, B je teda 8 a 2.

A–40 mrte čísel

Na prvý pohľad sa zdá, že v správaní sa čísel v druhom stĺpci nie je nič zvláštne. Opak je však pravdou. Keď si vypíšeme prvých niekoľko čísel v druhom stĺpci, tak si môžeme všimnúť, že sa v ňom podozrivo často vyskytuje číslo 1. Od neho potom čísla rastú, až kým sa znova nevrátia na číslo 1.

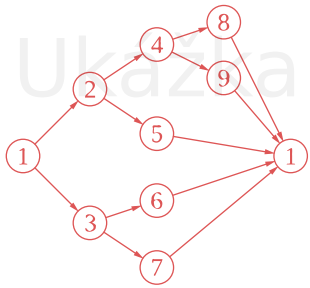
Ukážka Ukážka Ukážka

[2] Pokiaľ je A párna cifra, aj číslo $\overline{AA}$ je párne a jeho druhá mocnina je tiež párna (súčin párnych čísel je vždy párny). Pokiaľ je A nepárne, je nepárne i číslo $\overline{AA}$, rovnako ako jeho druhá mocnina (súčin dvoch nepárnych čísel je vždy nepárny).

Zamerajme sa tak na to, aké číslo môže nasledovať po akom:

- Po čísle 1 môže nasledovať iba niektoré z čísel 2 alebo 3.
- Po čísle 2 môže nasledovať iba niektoré z čísel 4 alebo 5.
- Po čísle 3 môže nasledovať iba niektoré z čísel 6 alebo 7.
- Po čísle 4 môže nasledovať iba niektoré z čísel 8 alebo 9.
- Po číslach 5, 6, 7, 8 a 9 môže nasledovať iba číslo 1, lebo určite dôjde k prechodu cez desiatku.

To, ktoré číslo môže ísť za ktorým, je vystihnuté na nasledujúcom obrázku:



Tu vidíme, že jednotky budú rozdeľovať čísla v druhom stĺpci na skupinky. Čo je však dôležitejšie, skoro všetky skupinky budú obsahovať presne 3 čísla (vrátane čísla 1). Sú len dve skupinky, ktoré obsahujú 4 čísla – skupinka 1, 2, 4, 8 a skupinka 1, 2, 4, 9. Zároveň sú toto jediné skupinky, ktoré obsahujú čísla 8 a 9. Zostáva si uvedomiť ešte jednu dôležitú myšlienku. Keď sa v druhom stĺpci dostaneme na číslo 1, tak príslušné číslo v prvom stĺpci bude mať o jednu cifru viac ako predošlé číslo v prvom stĺpci – to preto, lebo číslo 1 ako prvá cifra vzniká po prechode desiatkou.

Teraz dáme všetko dokopy. Vieme, že posledné cifry v druhom stĺpci sú 1, 2, 5, takže sa nám zvládne ukončiť skupinka. Prvej skupinke zodpovedali v prvom stĺpci čísla, ktoré boli jednociferné, a poslednej skupinke zodpovedali čísla, ktoré boli 167-ciferné. Takže všetkých skupín musí byť práve 167. Keby všetkých 167 obsahovalo 3 čísla, tak by v nich bolo spolu $3 \cdot 167 = 501$ čísel. 4 čísla tak musí obsahovať $555 - 501 = 54$ skupiniek. Čiže 54-krát sa musí v druhom stĺpci objaviť niektoré z čísel 8 alebo 9. Keďže 8 sa objaví 30-krát, číslo 9 sa musí objaviť $54 - 30 = 24$-krát.

A–41 najobľúbenejšie čísla

Označme x a y Robove najobľúbenejšie čísla. Keďže je jedno, ktoré z nich je väčšie, tak povedzme, že platí $x > y$ (rovnosť zakazuje zadanie). Zo zadania vyplýva, že:

$$x \cdot y = 7 \cdot (x + y)\,.$$

Keď presunieme všetky členy rovnice na jednu stranu, dostaneme:

$$x \cdot y - 7 \cdot x - 7 \cdot y = 0\,.$$

Tvar, do ktorého by bolo fajn rovnicu dostať, je nejaký súčin zátvoriek, pričom každá zátvorka bude obsahovať iba jedno z čísel x a y. Tu by nám mohlo napadnúť, že ľavá strana predošlej rovnosti sa podobá na súčin zátvoriek $(x - 7) \cdot (y - 7)$ v roznásobenom tvare $x \cdot y - 7 \cdot x - 7 \cdot y + 49$. Ak k rovnici pripočítame číslo 49, vieme ju upraviť do tvaru:

$$(x - 7) \cdot (y - 7) = 49\,.$$

Ak by niektorá zo zátvoriek bola záporná, musela by aj druhá zátvorka byť záporná (inak by sa ľavá strana rovnice nemohla rovnať kladnému číslu 49). Keďže x a y sú prirodzené čísla, zátvorky môžu nadobúdať hodnoty -1, -2, -3, -4, -5 alebo -6. Najväčšia možná hodnota súčinu $(x - 7) \cdot (y - 7)$ by tak bola $(-6) \cdot (-6) = 36$, čo je ale menšie číslo ako 49.

Môžeme preto usúdiť, že obe zátvorky v rovnici sú kladné. Hodnoty oboch zátvoriek sú navyše celé čísla, takže to musia byť delitele čísla 49. Toto číslo sa dá rozdeliť na súčin iba dvomi spôsobmi: $49 \cdot 1$ alebo $7 \cdot 7$. Ak by platila druhá z možností, muselo by platiť $x = y = 14$, ale zo zadania majú byť čísla x a y rôzne. Preto musí mať jedna zo zátvoriek hodnotu 49 a druhá 1. Vzhľadom na predpoklad $x > y$ z úvodu riešenia platí $x - 7 = 49$ a $y - 7 = 1$. To znamená, že $x = 56$ a $y = 8$. Toto je jediné riešenie, a preto je súčet Robových čísel jednoznačne $56 + 8 = 64$.

Ukážka Ukážka Ukážka